Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич

ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО ВАРИАЦИЙ НА ТЕМУ РАЗЛОЖЕНИЯ ТРАНСВЕКЦИЙ

В настоящей работе мы описываем несколько новых вариантов метода разложения унипотентов, которые позволяют резко расширить его применимость. Здесь мы просто проиллюстрируем как эти идеи работают в некоторых простейших ситуациях, для расщепимых классических групп.

Введение

Напомним, что метод разложения унипотентов [19, 3, 12, 28, 32, 26, 29] позволяет сводить доказательство структурных результатов для группы $G(R)$ типа Ли – скажем, для классических групп или групп R-точек редуктивных групп – к группам меньшего ранга над кольцом R. Для коммутативных колец он дает *явные полиномиальные формулы*, выражающие важнейшие типы унипотентных элементов самой группы (скажем, корневые элементы) как произведения унипотентных элементов, лежащих в собственных параболических подгруппах. В самое последнее время снова начали возникать новые варианты и приложения этого метода [13, 6, 7, 31].

Мы не будем воспроизводить здесь точные формулировки, напомним лишь, что *в простейшем варианте* метод разложения унипотентов состоит в том, что маленькие унипотентные элементы, стабилизирующие столбцы фиксированной матрицы $g \in G(R)$, порождают всю элементарную группу $E(R)$. Иными словами, проверяется, что

Ключевые слова: полная линейная группа, элементарная группа, трансвекции, разложение унипотентов, параболические подгруппы, стандартность автоморфизмов.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами”. Кроме того, на заключительном этапе работа первого автора была поддержана проектами РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-91333 и 09-01-90304. Работа второго автора поддержана проектом РФФИ 10-01-90016 “Исследование структуры форм редуктивных групп и поведение малых унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп” .

$E(R)$ порождается малоранговыми унипотентными элементами u такими, что как u, так и $[g,u]$ попадают в собственные параболические подгруппы.

Технически доказательства состоят из двух совершенно различных частей: построения унипотентных элементов требуемого вида и проверки того, что они фактически порождают всю элементарную группу $E(R)$. Первая часть обычно требует только выдумки и везения, а вот вторая часто зависит от достаточно серьезных вычислений.

Кроме того, в более сложных вариантах унипотентные элементы, которые удается построить по самой матрице g, не порождают $E(R)$. В таких случаях приходится пользоваться совершенностью $E(R)$ и варьировать саму матрицу g.

В выборе унипотентных элементов, стабилизирующих столбец, имеется огромная свобода, которая позволяет накладывать на них и их образы дополнительные условия. Однако, *фактически* эта свобода не использовалась и в качестве таких унипотентных элементов всегда выбирались *трансвекции* из унипотентных радикалов *терминальных* параболических подгрупп, отвечающих крайнему корню в диаграмме Дынкина. Как правило, просто из параболической подгруппы P_1 в классических подгруппах типа A_m или D_m.

В первом приближении, основные идеи настоящей работы состоят в следующем.

• Следует варьировать не только подсистему корней, в которой выбирается унипотентный элемент, но и параболическую подгруппу в ней, из унипотентного радикала которой он выбирается. Таким образом, фактически нужно различать (Φ, P)-доказательства. Например, предложенное нами (A_3, P_2)-доказательство [5, 6] – это совершенно не то же самое, что обычное A_3-доказательство [19, 3, 26], или, как мы теперь сказали бы, (A_3, P_1)-доказательство.

• В случае, когда элементарная группа $E(R)$ совершенна (только такие ситуации обычно и рассматриваются в приложениях), можно проводить стабилизацию столбца в несколько шагов. Именно это, в специальном варианте, фактически и происходило в A_2-доказательстве для исключительных групп [4, 5, 8, 30].

• В случае, когда строки и столбцы связаны уравнениями (например, мы находимся внутри классической группы), можно *разделить* действие унипотента u на столбцы матрицы g^{-1} и строки матрицы g. Таким образом, вместо того, чтобы попадать в собственную параболическую подгруппу, можно в качестве первого шага заработать *какие-то* нули в коммутаторе $[g, u]$.

• Можно комбинировать несколько унипотентных элементов, стабилизирующих столбец, с весами, которые выбираются так, чтобы стабилизировать что-то еще. По существу именно так устроены доказательства в терминах миноров, однако в действительности применимость этой идеи гораздо шире. Например, при помощи элементов, которые строятся в таком виде, удается стабилизировать столбцы матриц в спинорном представлении, которое по своей сложности мало отличается от небольших представлений исключительных групп.

Те же идеи применимы в более общих ситуациях, в частности, для унитарных групп и для исключительных групп типа Ли. Однако, их реализация в этих случаях требует *гораздо* более серьезных усилий. Мы планируем посвятить этим результатам предполагаемую вторую часть работы [26].

Забавно, что настоящая работа (как и работы [6, 7]) возникла в процессе обдумывания доказательства Игоря Голубчика [22] стандартности автоморфизмов групп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \geqslant 4$. Доказать при помощи разложения трансвекций стандартность автоморфизмов нам не удалось – и вряд ли удастся. Дело в том, что все версии разложения трансвекций, которые нам удалось построить, предполагают возможность разделения действия на строках и столбцах. Это, конечно, так для стандартных автоморфизмов. Но основным шагом в доказательстве стандартности абстрактных автоморфизмов как раз и является доказательство того, что они переводят трансвекции в трансвекции.

С другой стороны, возникшие при этом варианты метода разложения унипотентов позволят, как нам кажется, решить большое количество задач о расположении подгрупп, сформулированных в работе Алексея Степанова и первого автора [14]. Таким образом, настоящая работа представляет собой один из многочисленных примеров того, когда побочный продукт оказался гораздо занимательней, чем первоначальная цель.

§1. Основные обозначения

Основной ссылкой по теории классических группы над кольцами остается замечательная монография Алекса Хана и Тимоти О'Миры [23]. Впрочем, основные используемые нами обозначения следуют [2, 10, 11, 21, 24, 26]. Сейчас мы совсем коротко напомним абсолютный минимум, необходимый для понимания дальнейшего, отсылая по поводу деталей к цитированным работам.

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R^* – мультипликативная группа кольца R. Для двух натуральных чисел m, n через $M(m, n, R)$ обозначается аддитивная группа $m \times n$-матриц с коэффициентами из R. Через $M(n, R) = M(n, n, R)$ обозначается полное матричное кольцо степени n над R.

Далее, $G = \mathrm{GL}(n, R) = M(n, R)^*$ – обозначает полную линейную группу степени n над R. Матричный элемент матрицы g в позиции (i, j) обозначается через g_{ij}, так что $g = (g_{ij})$. Через g_{*j} обозначается j-й столбец матрицы g, равный (g_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant m$. Точно так же, через g_{i*} обозначается ее i-я строка (g_{ij}), $1 \leqslant j \leqslant n$.

Как обычно, e обозначает единичную матрицу, а e_{ij} – стандартную матричную единицу. Кроме того, нам понадобится перъединичная матрица f, у которой по побочной диагонали идут 1, а все остальные элементы равны 0.

Матрица, обратная к $g \in G$, обозначается через $g^{-1} = (g'_{ij})$. Столбцы и строки обратной матрицы обозначаются через g'_{*j} и g'_{i*}, соответственно. Через g^t обозначается матрица, транспонированная к g. В настоящей работе мы полагаем, для простоты, что R коммутативно, так что $g^t \in \mathrm{GL}(n, R)$. Через $g^{-t} = (g^t)^{-1}$ обозначается контраградиентная к g матрица.

Обозначим через R^n свободный правый R-модуль, состоящий из столбцов высоты n с компонентами из R, а через ${}^nR$ – свободный левый R-модуль, состоящий из строк длины n с компонентами из R. Группа $G = \mathrm{GL}(n, R)$ действует на R^n слева посредством умножением столбца $u \in R^n$ на матрицу $g \in G$, $(g, u) \mapsto gu$. Точно так же, группа G действует на ${}^nR$ справа посредством умножения: $(v, g) \mapsto vg$ для $v \in {}^nR$, $g \in G$.

Как обычно, работая с симплектической группой $\mathrm{Sp}(2l, R)$ или четной ортогональной группой $\mathrm{SO}(2l, R)$, в случае $n = 2l$ мы нумеруем компоненты строк и столбцов, а также строки и столбцы матриц, следуюшим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, 1$.

Модуль ${}^nR$ двойственен к R^n, обычно спаривание между ${}^nR$ и R^n задается умножением строки на столбец

$$ {}^nR \times R^n \longrightarrow R, \quad (v, u) \mapsto vu \in R. $$

Однако, в случае $n = 2l$ мы обычно задаем спаривание следующим

образом
$$^nR \times R^n \longrightarrow R, \quad (v,u) \mapsto vFu \in R,$$
где
$$F = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \lambda f & 0 \end{pmatrix},$$
а λ – симметрия, равная $+1$ в ортогональном случае и -1 в симплектическом.

Матрицы вида $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, а $\xi \in R$, называются *элементарными трансвекциями*. По определению, (абсолютная) элементарная группа $E(n,R)$ порождается всеми элементарными трансвекциями
$$E(n,R) = \big\langle t_{ij}(\xi),\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \xi \in R \big\rangle.$$

Напомним, что вообще трансвекцией называется матрица вида $e + uv$, где $u \in R^n$, $v \in {}^nR$, причем $vu = 0$. Каждая элементарная трансвекция является трансвекцией в этом более общем смысле, но обратное, конечно, неверно.

Роль трансвекций в классических группах играют элементарные симплектические/ортогональные трансвекции $t_{ij}(\xi)t_{-j,-i}(\pm\xi)$, а аналогами общих трансвекций являются трансвекции Эйхлера–Зигеля–Диксона [23, 21, 24].

§2. Исходные варианты стабилизации столбца

Для сравнения с последующим напомним некоторые использовавшиеся ранее варианты разложения унипотентов. См. [26, 28, 32, 5] по поводу деталей и дальнейших ссылок. Начнем с исходной идеи Алексея Степанова [19].

- A_2-доказательство для A_l является (A_2, P_1)-доказательством:
$$\begin{pmatrix} 1 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Поясним, что здесь имеется в виду, что столбец x инвариантен под действием умножения на матрицу u, кроме того, внедиагональные элементы матрицы u можно одновременно умножить на один и тот же скаляр. Таким образом, здесь фактически закодировано равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & \zeta x_3 & -\zeta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем для краткости мы опускаем как ζ, так и правую часть.

Кроме того, в реальных приложениях столбец $x = g'_{*i}$ обычно пробегает столбцы обратимой матрицы $g^{-1} \in \mathrm{GL}(n, R)$. В этом случае $x_3 = g'_{3h}$, $x_2 = g'_{2h}$. Взяв в предыдущей формуле $\zeta = \xi g_{h3}$ мы получим матрицу

$$u_h = \begin{pmatrix} 1 & \xi g_{h3} g'_{3h} & -\xi g_{h3} g'_{2h} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

умножение на которую не меняет h-й столбец матрицы g^{-1}. Таким образом, $[g, u_h]$ попадает в собственную параболическую подгруппу P_1. С другой стороны, $u_1 u_2 u_3 = t_{12}(\xi)$. Ясно, что то же самое вычисление работает для произвольной элементарной трансвекции $t_{ij}(\xi)$ и произвольного $n \geqslant 3$ – так что сомножителей в выражении элементарной трансвекции степени n будет n, а не 3, как в этом вычислении.

В дальнейшем мы опускаем всю вторую часть этого рассуждения, указывая лишь явный вид унипотента в подсистеме *наименьшего ранга*, стабилизирующего столбец g^{-1}, строку g, или какие-то другие части этих матриц. Само доказательство того, что в этих случаях унипотентные элементы рассматриваемого вида порождают всю элементарную группу, обычно значительно сложнее. Более того, это далеко не всегда верно, так что приходится идти на дальнейшие ухищрения.

• *Так называемое* A_3-доказательство для D_l является в действительности (D_3, P_3)-доказательством[1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{-2} & -x_{-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_{-1} & 0 & x_{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_{-1} & -x_{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{-3} \\ x_{-2} \\ x_{-1} \end{pmatrix};$$

[1] Что, заметим, совсем не то же самое, что (A_3, P_1)-доказательство, которое мы обсуждаем в §5.

- C_2-доказательство для C_l является (C_2, P_2)-доказательством:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_{-1}x_{-2} & x_{-2}^2 \\ 0 & 1 & x_{-1}^2 & -x_{-1}x_{-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{-2} \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательства для классических групп замечательны тем, что построенные унипотенты стабилизируют произвольный столбец. Все опубликованные доказательства для исключительных групп используют уравнения на вектор старшего веса. Иными словами, в них происходит стабилизация столбца матрицы $g \in G(\Phi, R)$, а не произвольного столбца из R^n. Вот несколько таких типичных доказательств, детали можно найти в [28, 32, 29, 5]:

- A_5-доказательство для E_6 является (A_5, P_1)-доказательством.
- A_7-доказательство для E_7 является (A_7, P_1)-доказательством.
- D_5-доказательство для E_6 является (D_5, P_1)-доказательством.
- D_6-доказательство для E_7 является (D_6, P_1)-доказательством.
- D_8-доказательство для E_8 является (D_8, P_1)-доказательством.

Как видно, в них всегда используются элементы из унипотентного радикала параболической подгруппы P_1 классической подгруппы типа A_m или D_m максимального возможного ранга. Кроме того, стабилизация столбца в минимальных/присоединенных представлениях означает, что $[g, u]$ попадает в параболическую подгруппу типа P_1 в первом случае, типа P_7 во втором, типа P_2 в третьем, типа P_1 в четвертом и, наконец, типа P_8 в пятом.

§3. Стабилизация столбца в диагональном вложении

В настоящем параграфе мы рассматриваем диагональное вложение

$$\mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(2n, R), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

Фактически образ диагонального вложения лежит в собственных подгруппах $\mathrm{GL}(2n, R)$, например, в $\mathrm{GL}(n, R) \otimes \mathrm{GL}(2, R)$.

В 1987 году Алексей Степанов [19] и первый автор [3] заметили, что с использованием миноров можно одновременно стабилизировать несколько столбцов. Воспроизведем унипотент, стабилизирующий два столбца. Он является трансвекцией в $\mathrm{GL}(4,R)$, лежащей в унипотентном радикале параболической подгруппы P_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_{34} & -z_{24} & z_{23} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Его коэффициенты являются минорами второго порядка матрицы, составленной из этих столбцов,

$$z_{34} = x_3y_4 - x_4y_3, \quad z_{24} = x_2y_4 - x_4y_2, \quad z_{23} = x_2y_3 - x_3y_2.$$

Стабилизация двух столбцов означает, что элемент $[g,u]$ попадает в пересечение двух параболических подгрупп типа P_1.

В этом случае детали вычислений воспроизведены в [26], так как случай миноров второго порядка понадобился для анализа симплектической группы и альтернативного доказательства центральности K_2.

Образы таких элементов в диагональном вложении стабилизируют столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_{34} & -z_{24} & z_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_{34} & -z_{24} & z_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что ровно это соображение и было отправной точкой в работе Алексея Ананьевского, первого автора и Сергея Синчука [1]. Там оно использовано для извлечения трансвекций в описании надгрупп $E(m,R) \otimes E(n,R)$, в случае, когда $n \geqslant m+2$, $m \geqslant 3$. Конечно, там происходила одновременная стабилизация m столбцов.

Формулы для нескольких столбцов в принципе совершенно аналогичны, но используют миноры высших порядков. Однако язык миноров очень быстро приводит к чудовищным обозначениям, и поэтому относящиеся к этому случаю результаты работ [19] и [3] никогда не были опубликованы. Более удачная система обозначений в грассмановых координатах предложена в дипломной работе Елены Перельман [9], но детали вычислений, относящиеся к порождению $\bigwedge^m(E(n,R))$, также не опубликованы. Хотя теперь, в связи с потребностями [1], придется это сделать.

§4. Стабилизация столбца в гиперболическом вложении

В настоящем параграфе мы рассматриваем гиперболическое вложение

$$\mathrm{GL}(n,R)\longrightarrow \mathrm{GL}(2n,R),\quad g\mapsto \begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & fg^{-t}f\end{pmatrix}.$$

Фактически образ диагонального вложения лежит в собственных подгруппах $\mathrm{GL}(2n,R)$, например, в классических подгруппах $\mathrm{Sp}(2n,R)$ и $\mathrm{SO}(2n,R)$.

В 2008 году авторы заметили [6, 7], что вместо того, чтобы стабилизировать два столбца, как в предыдущем параграфе, можно одновременно стабилизировать столбец и строку. Возникающий при этом унипотентный элемент снова является трансвекцией в $\mathrm{GL}(4,R)$, но в отличие от рассмотренного в предыдущем параграфе случая, он лежит в унипотентном радикале параболической подгруппы P_2, а не в унипотентном радикале P_1:

$$(x_{-1},x_{-2},x_{-3},x_{-4})\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{-2}x_4 & -x_{-2}x_3\\ 0 & 1 & -x_{-1}x_4 & x_{-1}x_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $[g,u]$ попадает в параболическую подгруппу $P_1\cap P_{n-1}$. С одной стороны, неясно, почему столь простая модификация метода так долго оставалась незамеченной. С другой стороны, неясно, как можно ее заметить, не имея реальной задачи, для которой необходимо, чтобы образы порождающих трансвекций попадали в субмаксимальную параболическую подгруппу $P_1\cap P_{n-1}$.

Это значит, что образы таких элементов в гиперболическом вложении стабилизируют столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{-2}x_4 & -x_{-2}x_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -x_{-1}x_4 & x_{-1}x_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -x_{-1}x_3 & x_{-2}x_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_{-1}x_4 & -x_{-2}x_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_{-4}\\ x_{-3}\\ x_{-2}\\ x_{-1}\end{pmatrix}.$$

Заметим, что с точки зрения классических групп $\mathrm{Sp}(2n, R)$ или $\mathrm{SO}(2n, R)$ эти унипотентные элементы являются наиболее естественными элементами, трансвекциями Эйхлера–Зигеля–Диксона. В терминах этих элементов – точнее, их обобщений для унитарных групп, которые мы здесь не выписываем, чтобы не вводить необходимые для этого обозначения – легко переписать для унитарной группы $\mathrm{GU}(2n, R, \Lambda)$ доказательства основных структурных теорем из [26].

Как нам кажется, это объясняет давно отмеченное обстоятельство, что при описании надгрупп унитарной группы, ее нормальных подгрупп и в других подобных задачах анализ групп $\mathrm{GU}(2n, R, \Lambda)$, $n \geqslant 4$, *существенно* проще, чем анализ группы $\mathrm{GU}(6, R, \Lambda)$, даже в тех случаях, когда для нее имеет место стандартный ответ. Это отчетливо проявилось, например, в работах Виктора Петрова [25] и Чжанг Дзухонга [34].

Морально объяснение состоит в следующем. По существу большая часть вычислений в этих работах использует только гиперболическое вложение, а о том, что можно пользоваться всеми унипотентами из $U(2n, R, \Lambda)$, приходится вспоминать только на самом последнем этапе, чтобы элиминировать лишние подгруппы. Таким образом, например, фактически в работе Петрова решается проблема 3 из нашей статьи [10] об описании надгрупп $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \geqslant 4$, в $\mathrm{GL}(2n, R)$, в гиперболическом вложении. Ясно, что для $\mathrm{GL}(3, R)$ сделать это такими средствами не удастся.

§5. Стабилизация произведения строки на столбец

Некоторое время мы находились под впечатлением, что двухшаговое A_2-доказательство для исключительных групп в работах [4, 5, 8, 30] основано на той же идее, что двухшаговое A_2-доказательство, предложенное Игорем Голубчиком в 1975 году [15]. Заметим, что в 1980-е годы сам Голубчик и первый автор систематически использовали этот трюк для классических групп.

Однако, узнать об этом *непросто*, так как единственные тексты, где подробно излагается доказательство Голубчика [16, 17], трудно доступны даже в России. Кроме того, все изложение там происходит не для классических групп, а в более общем контексте групп эрмитовых элементов колец с инволюцией. Условие на ранги при этом формулируется как существование трех нетривиальных ортогональных идемпотентов. Ясно, что даже если такой текст был бы опубликован в Annals, все равно мало кто смог бы его прочитать.

С другой стороны, в работах первого автора (см. ссылки в [14]) рассматриваются технически гораздо более сложные задачи о надгруппах subsystem subgroups, и редкий читатель сможет выделить там этот трюк как душу доказательства, среди нескольких десятков технических лемм. Во всяком случае, мы сами осознали отличие A_2-доказательства в работах [4, 5, 8] от первоначального A_2-доказательства Голубчика только после чтения работ Чжанг Дзухонга [33, 34], который заново открыл этот трюк под влиянием [27], см. [20] по поводу детального сравнения различных доказательств.

Сейчас мы изложим основную идею *первоначального* A_2-доказательства. Она состоит в том, что если мы работаем внутри классической группы, то h-й столбец матрицы g^{-1} *полярен* $(-h)$-й строке матрицы g. Таким образом, по отношению к позициям на побочной диагонали мы попадаем в следующую ситуацию:

$$(\lambda x_{-1}, \lambda x_{-2}, \lambda x_{-3}, x_3, x_2, x_1) \begin{pmatrix} 1 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{-3} \\ x_{-2} \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Теперь идея состоит в том, чтобы разбить действие унипотентного элемента на две части, заставив действовать *верхний* блок на столбцах, а *нижний* – на строках. При этом ни сам столбец, ни полярная к нему строка не изменятся.

Если взять здесь в качестве x первый столбец сопрягающей матрицы g, то получающаяся в результате трансвекция Эйхлера–Зигеля–Диксона имеет 0 в позиции $(-1, 1)$. Как известно, в классических группах наличия одного нуля уже достаточно, чтобы – в качестве второго шага – *буквально* повторить обычное A_2-доказательство:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{-3} \\ x_{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом наличие дополнительных элементов в последнем столбце матрицы ничего не меняет, так как они действуют только на последний – нулевой! – элемент столбца.

Для сравнения отметим, что в новом A_2-доказательстве происходит следующее. В нем рассматривается коммутатор $[g, x_\alpha(\xi)]$ с корневым элементов $x_\alpha(\xi)$, в котором сразу оказывается много нулей. Это действительно так для ортогональной группы, поскольку векторное представление микровесовое. Но для симплектической и унитарной групп никаких нулей при этом не появляется. Идея старого A_2-доказательства состояла в том, что такие нули можно заработать тем же приемом, который позволяет, стартуя с элемента с нулями, попасть в собственную параболическую подгруппу.

Что, по-видимому, оставалось незамеченным, это то, что тот же способ действий можно применять одновременно для нескольких столбцов. Снова, если мы работаем внутри классической группы, то столбцы матрицы g^{-1} полярны к строкам матрицы g. Рассмотрев два столбца и соответствующие им строки мы можем провести следующий вариант A_3-доказательства:

$$\begin{pmatrix} \lambda x_{-1} & \lambda x_{-2} & \lambda x_{-3} & \lambda x_{-4} & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ \lambda y_{-1} & \lambda y_{-2} & \lambda y_{-3} & \lambda y_{-4} & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & z_{34} & -z_{24} & z_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -z_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_{-4} & y_{-4} \\ x_{-3} & y_{-3} \\ x_{-2} & y_{-2} \\ x_{-1} & y_{-1} \end{pmatrix},$$

где как и раньше

$$z_{34} = x_3y_4 - x_4y_3, \quad z_{24} = x_2y_4 - x_4y_2, \quad z_{23} = x_2y_3 - x_3y_2.$$

Если взять здесь в качестве x и y два первых столбца сопрягающей матрицы g, то получающаяся в результате трансвекция Эйхлера–Зигеля–Диксона имеет имеет 0 в *четырех* позициях, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(-2,-2)$.

Разумеется, в классических группах такой способ действий не дает ничего нового собственно для доказательства структурных теорем – хотя может понадобиться при описании различных классов подгрупп. С другой стороны, хотелось бы думать, что этот трюк окажется полезным при работе с исключительными группами.

Например, группа Шевалле типа E_7 в минимальном представлении содержится в симплектической группе $\mathrm{Sp}(56, R)$. Вложение $\mathrm{A}_7 \leqslant \mathrm{E}_7$ позволяет провести (A_7, P_1)-доказательство и получить в любой симплектической матрице блок из 6×6 нулей в левом нижнем углу. Вероятно, варьируя параболическую подгруппу, можно добиться еще большего количества нулей. Может быть даже достаточного для того, чтобы сделать второй шаг такого же доказательства и довести до конца описание надгрупп $E(\mathrm{E}_7, R)$ в $\mathrm{Sp}(56, R)$, начатое Александром Лузгаревым в [18].

§6. Одновременная стабилизация строки и столбца

Сейчас мы приведем еще одну вариацию на тему нашей работы [6], а именно, (D_4, P_4)-доказательство, в котором *одновременно* стабилизируются столбец и строка в векторном представлении $\mathrm{SO}(8, R)$. В частности, это позволяет стабилизировать столбец в спинорном представлении B_4 и полуспинорных представлениях D_5.

С учетом предыдущих обозначений следующая запись является self-explanatory:

$$(y_1, y_2, y_3, y_4, y_{-4}, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_3x_{-2} - y_2x_{-3} & y_2x_{-4} - y_4x_{-2} & y_4x_{-3} - y_3x_{-4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_1x_{-3} - y_3x_{-1} & y_4x_{-1} - y_1x_{-4} & 0 & y_3x_{-4} - y_4x_{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_2x_{-1} - y_1x_{-2} & 0 & y_1x_{-4} - y_4x_{-1} & y_4x_{-2} - y_2x_{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_1x_{-2} - y_2x_{-1} & y_3x_{-1} - y_1x_{-3} & y_2x_{-3} - y_3x_{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_{-4} \\ x_{-3} \\ x_{-2} \\ x_{-1} \end{pmatrix}.$$

Этот элемент был построен следующим образом. Мы взяли четыре элемента из (D_3, P_3)-доказательства, стабилизирующие столбец x внутри унипотентного радикала P_4. Этот унипотентный радикал абелев, поэтому произведение этих четырех элементов с произвольными скалярными весами по-прежнему стабилизирует столбец x. Четыре свободных коэффициента оставляют нам достаточную свободу, чтобы стабилизировать строку y, что фактически и делается. Обратите внимание, что уравнения на строку и столбец здесь не используются, так что это вычисление происходит внутри $\mathrm{GL}(8, R)$.

Вернувшись теперь к контексту §4 и вспомнив весовую диаграмму спинорного представления B_4 – или полуспинорных представлений D_5 – мы видим, что фактически нам удалось стабилизировать *произвольный* столбец высоты 16 при помощи унипотентного элемента из $\mathrm{Spin}(8, K)$.

Ясно, что это вычисление непосредственно обобщается на группы больших рангов, что позволяет стабилизировать произвольный столбец матрицы $\mathrm{GL}(2^n, R)$ при помощи унипотентного элемента из $\mathrm{Spin}(2n, R)$, в спинорном представлении $\mathrm{Spin}(2n+1, R)$. Этот факт показался нам достаточно удивительным, так как столбцы матриц из самой группы $\mathrm{Spin}(2n, R)$ удовлетворяют огромному количеству квадратичных уравнений, так что кажется, что стабилизировать при помощи нее произвольный столбец невозможно. Это вычисление является первым шагом к описанию надгрупп $\mathrm{Spin}(2n+1, R)$ и $\mathrm{HS}(2n+2, R)$ в $\mathrm{GL}(2^n, R)$, что априори кажется весьма трудным предприятием.

Ясно, что эта идея в свою очередь допускает огромное количество дальнейших вариаций, в частности, для исключительных групп. Мы надеемся вернуться к этому в последующих публикациях.

В заключение авторы благодарят Алексея Степанова за постоянное сотрудничество и многочисленные обсуждения этой проблематики.

Литература

1. А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *О надгруппах $E(m, R) \otimes E(n, R)$*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 5–28.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Труды Мат. Ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
3. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–334.
4. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2-*доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16** (2004), No. 4, 54–87.
5. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.

6. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Еще одна вариация на тему разложения трансвекций.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1 (2008), No. 3, 71–74.
7. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Разложение трансвекций для автоморфизмов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 47–62.
8. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20** (2008) No. 4, 27–63.
9. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Поливекторное представление* GL_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 69–97.
10. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и Анализ **15** (2003) No. 3, 72–114.
11. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$. — Алгебра и Анализ **19** (2007) No. 2, 10–51.
12. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40** (1990) No. 1, 145–147.
13. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Стандартная коммутационная формула.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1 (2008) No. 1, 9–14.
14. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. (2008) No. 3, 51–95.
15. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией.* — Успехи Мат. наук **30**, No. 6 (1975), 165.
16. И. З. Голубчик, *Нормальные подгруппы линейных и унитарных групп над кольцами.* Канд. дисс., МГУ (1981), 1–117.
17. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях линейных и унитарных групп над ассоциативным кольцом.* — Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей, Уфа (1985), 122–142.
18. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
19. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. дисс. ЛГУ (1987), 1–112.
20. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* II. *Normal subgroups.* — Algebra Colloq. (2010).
21. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7**, No. 2 (2000), 159–196.
22. I. Z. Golubchik, *Isomorphisms of the general linear group* $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 4$, *over an associative ring.* — Contemp. Math. **131** (1992) No. 1, 123–136.
23. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory*, Springer, Berlin et al. (1989).
24. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on* K*-theory of rings* (*with an appendix by Max Karoubi*). — J. K-Theory **4** (2009) No. 1, 1–65.
25. V. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory, **29** (2003), 77–108.
26. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
27. N. Vavilov, *A note on the subnormal structure of general linear groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **107** (1990) No. 2, 193–196.

28. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — In: Proc. Conf. Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., London et al. (1991), 219–335.
29. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), No. 1, 201–250.
30. N. Vavilov, *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7. — Int. J. Algebra Comput. **17** (2007) No. 5–6, 1283–1298.
31. N. Vavilov, A. Luzgarev, A. Stepanov, *Calculations in exceptional groups.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 48–72.
32. N. Vavilov, E. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–115.
33. Zhang, Zuhong, *Lower* K*-theory of unitary groups.* — Doktorarbeit Univ. Belfast (2007), 1–67.
34. Zhang, Zuhong, *Subnormal structure of nonstable unitary groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra 2009, 1–9; doi: 10.1016/j.jpaa.2009.07.007.

Vavilov N. A., Kazakevich V. G., More variations on decomposition of transvections.

The method of decomposition of unipotents consists in writing elementary matrices as products of factors lying in proper parabolic subgroups, whose images under inner automorphisms also fall into proper parabolic subgroups of certain types. For the general linear group this method was first proposed by Stepanov in 1987 to simplify the proof of Suslin's normality theorem. Soon thereafter Vavilov and Plotkin generalised it to other classical groups and Chevalley groups. Subsequently, many further results of that type have been discovered. In the present paper we describe new versions of decomposition of unipotents, which allow to expand its applicability well beyond the present scope. Here we merely illustrate these ideas for split classical groups, in some simplest cases. Detailed calculations are relegated to subsequent publications.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 8 марта 2010 г.