Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

Н. А. Вавилов

ЕЩЕ НЕМНОГО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ НУМЕРОЛОГИИ

Введение

В работе [7] дается явное описание старшей вейлевской орбиты уравнений на орбиту вектора старшего веса в базисном представлении π. Кроме того, там объясняется, как увидеть эти уравнения, – включая знаки! – на весовой диаграмме $\Lambda(\pi)$.

А именно, оказывается (собственно говоря, примерно в этом и состоит для этих случаев теория стандартных мономов [23, 20, 19, 14]), такие уравнения отвечают максимальным квадратам, т.е. максимальным среди подмножеств $\Omega \subseteq \Lambda(\pi)$ со следующими свойствами: $|\Omega| \geqslant 4$ и для любого $\lambda \in \Omega$ разность со всеми весами $\mu \in \Omega$, кроме ровно одного, обозначаемого $\bar{\lambda}$, является корнем, а разность $\lambda - \bar{\lambda}$ не является корнем.

Особый интерес здесь представляют следующие пять исключительных случаев.

• (E_6, ϖ_1): 27 уравнений Бореля–Фрейденталя, определяющих проективную плоскость октав E_6/P_1.

• (E_7, ϖ_7): 126 уравнений Фрейденталя, определяющих многообразие Фрейденталя E_7/P_7.

• (E_6, ϖ_2): 270 уравнений на первый столбец в присоединенном представлении группы Шевалле типа E_6.

• (E_7, ϖ_1): 756 уравнений на первый столбец в присоединенном представлении группы Шевалле типа E_7.

• (E_8, ϖ_8): 2160 уравнений на первый столбец в присоединенном представлении группы Шевалле типа E_8.

Ключевые слова: группы Шевалле, минимальные представления, уравнения на орбиту вектора старшего веса, исключительные системы корней.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами”. Кроме того, на заключительном этапе работа авторов была поддержана проектами РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-91333 и 09-01-90304 .

В первых трех из этих случаев имеются очевидные априорные соответствия максимальных квадратов – и, тем самым, старшей орбиты уравнений на орбиту старшего веса – с более простыми комбинаторными объектами. Перечислим эти соответствия.

• Для веса $\nu \in \Lambda(\varpi_6)$ положим

$$\Omega(\nu) = \{\lambda \in \Lambda(\varpi_1) \mid \nu - \lambda \in \Lambda(\varpi_1)\} = \{\lambda \in \Lambda(\varpi_1) \mid d(\lambda, -\nu) = 2\}.$$

• Для корня $\alpha \in \mathrm{E}_7$ положим

$$\Omega(\alpha) = \{\lambda \in \Lambda(\varpi_7) \mid \lambda - \alpha \in \Lambda(\varpi_7)\}.$$

• Для триады (λ, μ, ν) положим

$$\Omega(\lambda, \mu, \nu) = \{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \lambda) = -1,\ (\alpha, \mu) = 0,\ (\alpha, \nu) = +1\}.$$

В каждом из этих этих случаев построенные множества являются максимальными квадратами и каждый максимальный квадрат возникает ровно один раз. Таким образом, уравнения из старшей орбиты параметризуются, соответственно,

• весами двойственного представления (E_6, ϖ_6);

• корнями E_7;

• мономами трилинейной формы F, определяющей группу типа E_6 в 27-мерном представлении $V(\varpi_1)$.

Однако, наивная попытка построить аналогичные соответствия в двух старших случаях, для (E_7, ϖ_1) и (E_8, ϖ_8), в терминах вложений $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{D}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$, немедленно опровергается тем, что при этом получается 1512 и 4320 уравнений, что вдвое больше их фактического количества.

Интересно разобраться с тем, что при этом в действительности происходит? Посчитаны ли здесь одни и те же уравнения два раза, или же, наоборот, только половина уравнений, возникающих в представлениях (A_7, ϖ_4) и (D_8, ϖ_6) для всевозможных подсистем $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{D}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$, фактически достраивается до уравнений в (E_7, ϖ_1) и (E_8, ϖ_8)?

После обнаружения указанного несоответствия в §6 работы [7] высказывается намек на два возможных объяснения. Во-первых, это рассмотрение не всех вложений $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{D}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$, а только тех из них, которые согласованы с фиксированными вложениями $2\,\mathrm{A}_3 \subseteq \mathrm{E}_7$ и $2\,\mathrm{D}_4 \subseteq \mathrm{E}_8$. Во-вторых, это равенство $756 = 27 \cdot 28$.

Действительно, оба эти подхода приводят к явной параметризации уравнений, при этом выясняется, что каждый максимальный квадрат в (E_7, ϖ_1) возникает из максимальных квадратов в двух различных копиях A_7 и, by the same token, каждый максимальный квадрат в (D_8, ϖ_6) возникает из максимальных квадратов в двух различных копиях D_8.

Трудно представить себе ситуацию, когда при вычислении в группе Шевалле придется фактически использовать возникающие при этом исключительные симметрии. В то же время, сами эти симметрии настолько завораживающие, что (даже понимая, что это просто упражнение на терпение в духе *судоку*) невозможно удержаться от того, чтобы восстановить все детали этих соответствий, что и проделано в настоящей работе.

Чтобы не увеличивать объем статьи, мы предполагаем, что читатель имеет перед глазами следующие диаграммы и таблицы (либо, что маловероятно, помнит их, либо, что уже совсем невероятно, готов в реальном времени восстановить необходимые фрагменты этих таблиц!)

• Таблицы корней и весов, порядки групп Вейля $W = W(\mathrm{E}_l)$ из [4, 5].

• Весовые диаграммы микровесовых и присоединенных представлений E_6, E_7 и E_8, см. [22, 24, 6].

• Реализация систем корней E_l в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{l,1}$, см. [13, 18, 25, 9, 10, 7]. Используемые здесь обозначения корней совпадают с [9, 10, 7].

• Описание подсистем корней в системах E_l с точностью до сопряженности и их нормализаторы в группах Вейля, см. ссылки и таблицы в [11, 15, 18].

§1. Квадраты в $(\mathrm{E}_7, \mathrm{ad})$

Сейчас мы построим соответствие максимальных квадратов в $(\mathrm{E}_7, \mathrm{ad})$ с одним из классов мономов инвариантной формы степени 4 в 56-мерном представлении группы Шевалле типа E_7. Как отмечалось во введении, это соответствие связано с равенством $756 = 27 \cdot 28 = 27 \cdot 56/2$. Количество весов на расстоянии 2 от каждого из 56 весов представления $V(\varpi_7)$ группы Шевалле типа E_7 равно 27. Таким образом, 756 представляет собой *половину* от числа всех пар весов (λ, μ) на расстоянии 2. Следующая теорема уточняет, как именно выглядит соответствие.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \mathrm{E}_7$. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \Lambda(\varpi_7)$ таких, что $d(\lambda, \mu) = 2$, множество*

$$\Omega(\lambda, \mu) = \big\{\alpha \in \Phi \mid (\alpha, \lambda) = 1, (\alpha, \mu) = -1\big\}$$

является максимальным квадратом в $(\mathrm{E}_7, \mathrm{ad})$. При этом

- *Равенство $\Omega(\lambda_1, \mu_1) = \Omega(\lambda_2, \mu_2)$ имеет место в том и только том случае, когда $(\lambda_2, \mu_2) = (\lambda_1, \mu_1)$ или $(\lambda_2, \mu_2) = (-\mu_1, -\lambda_1)$.*
- *Если $(\lambda, \mu, \nu, \theta)$ – какое-то дополнение (λ, μ) до тетрады, то для любого $\alpha \in \Omega(\lambda, \mu)$ имеет место равенство $(\alpha, \nu) + (\alpha, \theta) = 0$.*

Доказательство. Реализуем (E_7, ϖ_7) в унипотентном радикале параболической подгруппы P_8 в E_8. При этом $\Lambda(\varpi_7)$ можно отождествить с корнями $\alpha = \sum m_i \alpha_i \in \mathrm{E}_8$ такими, что $m_8 = 1$. Так как группа $W(\mathrm{E}_7)$ транзитивно действует на множестве пар весов из $\Lambda(\varpi_7)$ на расстоянии 2, то можно не теряя общности считать, что

$$\lambda = \zeta_7 = \begin{smallmatrix}2465431\\3\end{smallmatrix}, \quad \mu = \beta_{68} = \begin{smallmatrix}0000011\\0\end{smallmatrix}.$$

Имеется ровно 27 корней $\alpha \in \mathrm{E}_7$ таких, что $(\alpha, \lambda) = +1$. В самом деле, в E_8 имеем $\mathrm{A}_1^{\perp} = \mathrm{E}_7$ и, если $\lambda \neq \delta$, $\gamma \in \mathrm{E}_7$, то $\langle \lambda, \delta \rangle$ имеет тип A_2. Но $\mathrm{A}_2^{\perp} = \mathrm{E}_6$, так что подсистема корней в E_7, ортогональных к γ, имеет тип E_6. Для оставщихся корней в E_7 имеем $(\alpha, \lambda) = \pm 1$, причем, очевидно, ровно для половины из них знак равен $+1$. Осталось заметить, что $126 = 27 + 72 + 27$.

Как показывает непосредственное вычисление, для $\lambda = \zeta_7$ в качестве этих корней можно выбрать 6 корней вида β_{7i}, $1 \leqslant i \leqslant 6$; 15 корней вида γ_{ij7}, $1 \leqslant i < j \leqslant 6$; и 6 корней вида η_{i8}, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Легко видеть, что из этих корней ровно один, а именно β_{76}, имеет произведение $+1$ с $\mu = \beta_{86}$. Далее, 16 корней, а именно, β_{7i}, $1 \leqslant i \leqslant 5$, γ_{ij7}, $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, и η_{68}, ортогональны к μ. Наконец, оставшиеся 10 корней, а именно, корни η_{i8}, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и γ_{i67}, $1 \leqslant i \leqslant 5$, имеют произведение -1 с μ. Но это, как раз, и суть корни, образующие старший квадрат.

Так как $W(\mathrm{E}_7)$ действует транзитивно как на парах весов, так и на максимальных квадратах, причем $\Omega(w\lambda, w\mu) = w\Omega(\lambda,\mu)$, мы получаем сюръективный морфизм $W(\mathrm{E}_7)$-множеств. Из определения ясно, что $\Omega(\lambda,\mu) = \Omega(-\mu,-\lambda)$. Сравнение порядков показывает, что во всех остальных случаях $\Omega(\lambda_1,\mu_1)$ и $\Omega(\lambda_2,\mu_2)$ различны.

В качестве дополнения пары (λ,μ) до тетрады можно взять

$$\nu = \eta_{17} = \begin{matrix}2343211\\2\end{matrix}, \quad \theta = \gamma_{168} = \begin{matrix}0122211\\1\end{matrix}.$$

Легко видеть, что $(\eta_{18},\nu) = +1$, $(\eta_{18},\theta) = -1$, а $(\gamma_{167},\nu) = -1$, $(\gamma_{167},\theta) = +1$. С другой стороны, для всех остальных корней $\alpha = \eta_{i8}$ и $\alpha = \gamma_{i67}$, где $i = 2,3,4,5$ имеем $(\alpha,\nu) = (\alpha,\theta) = 0$.

§2. Вложения $2\,\mathrm{A}_3 \subseteq \mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$

В настоящем параграфе мы объясним причину возникновения дополнительного множителя 2 при попытке построить максимальные квадраты в $(\mathrm{E}_7,\mathrm{ad})$ в терминах подсистем $\mathrm{A}_7 \subseteq \mathrm{E}_7$.

Теорема 2. *Для каждого разбиения максимального квадрата* Ω *в* $(\mathrm{E}_7,\mathrm{ad})$ *на квадраты* Σ *и* Θ *порядков* 4 *и* 6 *существуют ровно две подсистемы* $\Delta \subseteq \mathrm{E}_7$ *типа* A_7 *таких, что* Σ *и* Θ *являются максимальными квадратами в* $(\mathrm{A}_7,\mathrm{ad})$ *и* (A_7,ϖ_4).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $|W(\mathrm{E}_7)/W(\mathrm{A}_7)| = 2^3\cdot 3^2 = 72$. Обозначим через $X(\mathrm{A}_7)$ нормализатор $W(\mathrm{A}_7)$ в $W(\mathrm{E}_7)$. Хорошо известно (см., например, таблицы в [11, 15] или [18]), что $|X(\mathrm{A}_7) : W(\mathrm{A}_7)| = 2$. Таким образом, число различных подсистем типа A_7 в E_7 равно $|W(\mathrm{E}_7)/X(\mathrm{A}_7)| = 72/2 = 36$.

Очевидно, ограничение присоединенного представления группы Шевалле типа E_7 на подгруппу типа A_7 раскладывается в прямую сумму присоединенного представления $(\mathrm{A}_7,\mathrm{ad})$ размерности 63 и поливекторного представления (A_7,ϖ_4) размерности 70: $133 = 63 + 70$.

С другой стороны, как установлено в [7], количество максимальных квадратов в данной копии $(\mathrm{A}_7,\mathrm{ad})$ равно $6C_8^4 = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 420$. Таким образом, общее количество максимальных квадратов в $(\mathrm{E}_7,\mathrm{ad})$ *делит* $36\cdot 420 = 15\cdot 120$, и остается только вычислить, сколько раз при этом будет посчитан каждый квадрат.

Так как группа Вейля $W(\mathrm{E}_7)$ транзитивно действует на максимальных квадратах, мы можем с самого начала предполагать, что Ω – *старший* квадрат. Ясно, что двум различным разбиениям Ω на квадраты порядков 4 и 6 отвечают различные подсистемы типа A_7, а число таких разбиений равно $C_5^2 = 10$.

Опять, в силу транзитивности группы Вейля, мы можем фиксировать такое разбиение, скажем, разбиение вида $\Omega = \Sigma \sqcup (\Omega \setminus \Sigma)$, где

$$\Sigma = \{\delta = \eta_{18}, \eta_{28}, \gamma_{267}, \gamma_{167}\}.$$

Таким образом, подсистема Δ типа A_7, содержащая Σ, обязана содержать подсистему

$$\Gamma_1 = \langle \delta = \eta_{18}, \alpha_1 = \eta_{18} - \eta_{28}, \gamma_{167} \rangle$$

типа A_3.

С другой стороны, Δ обязана содержать все являющиеся корнями попарные разности весов из $\Omega \setminus \Sigma$. В частности, она содержит подсистему $\Gamma_2 = \langle \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 \rangle$, также имеющую тип A_3 и, очевидно, ортогональную подсистеме Γ_1. Кроме того, Δ не может содержать корень α_3, так как иначе Δ содержало бы весь квадрат Ω, что, как мы знаем, невозможно.

Значит, нам остается лишь описать все подсистемы типа A_7 в E_7, содержащие фиксированную подсистему типа $2\,\mathrm{A}_3$. Так как $|\,\mathrm{E}_7 \setminus 2\,\mathrm{A}_3\,| = 102$, а $(2\,\mathrm{A}_3)^{\perp} = \mathrm{A}_1$, то число корней, неортогональных к $2\,\mathrm{A}_3$, равно 100.

С другой стороны, запрещенный корень α_3 порождает вместе с $\Gamma_1 + \Gamma_2 \cong 2\,\mathrm{A}_3$ систему типа D_6, в которой $2\,\mathrm{A}_3$ максимальна как замкнутое множество корней и $|\,\mathrm{D}_6 \setminus 2\,\mathrm{A}_3\,| = 36$, что запрещает 36 корней из 100 и оставляет нам $100 - 36 = 64$ корней.

Наконец, $|\,\mathrm{A}_7 \setminus 2\,\mathrm{A}_3\,| = 32$, причем $2\,\mathrm{A}_3$ максимальна в A_7 как подсистема. Это значит, что любой из оставшихся 64 корней порождает вместе с $2\,\mathrm{A}_3$ подсистему типа A_7. Окончательно, мы видим, что в E_7 имеется ровно 2 различные подсистемы типа A_7, содержащие фиксированную подсистему типа $2\,\mathrm{A}_3$.

Суммируя сказанное выше, мы видим, что каждый максимальный квадрат в $(\mathrm{E}_7, \mathrm{ad})$ представляется как объединение квадратов в $(\mathrm{A}_7, \mathrm{ad})$ и (A_7, ϖ_4) ровно $2 \cdot 10$ различными образами. Это значит, что общее число максимальных квадратов действительно равно $36 \cdot 420/20 = 756$.

§3. Вложения $2\,\mathrm{D}_4 \subseteq \mathrm{D}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$

В настоящем параграфе мы объясним причину возникновения дополнительного множителя 2 при попытке построить максимальные квадраты в $(\mathrm{E}_8, \mathrm{ad})$ в терминах подсистем $\mathrm{D}_8 \subseteq \mathrm{E}_8$.

Теорема 3. *Для каждого разбиения максимального квадрата* Ω *в* $(\mathrm{E}_8, \mathrm{ad})$ *на квадраты* Σ *и* Θ *порядков* 6 *и* 8 *существует ровно две подсистемы* $\Delta \subseteq \mathrm{E}_8$ *типа* D_8 *таких, что* Σ *и* Θ *являются максимальными квадратами в* $(\mathrm{D}_8, \mathrm{ad})$ *и* (D_8, ϖ_6).

Доказательство. Анализ этого случая совершенно аналогичен проведенному в предыдущем параграфе. Прежде всего, заметим, что $|W(\mathrm{E}_8)/W(\mathrm{D}_8)| = 3^3 \cdot 5 = 135$, причем так как этот индекс не делится на 2, то $W(\mathrm{D}_8)$ совпадает со своим нормализатором в $W(\mathrm{E}_8)$ (см., например, [11, 15, 18]). Таким образом, число различных подсистем типа D_8 в E_8 равно 135.

Очевидно, ограничение присоединенного представления $(\mathrm{E}_8, \mathrm{ad})$ на D_8 раскладывается в прямую сумму присоединенного представления $(\mathrm{D}_8, \mathrm{ad})$ размерности 120 и полуспинорного представления (D_8, ϖ_7) размерности 128: $248 = 120 + 128$.

С другой стороны, как мы знаем из [7], число максимальных квадратов в данной копии $(\mathrm{D}_8, \mathrm{ad})$ равно $2^4 \cdot C_8^4 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 = 1120$. Таким образом, общее число максимальных квадратов в $(\mathrm{E}_8, \mathrm{ad})$ *делит* $135 \cdot 1120$, и нам остается только вычислить, сколько раз при этом будет посчитан каждый квадрат.

Снова без потери общности мы можем считать, что Ω – старший квадрат. При этом двум различным разбиениям Ω на квадраты порядков 6 и 8 отвечают различные подсистемы типа D_8, а число таких разбиений равно $C_7^3 = 35$. В силу транзитивности группы Вейля мы можем считать, что $\Omega = \Sigma \sqcup (\Omega \setminus \Sigma)$, где

$$\Sigma = \{\delta = \zeta_8, \zeta_7, \zeta_6, \eta_{16}, \eta_{17}, \eta_{18}\}.$$

Таким образом, подсистема Δ типа D_8, содержащая Σ, обязана содержать подсистему

$$\Gamma_1 = \langle \delta, \alpha_8 = \delta - \zeta_7, \alpha_7 = \zeta_7 - \zeta_6, \eta_{18} \rangle$$

типа D_4.

С другой стороны, Δ обязана содержать все являющиеся корнями попарные разности весов из $\Omega \setminus \Sigma$. В частности, она содержит подсистему $\Gamma_2 = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle$, также имеющую тип D_4 и, очевидно, ортогональную подсистеме Γ_1. Кроме того, Δ не может содержать корень α_6, так как иначе Δ содержало бы весь квадрат Ω, что, как мы знаем, невозможно.

Значит, нам остается лишь описать все подсистемы типа D_8 в E_8, содержащие фиксированную подсистему типа $2\,\mathrm{D}_4$ и отличные от некоторого фиксированного экземпляра D_8 – ясно, что $\Gamma_1+\Gamma_2$ порождает вместе с α_6 подсистему типа D_8.

Ясно, что $|\,\mathrm{E}_8\setminus 2\,\mathrm{D}_4\,| = 192$, а корней ортогональных к $2\,\mathrm{D}_4$ в E_8 нет. С другой стороны, $|\,\mathrm{D}_8\setminus 2\,\mathrm{D}_4\,| = 64$, причем $2\,\mathrm{D}_4$ максимальна в D_8 как подсистема, так что любой корень из D_8 порождает вместе с $2\,\mathrm{D}_4$ всю исходную систему типа D_8.

Поэтому запрещение одной копии D_8 оставляет нам $192-64=128$ корней. Это значит, что любой из оставшихся 128 корней порождает вместе с $2\,\mathrm{D}_4$ подсистему типа D_8. Окончательно, мы видим, что в E_8 имеется ровно 2 различные подсистемы типа D_8, содержащие фиксированную подсистему типа $2\,\mathrm{D}_4$.

Суммируя сказанное выше, мы видим, что каждый максимальный квадрат в $(\mathrm{E}_8,\mathrm{ad})$ представляется как объединение квадратов в $(\mathrm{D}_8,\mathrm{ad})$ и (D_8,ϖ_7) ровно $2\cdot 35$ различными образами. Это значит, что общее число максимальных квадратов действительно равно $135\cdot 1120/70 = 2160$.

§4. Заключительные замечания

Заметим, что после публикации работы [7] произошли дальнейшие продвижения.

• С одной стороны, Александр Лузгарев [12] смог в таком же духе проанализировать вообще все уравнения на орбиту вектора старшего веса в присоединенном представлении.

• С другой стороны, Виктор Петров заметил, что связь с базисами Гребнера, отмеченная в микровесовом случае в [16], имеет место вообще для всех флаговых многообразий G/P, см. также [17]. В наиболее интересных случаях это замечание доведено до явных ответов в нашей работе [21].

Напомним, что с использованием явных уравнений в работе [8] вычислен нормализатор элементарной группы Шевалле $E(\mathrm{E}_6,R)$ в микровесовом представлении в группе $\mathrm{GL}(27,R)$, для произвольного коммутативного кольца R. С учетом только что процитированных работ теперь такое же вычисление нормализатора можно произвести и в присоединенных представлениях.

В недавних работах Елены Буниной [2], [3] доказана стандартность описания автоморфизмов групп Шевалле типов E_6, E_7 и E_8

над локальным кольцом с обратимой 2. Однако, стандартность в этих работах понимается несколько более широко, чем обычно. А именно, в качестве внутренних автоморфизмов там рассматриваются сопряжения в $\mathrm{GL}(78, R)$, $\mathrm{GL}(133, R)$ или $\mathrm{GL}(248, R)$, соответственно. По-видимому, ценой некоторых дополнительных технических усилий условие обратимости 2 здесь можно убрать.

Как нам кажется, совмещая эти результы Буниной с упомянутым выше вычислением нормализатора групп Шевалле в присоединенных представлениях, можно получить правильное доказательство стандартности (в обычном смысле!) автоморфизмов групп Шевалле над произвольным коммутативным кольцом R. В доказательстве в работе Абе [1] предполагается нетеровость, кроме того, оно содержит трудно поддающуюся исправлению ошибку.

Литература

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами.* — Алгебра и Анализ **5** (1993) No. 2, 74–90.
2. Е. И. Бунина, *Автоморфизмы групп Шевалле типов* A_l, D_l *и* E_l *над локальными кольцами с* $1/2$. — Фундам. Прикл. Мат. **15** (2007), No. 2, 35–59.
3. Е. И. Бунина, *Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов* A_l, D_l *и* E_l *над локальными кольцами с* $1/2$. — Алгебра и Логика **48** (2009), No. 4, 443–470.
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, М. (1972), 1–334.
5. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. VII, VIII, Мир, М. (1978), 1–342.
6. Н. А. Вавилов *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и Анализ **19** (2007), No. 4, 34–68.
7. Н. А. Вавилов *Нумерология квадратных уравнений.* — Алгебра и Анализ **20** (2008), No. 5, 9–40.
8. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 5, 35–62.
9. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
10. Н. А. Вавилов, Н. П. Харчев, *Орбиты стабилизатора подсистем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 98–124.
11. Р. Картер, *Классы сопряженных элементов в группе Вейля.* — Семинар по алгебраическим группам. Мир, М. (1973), 288–306.
12. А. Ю. Лузгарев, *Уравнения, определяющие орбиту старшего веса в присоединенном представлении.* — (2010) (to appear).
13. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* Наука, М. (1972).
14. M. Brion, V. Lakshmibai, *A geometric approach to standard monomial theory.* — J. Representation Theory **7** (2003), 651–680.
15. R. W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl group.* — Compositio Math. **25** (1972), No. 1, 1–59.

16. A. M. Cohen, R. H. Cushman, *Gröbner bases and standard monomial theory.* — in: Computational Algebraic Geometry. Boston et al.: Birkhäuser. (1993), pp. 41–60.
17. N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Gröbner bases and standard monomial bases* (2001), 1–8.
18. A. Harebov, N. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus.* — Comm. Algebra **24** (1996), No. 1, 109–133.
19. V. Lakshmibai, P. Littelmann, P. Magyar, *Standard monomial theory and applications.* — In: Representation Theory and Geometry, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht et al. (1998), pp. 319–364.
20. V. Lakshmibai, C. S. Seshadri, *Standard monomial theory.* — In: Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Madras, Manoj Prakashan (1991), pp. 279–323.
21. A. Luzgarev, V. Petrov, N. Vavilov, *Explicit equations on orbit of the highest weight vector.* (2010) (to appear).
22. E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Internat. J. Algebra and Comput. **8** (1998), No. 1, 61–95.
23. C. S. Seshadri, *Geometry of G/P. I. Standard monomial theory for minuscule P.* — C. P. Ramanujam: a tribute, Bombay: Tata Press (1978), 207–239.
24. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), No. 1, 201–250.
25. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type* E_l. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.

Vavilov N. A. Some more exceptional numerology.

In the present paper, we supply some additional details concerning parametrisation of the senior Weyl orbit of equations on the highest weight orbit in the adjoint representations of Chevalley groups of types E_7 and E_8, as given in my paper "Numerology of square equations."

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 9 марта 2010 г.