Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 375, 2010 г.

А. В. Александров, Н. А. Вавилов

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ SL_n И Sp_{2l} НАД ДЕДЕКИНДОВЫМ КОЛЬЦОМ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей работе мы даем описание подгрупп в классических группах Шевалле $G = G(\Phi, R)$, $\Phi = \mathrm{A}_l, \mathrm{C}_l$, над дедекиндовым кольцом арифметического типа R, содержащих борелевскую подгруппу $B = B(\Phi, R)$. Основным новым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное кольцо, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица бесконечного порядка. Пусть, далее, $G = \mathrm{SL}(n, R)$, $n \geqslant 3$, или $G = \mathrm{Sp}(2l, R)$, $l \geqslant 2$. Тогда для любой подгруппы P в G, содержащей B, имеет место следующая альтернатива:*

- *либо P содержит относительную элементарную подгруппу E_I для идеала $I \neq 0$,*
- *либо P содержится в собственной параболической подгруппе.*

Основная идея в доказательстве этой теоремы восходит к решению конгруэнц-проблемы для SL_2 в работе Жана-Пьера Серра [20]. Эта идея уже применялась к описанию подгрупп полной линейной группы в [7] и [13].

Эта теорема сводит описание рассматриваемого класса подгрупп к подгруппам конечного индекса и к подгруппам в группах меньшего ранга. Теперь при некоторых дополнительных предположениях

Ключевые слова: специальная линейная группа, симплектическая группа, трансвекции, параболические подгруппы, дедекиндово кольцо арифметического типа.

Второй автор осуществлял работу над данной статьей в рамках проекта РФФИ/НАН Вьетнама 09-01-90304 “Структурная теория классических и алгебраических групп”. Кроме того, на заключительном этапе его работа была поддержана проектами РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-00878 и 09-01-91333 .

на единицы кольца R результаты работ [25, 26, 9, 11], позволяют дать полное описание всех подгрупп в G, содержащих B.

Настоящая статья основана на дипломной работе первого автора, выполненной под руководством второго автора.

§1. State of art: нульмерные кольца

В случае, когда $R = K$ – поле, содержащие $B = B(\Phi, K)$ подгруппы в $G = G(\Phi, K)$ называются параболическими. Их описание было получено в классической работе Жака Титса [27], см. также [5]. Замечательной особенностью теоремы Титса является отсутствие в ней исключений: она справедлива даже для поля $K = \mathbb{F}_2$ из двух элементов. Именно это обстоятельство сделало этот результат одним из важнейших инструментов всей классической структурной теории алгебраических групп над полями.

С точки зрения рассматриваемых далее обобщений, эту теорему естественнее всего сформулировать следующим образом: для любой содержащей B подгруппы P имеет место равенство

$$P = T\langle X_\alpha, X_\alpha \leqslant P\rangle.$$

В частности, все они оказываются связными алгебраическими подгруппами. Используемые здесь обозначения стандартны в теории алгебраических групп, для удобства читателя они напоминаются в §3.

В работах Николая Романовского [19] и Зенона Боревича [2, 3] описаны подгруппы полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$, содержащие группу $B = B(n, R)$ верхних треугольных матриц, над почти произвольным локальным или, более общо, полулокальным кольцом R. При этом, однако, приходится накладывать на группу R^* единиц кольца R незначительные предположения, исключающие, в частности, наличие у R поля вычетов $\mathbb{F}_2$.

Заметим, что в цитированных работах (и в продолжающих их ранних работах) надгруппы B в G также назывались параболическими. В настоящей статье мы возвращаемся к обычной практике теории алгебраических групп и называем параболическими подгруппами группы точек *алгебраических* подгрупп.

В этих работах аналогичные результаты получены также для случая специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n, R)$. Кроме того, Боревич построил примеры, показывающие, что без дополнительных предположений на единицы сформулированное ниже стандартное описание параболических подгрупп не имеет, вообще говоря, места.

В то время как работа Титса опиралась на доказанное Шевалле разложение Брюа, Боревич развил другой подход, основанный на использовании разложения Гаусса. Тем самым, фактически результаты этих работ применимы не только к полулокальным кольцам, но и, более общо, к кольцам стабильного ранга 1.

В дальнейшем в работе Елизаветы Дыбковой [18] этот подход был перенесен на случай симплектической группы $\mathrm{Sp}(2l, R)$, а в работах Кадзуо Судзуки и второго автора [25, 26, 9] – на все группы Шевалле над полулокальным кольцом R, в том числе и скрученных типов [10].

Основной результат этих работ можно сформулировать следующим образом. При некоторых дополнительных предположениях на единицы кольца R для каждой подгруппы P, $B \leqslant P \leqslant G$, имеет место равенство

$$P = T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle.$$

Таким образом, единственное существенное отличие полулокального случая от случая поля состоит в том, что теперь, конечно, параболическая подгруппа не обязана содержать *всю* корневую подгруппу X_α, если она содержит какой-то нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$.

К этим работам тесно примыкает также статья Кристиана Венцеля [30], в которой описываются параболические *подсхемы* в случае поля K положительной характеристики. Заметим, что описание таких подсхем естественным образом связано с описанием промежуточных *подгрупп* в локальных алгебрах над полем K.

Однако, как было показано в работе [11], верно и обратное: наличие в группе Шевалле $G = G(\Phi, R)$ разложения Гаусса влечет то, что ранг кольца R равен 1. Тем самым, методы цитированных выше работ *не обобщаются* за пределы нульмерных колец.

§2. State of art: общий случай

В действительности, как было замечено уже в [6], даже сформулированный выше стандартный ответ не обобщается буквально, по крайней мере в классе *всех* содержащих B подгрупп. А именно, в случае общих колец содержащих B подгруппы P не могут исчерпываться подгруппами, порожденными T и корневыми подгруппами. Максимум того, на что можно надеяться, это то, что P *нормализует* подгруппу $T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle$, иными словами,

$$T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle \leqslant P \leqslant N_G(T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle).$$

Однако даже в такой форме стандартное описание может иметь место только для некоторых весьма специальных случаев, а именно,

• либо для достаточно больших содержащих B подгрупп,

• либо для каких-то замечательных колец, арифметику которых мы полностью понимаем.

Отметим два результата в первом из этих направлений.

С одной стороны, в [6, 7, 11] описаны содержащие B подгруппы групп Шевалле, содержащие, кроме того, *большую группу элементарных матриц*. А именно, там дополнительно предполагалось, что H содержит подгруппу $E_I = E(\Phi, R, I)$, где $I \trianglelefteq R$ – такой идеал, что кольцо R/I полулокально. Описание таких подгрупп легко сводится к полулокальному случаю.

В случае дедекиндовых колец арифметического типа из положительного (и даже из почти положительного) решения конгруэнц-проблемы вытекает, что подгруппы, содержащие большую группу элементарных матриц – это в точности подгруппы конечного индекса в $G(\Phi, R)$. Таким образом, с учетом результатов Басса–Милнора–Серра, Серра и Мацумото [1, 20, 22] из результатов этих работ можно вывести описание подгрупп конечного индекса в $G(\Phi, R)$, содержащих $B(\Phi, R)$. Заметим, впрочем, что за исключением случаев GL_n и SL_n детальные доказательства этих результатов никогда не публиковались.

С другой стороны, второй автор и Игорь Голубчик [8, 17] описали подгруппы полной линейной группы, содержащие не просто борелевскую подгруппу, а не слишком маленькую параболическую подгруппу. В группе $\mathrm{GL}(n, R)$ параболические подгруппы выглядят как группы клеточно треугольных матриц, а наложенное в цитированных работах условие состоит в том, что все диагональные блоки имеют размер $\geqslant \mathrm{sr}(R)$, либо $\geqslant 2$ в случае коммутативного кольца.

Что касается второго направления, в [7] получена полная классификация содержащих $B(n, R)$ подгрупп P в полной и специальной линейной группах над дедекиндовым кольцом R арифметического типа, содержащим единицу бесконечного порядка. *Центральным* новым моментом этой классификации, по модулю предшествующих результатов, является доказательство следующей альтернативы

• либо P содержит большую группу элементарных матриц,

• либо P содержится в собственной параболической подгруппе.

Этот результат утверждает, что каждая содержащая $B(n, R)$ подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$ либо настолько велика, чтобы ее описание охватывалось – по модулю почти положительного решения конгруэнц-проблемы! – результатами, относящимися к полулокальному случаю, либо настолько мала, чтобы ее описание сводилось к группам меньшего ранга.

Так как все фигурирующие здесь понятия и все вспомогательные утверждения имеют смысл для групп Шевалле всех типов, естественно пытаться получить аналогичные результаты и для других групп. Однако после публикации работы [7], относящейся к группам типа A_l, эта альтернатива не была перенесена ни на одну дальнейшую группу. Более того, не было видно даже никаких идей, которые позволили бы доказать этот результат для исключительных групп.

В работе Алексея Степанова и второго автора [24], Вариация 11, отмечено, что возможно в настоящее время мы имеем технику – разложение унипотентов – которая позволит доказать этот результат для групп всех типов. Хотя, конечно, в нашем случае требуемое разложение должно строиться в терминах как унипотентных, так и полупростых элементов!

§3. Формулировка основного результата

В связи с этим нами была предпринята попытка обобщить рассматриваемую альтернативу на другие группы Шевалле, начиная с наиболее простых классических случаев. При этом в [7] было приведено детальное доказательство этой альтернативы для $\mathrm{GL}(n, R)$ и утверждалось, что доказательство для $\mathrm{SL}(n, R)$ аналогично. В настоящей работе мы воспроизводим детальное доказательство для этого случая и получаем аналогичный результат для симплектической группы.

Пусть K – глобальное поле, т.е. либо конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$, либо поле алгебраических функций от одной переменной над конечным полем констант, и пусть S – конечное множество (неэквивалентных) нормирований поля K, непустое в функциональном случае и содержащее все архимедовы нормирования в числовом случае. Для неархимедова нормирования $\mathfrak{p}$ поля K обозначим через $v_{\mathfrak{p}}$ соответствующий показатель. Как обычно, $R = R_S$ обозначает кольцо, состоящее из всех тех $x \in K$, для которых $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ для всех нормирований $\mathfrak{p}$ поля K, не принадлежащих S. Кольцо R называется дедекиндовым кольцом арифметического типа, определенным множеством нормирований S поля K, или областью Хассе, см., например, [1]. Мы будем интересоваться случаем, когда $|S| \geqslant 2$, т.е. когда в R есть *единица бесконечного порядка*.

При этом мы будем накладывать на кольцо R следующие технические предположения (заметим, что без этих предположений заключение теоремы не имеет места!):

• $R = \mathbb{Z}[R^*]$ в линейном случае и $R = \mathbb{Z}[R^{*2}]$ в симплектическом.

• Идеал в R, порожденный $\varepsilon - 1$, $\varepsilon \in R^*$ в линейном случае и $\varepsilon^2 - 1$, где $\varepsilon \in R^*$, в симплектическом случае, совпадает с R.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать описание параболических подгрупп специальной линейной и симплектической групп над дедекиндовым кольцом арифметического типа. Детальное обсуждение того, как этот результат вытекает из теоремы 1, можно найти в работах второго автора [7] и [11].

Теорема 2. *Пусть $R = R_S$ – дедекиндово кольцо арифметического типа, причем $|S| \geqslant 2$, удовлетворяющее сформулированным выше условиям. Тогда для любой подгруппы P в $G = \mathrm{SL}(n, R)$ или $G = \mathrm{Sp}(2l, R)$, содержащей борелевскую подгруппу B, имеем*

$$T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle \trianglelefteq P.$$

В обозначениях работ [25, 26, 9–11] группа $T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle$ представляет собой $G_0(\sigma)$ для некоторой сети (в линейном случае) или квазисети (в симплектическом случае) идеалов σ. Если предполагать дополнительно, что $2 \in R^*$, то σ будет сетью и в симплектическом случае.

Так как с учетом [1, 20, 16, 21, 22] фактор-группа

$$N_G(T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle)/T\langle x_\alpha(\xi), x_\alpha(\xi) \in P\rangle$$

может быть явно вычислена в терминах определителя и функтора $K_1(R, I)$, то эта теорема действительно дает *исчерпывающее* описание (абстрактных) подгрупп G, содержащих B. См., в частности, [4, 12], где это фактически проделано для случая SL_n.

Используемые в настоящей работе обозначения совершенно стандартны, и мы ограничимся абсолютным минимумом. В обзорах [29, 15] можно найти обсуждение более широкого контекста и много дальнейших ссылок.

Как обычно, для матрицы $a = (a_{ij})$ мы обозначаем через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обратную к ней матрицу. Через e обозначается единичная матрица, а через e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, – стандартная матричная единица. Для

$1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ и $\xi \in R$ через $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ обозначается элементарная трансвекция. Для $\varepsilon \in R^*$ через $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$ обозначается элементарное псевдоотражение.

Как и в наших предыдущих работах, см. в частности, [14] и содержащиеся там ссылки, симплектическая группа рассматривается по отношению к форме с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}$, где f – перъединичная матрица (с единицами по побочной диагонали). В случае $\mathrm{Sp}(2l, R)$ строки и столбцы матриц удобнее всего нумеровать следующим образом:

$$1, 2, \dots, l, -l, \dots, -2, -1,$$

при этом через ε_i обозначается знак i, равный $+1$ или -1. Матрица $a = (a_{ij})$ в том и только том случае принадлежит $\mathrm{Sp}(2l, R)$, когда $a'_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{-j,-i}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant -1$.

В симплектической группе имеется два типа корневых элементов, длинные корневые элементы $T_{i,-i}(\xi) = e + \xi e_{i,-i}$, являющиеся обычными линейными трансвекциями, и короткие корневые элементы

$$T_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j \xi e_{-j,-i}, \quad i \neq \pm j, \quad \xi \in R.$$

Кроме того, мы используем длинные корневые полупростые элементы

$$D_i(\varepsilon) = d_i(\varepsilon) d_{-i}(\varepsilon^{-1}) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i}.$$

Для двух элементов группы через $[x, y]$ обозначается их левонормированный коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$.

§4. Извлечение трансвекций в случае $\mathrm{SL}(n, R)$

В настоящем параграфе мы приведем подробное доказательство следующего результата, который является аналогом теоремы 5 работы [7] для случая специальной линейной группы.

Отметим, что кольцо R, удовлетворяющее условиям теоремы 1, автоматически является областью целостности, так что его можно рассматривать вложенным в его поле частных K. Это придает смысл выражению $1/\xi$ для любого $\xi \in R$, $\xi \neq 0$.

Предложение 1. *Пусть R – коммутативное кольцо, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица θ бесконечного порядка. Пусть, далее, H – подгруппа в $G = \mathrm{SL}(n, R)$,* *содержащая* $B = \mathrm{SB}(n, R)$. *Тогда если в матрице* $a = (a_{ij}) \in H$ *имеем* $a_{kl} \neq 0$ *при некоторых* $k > l$, *то существует* $\xi \in R$, $\xi \neq 0$, *такое что* $t_{kl}(\xi) \in H$.

Доказательство. Вспомним, прежде всего, что по лемме 5 работы [7] мы можем предполагать дополнительно, что $a'_{kk} \neq 0$, $a'_{ll} \neq 0$.

Случай 1. Случай, когда $a'_{lk} = 0$, по-существу не отличается от разобранного в [7] случая $\mathrm{GL}(n, R)$. А именно, в этом случае k-й столбец матрицы $b = [a, \theta^{-1} d_r(\theta^n)]$ совпадает с k-м столбцом единичной матрицы. Тогда по лемме 6 работы [7] имеем $t_{kl}(\lambda b_{kl}) \in H$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Но ведь и $b_{kl} = (\theta - 1) a_{kl} a'_{ll} \neq 0$.

Случай 2. Пусть теперь $a'_{lk} \neq 0$. Так как факторкольцо $R/(a'_{ll})$ конечно, а порядок θ бесконечен, то существует такое m, что $\theta^m \equiv 1 \pmod{a'_{ll}}$. Тогда

$$(\theta^{mn} - 1) a'_{lk} = \beta a'_{ll}$$

при некотором $\beta \neq 0$ и в матрице

$$b = a^{-1} t_{lk}(\beta) \theta^m d_k(\theta^{-mn}) a d_l(\theta^{-m}) d_p(\theta^m),$$

где $p \neq l$, l-я строка совпадает с l-й строкой единичной матрицы. По лемме 6 работы [7] имеем $t_{kl}(\lambda b_{kl}) \in H$, $\lambda \neq 0$. Но

$$b_{kl} = \beta \theta^{-mn} \frac{a_{kl}}{a'_{lk}} (a'_{kl} a'_{lk} - a'_{kk} a'_{ll}).$$

Здесь $\beta \neq 0$, $\theta \neq 0$, $a'_{kl} \neq 0$, $a'_{lk} \neq 0$.

Если $a'_{kl} a'_{lk} - a'_{kk} a'_{ll} \neq 0$, то мы уже получили то, что нам требуется. Если же $a'_{kl} a'_{lk} - a'_{kk} a'_{ll} = 0$, то заменим матрицу a на матрицу

$$c = a \theta^{-q} d_l(\theta^{qn}) a^{-1}.$$

Так как $a_{kl} \neq 0$ и $a'_{ll} \neq 0$, то в матрице c имеем

$$c_{kl} = a_{kl} (\theta^{qn} - 1) a'_{ll} \neq 0.$$

При этом

$$\begin{aligned}
&c'_{kk} = 1 + a_{kl} (\theta^{qn} - 1) a'_{lk}, \\
&c'_{ll} = 1 + a_{ll} (\theta^{qn} - 1) a'_{ll}, \\
&c'_{kl} c'_{lk} - c'_{kk} c'_{ll} = -1 - (a_{kl} a'_{lk} + a_{ll} a'_{ll})(\theta^{qn} - 1),
\end{aligned}$$

и так как θ – единица бесконечного порядка, то q можно подобрать так, чтобы

$$c'_{kk},\ c'_{ll},\ c'_{kl}c'_{lk} - c'_{kk}c'_{ll} \neq 0.$$

Таким образом, матрица c удовлетворяет тем же условиям, что и исходная матрица a и, *кроме того*, для нее $c'_{kl}c'_{lk} - c'_{kk}c'_{ll} \neq 0$.

Теперь проделав те же вычисления, как для матрицы a, мы получим трансвекцию $t_{kl}(\lambda c_{kl}) \in H$, $\lambda \neq 0$, где $c_{kl} \neq 0$, что и завершает доказательство предложения.

§5. Извлечение трансвекций в случае $\mathrm{Sp}(2l, R)$

В настоящем параграфе мы докажем аналог предложения 1 для случая симплектической группы. Чтобы избежать дальнейших технических усложнений, мы не будем рассматривать общий случай, а ограничимся извлечением *длинных* корневых элементов. В следующем параграфе мы убедимся, что этого уже достаточно для доказательства основной альтернативы, сформулированной в теореме 1.

Предложение 2. *Пусть R – коммутативное кольцо, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица θ бесконечного порядка. Пусть, далее, H – подгруппа в симплектической группе $G = \mathrm{Sp}(2l, R)$, содержащая группу верхних треугольных матриц. Тогда если в матрице $a = (a_{ij}) \in H$ имеем $a_{-1,1} \neq 0$, то существует $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, такое что $T_{-1,1}(\alpha) \in H$.*

Мы разобьем доказательство этого результата на последовательность лемм.

Лемма 1. *Пусть $a \in H$, $a_{-1,1} \neq 0$. Тогда существует матрица $b \in BaB$, такая что $b_{-1,1} = a_{-1,1}$, и при этом $b'_{i,j} \neq 0$ при всех $1 \leq i \leq -1$, $1 \leq j \leq -1$. Заметим, что при этом все элементы матрицы b также будут отличны от нуля.*

Доказательство. Так как матрица a симплектическая, то по условию $a'_{-1,1} \neq 0$. Следовательно, найдутся $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1} \in R \setminus \{0\}$ такие, что в матрице

$$c = a^{-1}T_{1,2}(\alpha_2)T_{1,3}(\alpha_3)\dots T_{1,-2}(\alpha_{-2})T_{1,-1}(\alpha_{-1})$$

все элементы нижней строки отличны от нуля,

$$c_{-1,1}, c_{-1,2}, \dots, c_{-1,-2}, c_{-1,-1} \neq 0.$$

Далее, существуют $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{-3}, \beta_{-2} \neq 0$ такие, что в матрице

$$d = T_{2,-1}(\beta_2)T_{3,-1}(\beta_3)\dots T_{-3,-1}(\beta_{-3})T_{-2,-1}(\beta_{-2})c$$

имеем $d_{ij} \neq 0$ при всех $2 \leq i \leq -1$, $1 \leq j \leq -1$.

Наконец, существует $\gamma \neq 0$ такое, что в матрице $f = T_{1,-1}(\gamma)d$ элемент $f_{1,-1} \neq 0$. Таким образом, матрица f удовлетворяет условию

$$f_{ij} \neq 0, \qquad 1 \leq i \leq -1, \quad 1 \leq j \leq -1.$$

Рассмотрим матрицу

$$b = T_{1,-1}(-\alpha_{-1})T_{1,-2}(-\alpha_{-2})\dots T_{1,2}(-\alpha_2)a \\ T_{-2,-1}(-\beta_{-2})T_{-3,-1}(-\beta_{-3})\dots T_{2,-1}(-\beta_2)T_{1,-1}(-\gamma)$$

Очевидно, что матрица b при этом принадлежит BaB, $b^{-1} = f$, так что обратная к b матрица удовлетворяет всем нужным условиям, причем $b_{-1,1} = a_{-1,1}$, как и утверждалось.

Лемма 2. *Пусть $a \in H$, $a_{-1,1} \neq 0$. Тогда существует $f \in H$, такая что*

1) *последний столбец f совпадает с последним столбцом единичной матрицы, $f_{i,-1} = \delta_{i,-1}$, $1 \leq i \leq -1$;*

2) *$f_{-1,1} \neq 0$;*

3) *или $f_{i1} = 0$ при всех i, $2 \leq i \leq -2$, или найдется h, $2 \leq h \leq l$, такое что $f_{h1} \neq 0$ и $f_{-h,1} \neq 0$.*

Заметим, что так как матрица f симплектическая, ее первая строка совпадает с первой строкой единичной матрицы, $f_{1i} = \delta_{1i}$, $1 \leq i \leq -1$. По той же причине и у обратной матрицы f^{-1} первая строка и последний столбец совпадают с первой строкой и первым столбцом единичной матрицы, соответственно.

Доказательство. Положим

$$f = aD_1(\theta^m)D_2(\theta^m)\dots D_l(\theta^m)T_{1,-1}(\delta_1)T_{2,-2}(\delta_2)\dots T_{l,-l}(\delta_l)a^{-1}.$$

Условия, накладываемые при этом на $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ и на целое число m, будут уточнены в дальнейшем. Элементы (-1)-го столбца получающейся матрицы равны

$$f_{i,-1} = \theta^m \delta_{i,-1} + \sum_{h=1}^{l} a_{i,-h}\Big(\delta_h \theta^m a'_{h,-1} + (\theta^{-m} - \theta^m)a'_{-h,-1}\Big).$$

Таким образом, нам нужно потребовать, чтобы

$$\delta_j \theta^m a'_{j,-1} + (\theta^{-m} - \theta^m) a'_{-j,-1} = 0$$

при всех j, $1 \le j \le l$. Тогда с точностью до множителя θ^m последний столбец равен последнему столбцу единичной матрицы. Осталось домножить матрицу f справа на $D_1(\theta^m)$.

Итак, нам необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\delta_j a'_{j,-1} = (1 - \theta^{-2m}) a'_{-j,-1}.$$

При этом по лемме 1 мы можем считать, что $a'_{j,-1} \ne 0$.

Так как все фактор-кольца $R/(a'_{j,-1})$, $j = 1, \dots, l$ конечны, а порядок θ бесконечен, то существует такое m, что

$$\theta^{-2m} \equiv 1 \pmod{a'_{j,-1}}, \qquad j = 1, \dots, l.$$

Тогда $(1 - \theta^{-2m}) a'_{-j,-1} = \delta_j a'_{j,-1}$ при подходящих $\delta_j \ne 0$.

При этом элемент $f_{-1,1}$ равен

$$f_{-1,1} = (\theta^{-m} - \theta^m) \sum_{h=1}^{l} \frac{a_{-1,-h}}{a_{1,-h}} \begin{vmatrix} a_{1h} & a_{1,-h} \\ a_{-1,h} & a_{-1,-h} \end{vmatrix}.$$

Если окажется, что элемент $f_{-1,1}$ равен нулю, то надо предварительно подправить матрицу a следующим образом. Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1h} & a_{1,-h} \\ a_{-1,h} & a_{-1,-h} \end{vmatrix} = 0,$$

то заменим матрицу a на матрицу $b = aD_1(\theta^q)a^{-1}$. Элементы первой строки матрицы b равны

$$b_{1j} = a_{11}(\theta^{n_1} - 1)a'_{1j} + a_{1,-1}(\theta^{-q} - 1)a'_{-1,j}.$$

Так как θ – единица бесконечного порядка, то выбором q можно добиться, чтобы все эти элементы не были равны нулю.

Если же $\Delta \ne 0$, то домножим матрицу a справа на $T_{1,-1}(\theta^q)$, где q таково, что

$$a_{1,-1} + \theta^q a_{11} \ne 0, \qquad a_{-1,-1} + \theta^q a_{-1,1} \ne 0.$$

Если, кроме того, $f_{h1} = 0$ при некотором h, $2 \le h \le -2$, то на q надо наложить дополнительное ограничение. А именно, выберем q так, чтобы $f_{-h,1} \ne 0$. Так как $\Delta \ne 0$, а элемент $a_{-h,-1}$ тоже можно сделать отличным от нуля, то такое q существует.

Таким образом, мы можем считать, что $f_{-1,1} \ne 0$ и если существовало такое h, $2 \le h \le -2$, что $f_{h1} \ne 0$, то и элемент $f_{-h,1}$ также будет отличен от нуля.

Лемма 3. *Пусть матрица f такова, что $f_{i,-1} = \delta_{i,-1}$ при всех $1 \leq i \leq -1$, причем выполнено одно из следующих условий*

1) $f_{-1,1} \neq 0$, *и* $f_{i,1} = 0$ *при всех* $2 \leq i \leq -2$,

2) *существует* h, $2 \leq h \leq -2$ *такое, что* $f_{h1} \neq 0$ *и* $f_{-h,1} \neq 0$.

Тогда существует трансвекция $T_{-1,1}(\varepsilon) \in H$, $\varepsilon \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$g = [f, D_1(\theta^{-1})] = fD_1(\theta^{-1})f^{-1}D_1(\theta).$$

Поскольку последний столбец и первая строка f такие же, как и у единичной матрицы, т.е. f выглядит так:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix},$$

то g будет выглядеть следующим образом:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ * & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ * & 0 & & \ddots & \\ g_{-1,1} & * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, g отличается от единичной матрицы разве что первым столбцом и последней строкой. При этом элементы первого столбца равны $g_{i1} = (1-\theta)f_{i1}$, $2 \leq i \leq -2$, а элементы последней строки равны $g_{-1,j} = (\theta - 1)f'_{-1,j}$, $2 \leq j \leq -2$. Таким образом,

$$g_{-1,1} = (1-\theta)f_{-1,1} + \theta(1-\theta)f'_{-1,1} = (1-\theta^2)f_{-1,1} \neq 0.$$

В случае 1) эта матрица уже является трансвекцией, у которой в позиции $(-1,1)$ стоит $(1-\theta^2)f_{-1,1} \neq 0$.

В случае 2) рассмотрим матрицу

$$h = [D_h(\theta), g] = D_h(\theta)gD_h(\theta^{-1})g^{-1}.$$

Матрица h представляет собой трансвекцию, у которой в позиции $(-1,1)$ стоит

$$(\theta-\theta^{-1})(1-\theta)^2 f_{h,1} f_{-h,1} \neq 0.$$

Таким образом, в обоих случаях нам удалось получить требуемую трансвекцию.

Предложение 2 сразу вытекает из леммы 3.

§6. Доказательство теоремы 1

Для случая $\mathrm{SL}(n,R)$ теорема 1 доказывается точно так же, как в работе [7]. Нужно лишь заменить ссылку на теорему 5 цитированной работы ссылкой на наше предложение 1.

Для случая $\mathrm{Sp}(2l,R)$ ситуация несколько сложнее, так как наше предложение 2 позволяет извлекать трансвекцию только в позиции $(-1,1)$. Однако, любая подгруппа $H \leqslant \mathrm{Sp}(2l,R)$ такая, что $a_{-1,1}=0$ для всех $a \in H$, приводима. Это очевидно и в общем случае, но для сокращения объема статьи мы докажем это только для подгрупп, содержащих борелевскую подгруппу.

Предложение 3. *Предположим, что R – область целостности такая, что $|R^*| \geqslant 3$. Пусть $H \leqslant \mathrm{Sp}(2l,R)$ – подгруппа, содержащая борелевскую подгруппу B. Если H не содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, то найдется матрица $a \in H$, для которой $a_{-1,1} \neq 0$.*

Доказательство. Ясно, что $H \leqslant \mathrm{Sp}(2l,R)$ тогда и только тогда содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, когда для некоторого p, $1 \leqslant p \leqslant -2$, для всех матриц $a \in H$ и всех $i > p$, $j \leqslant p$, выполняются равенства $a_{ij}=0$ – разумеется, в силу полярности отсюда автоматически следует обращение в 0 еще каких-то элементов.

Таким образом, если H не содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, для любого p мы можем найти в ней матрицу a такую, что $a_{rs} \neq 0$ для каких-то $r > p \geqslant s$.

Переходя, если нужно, от a к матрице

$$b = T_{qr}(\xi)a, aT_{st}(\zeta), T_{qr}(\xi)aT_{st}(\zeta),$$

где $q<r$, $s<t$, $\xi,\zeta \in R$, мы можем найти в H матрицу b, в которой $b_{qt} \neq 0$ для любых $q \leqslant r$, $s \leqslant t$.

С другой стороны, если $a, b \in H$ – две матрицы такие, что $a_{rq} \neq 0$ и $b_{qs} \neq 0$ для некоторых $r > q > s$, то рассмотрим матрицу $c = aD_q(\varepsilon)b \in H$, $\varepsilon \in R^*$. Ясно, что

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^{-1} a_{ri}b_{is} + (\varepsilon - 1)a_{rq}b_{qs} + (\varepsilon^{-1} - 1)a_{r,-q}b_{-q,s}.$$

Так как $a_{rq}b_{qs} \neq 0$, а $|R^*| \geqslant 3$, то найдется $\varepsilon \in R^*$ такое, что $c_{rs} \neq 0$.

Так как H не содержится в собственной стандартной параболической подгруппе, то продолжая действовать таким образом, мы найдем в H матрицу a, для которой $a_{-1,1} \neq 0$.

Теперь доказательство теоремы 1 для симплектической группы завершается следующим образом. Комбинируя предложения 2 и 3, мы видим, что если содержащая борелевскую подгруппу B подгруппа $H \leqslant \mathrm{Sp}(2l, R)$ не содержится в собственной параболической подгруппе, то найдется $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, такое, что $T_{-1,1}(\alpha) \in H$.

Дальнейшее представляет собой упражнение на коммутационную формулу Шевалле. А именно, мы хотим показать, что H содержит относительную элементарную подгруппу

$$\mathrm{Ep}(2l, R, I) = \langle T_{ij}(\xi), i \neq j, \xi \in I \rangle^{\mathrm{Ep}(2l,R)}$$

для какого-то идеала $I \neq 0$. Докажем, прежде всего, что H содержит элементарную подгруппу

$$\mathrm{Ep}(2l, I) = \langle T_{ij}(\xi), i \neq j, \xi \in I \rangle$$

для какого-то идеала $I \neq 0$.

Прежде всего, ясно, что для любого $\beta \in R$ имеем

$$T_{l1}(\beta\alpha) = [T_{l,-1}(\beta), T_{-1,1}(\alpha)]T_{l,-l}(-\beta^2\alpha) \in H.$$

Коммутируя теперь $T_{l1}(\beta\alpha)$ со всевозможными $T_{ij}(1)$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, мы видим, что $T_{hk}(\alpha R) \leqslant H$ для всех $1 \leqslant k < h \leqslant l$.

С другой стороны, для любого $2 \leqslant j \leqslant l$ и для любого $\beta \in R$ имеем

$$b = [T_{-1,1}(\alpha), T_{1j}(\beta)] = T_{-1,j}(\beta\alpha)T_{-j,j}(\beta^2\alpha) \in H.$$

Таким образом, для любого $\gamma \in R$ имеем

$$T_{-j,j}(\alpha\beta\gamma) = [b, T_{1j}(\gamma)] \in H.$$

Это значит, что $T_{-j,j}(\alpha R) \leqslant H$ для всех $2 \leqslant j \leqslant l$, и, снова возвращаясь к определению b, мы видим, что

$$T_{-1,j}(\beta\alpha) = bT_{-j,j}(-\beta^2\alpha) \in H.$$

Коммутируя, если нужно, $T_{-1,j}(\alpha\beta)$ со всевозможными $T_{j,-i}(1)$, $2 \leqslant i \leqslant l$, мы видим, что $T_{-h,k}(\alpha R) \leqslant H$ для всех $1 \leqslant k \neq h \leqslant l$.

Нам остается только разобраться с корневыми элементами вида $T_{-1,1}(*)$. В тех случаях, когда мы реально собираемся применять теорему 1, аддитивная группа R порождается R^{*2}. Поэтому сопрягая $T_{-1,1}(\alpha)$ при помощи диагональных элементов $D_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \in R^*$, легко убедиться, что $T_{-1,1}(\alpha R) \leqslant H$.

Однако, в самой теореме 1 мы не накладываем этого предположения и вынуждены поэтому довольствоваться более слабым заключением $T_{-1,1}(\alpha^2 R) \leqslant H$. А именно, ясно, что для любого $\beta \in R$ имеем

$$T_{-1,1}(\alpha^2\beta) = [T_{-1,2}(\alpha), T_{2,-2}(\beta)]T_{21}(-\alpha\beta) \in H.$$

Суммируя сказанное выше, мы видим, что H содержит элементарную подгруппу $\mathrm{Ep}(2l, \alpha^2 R)$. Для завершения доказательства теоремы 1 остается лишь сослаться на следующий очевидный факт, см. [23] или [28].

Лемма 4. *Для любого идеала $I \trianglelefteq R$ имеет место включение*

$$\mathrm{Ep}(2l, I) \geqslant \mathrm{Ep}(2l, R, I^2(I + 2R)).$$

Естественно возникает задача обобщения наших результатов на другие группы.

Проблема. *Доказать аналог теоремы* 1 *для групп Шевалле $G(\Phi, R)$ всех типов над коммутативным кольцом R, все собственные фактор-кольца которого конечны и в котором существует единица бесконечного порядка.*

Мы уверены, что описанная в [24], вариация 11, стратегия должна сработать и в общем случае, хотя, конечно, детали вычислений для ортогональных групп, не говоря уже про исключительные группы, будут несколько сложнее, чем для рассмотренных нами случаев.

Литература

1. Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.-П. Серр, *Решение конгруэнц-проблемы для* SL_n $(n \geqslant 3)$ *и* Sp_{2n} $(n \geqslant 2)$. — Математика (период. сб. перев. ин. статей) **14**, No. 6 (1970), 64–128; **15**, No. 1 (1971), 44–60.
2. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-та **13** (1976), 16–24.
3. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-та **19** (1976), 16–24.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, В. Наркевич, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 13–20.
5. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI. Мир, М. (1972). Гл. VII, VIII (1978).
6. Н. А. Вавилов, *О параболических конгруэнц-подгруппах в линейных группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 55–63.
7. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 66–79.
8. Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над кольцом, содержащие группу клеточно треугольных матриц.* I, II. — Вестн. Ленингр. ун-та **19** (1977), 139–140; **13** (1982), 5–10.
9. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.
10. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 21–36.
11. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.
12. Н. А. Вавилов, *О группе* SL_n *над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Вестн. Ленингр. ун-та **7** (1983), 5–10.
13. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Изв. ВУЗ'ов **12** (1987), 14–20.
14. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и Анализ **15**, 3 (2003), 72–114.
15. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. **3** (2008), 51–95.
16. Л. Н. Васерштейн, *О группе* SL_2 *над дедекиндовыми кольцами арифметического типа.* — Мат. Сб. **89**, No. 2 (1972), 313–322.
17. И. З. Голубчик, *О подгруппах полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* — Всесоюзн. Алгебр. конф., тез. докл. **1** (1981), 39–40.
18. Е. В. Дыбкова, *О некоторых конгруэнц-подгруппах симплектической группы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **64** (1976), 80–91.
19. Н. С. Романовский, *О подгруппах общей и специальной линейных группах над кольцом.* — Мат. Заметки **9**, No. 6 (1971), 699–708.
20. Ж.-П. Серр, *Проблема конгруэнц-подгрупп для* SL_2. — Математика (период. сб. перев. ин. статей) **15**, No. 6 (1971), 12–45.

21. B. Liehl, *On the group* SL_2 *over orders of arithmetic type.* — J. reine angew. Math. **323**, No. 1 (1981), 153–171.
22. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci.École Norm. Sup., $4^{\text{ème}}$ sér. **2** (1969), 1–62.
23. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, 4 (1971), 965–1004.
24. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
25. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 57–66.
26. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku **13**, No. 366-382 (1977), 86–97.
27. J. Tits, *Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques.* — C. R. Acad. Sci. Paris **254** (1962), 2910–2912.
28. J. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruences.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A **283** (1976), 693–695.
29. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
30. C. Wenzel, *Classification of all parabolic subgroup-schemes of a reductive linear algebraic group over an algebraically closed field.* — Trans. Amer. Math. Soc. **337**, No. 1 (1993), 211–218.

Alexandrov A. V., Vavilov N. A. Parabolic subgroups of SL_n and Sp_{2l} over a Dedekind ring of arithmetic type.

Let R be a commutative ring all of whose proper factor rings are finite and such that there exists a unit of infinite order. We show that for a subgroup P in $G = \mathrm{SL}(n, R)$, $n \geqslant 3$, or in $G = \mathrm{Sp}(2l, R)$, $l \geqslant 2$, containing Borel subgroup B, the following alternative holds. Either P contains a relative elementary subgroup E_I for some ideal $I \neq 0$, or H is contained in a proper standard parabolic subgroup. For Dedekind rings of arithmetic type this allows, under some mild additional assumptions on units, to completely describe overgroups of B in G.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 31 марта 2010 г.