Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

А. В. Соколов

ФАКТОРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ В ОДНОМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ III: ТОНКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

1. Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением [1, 2] и так же, как последние играет важную роль в теории построения одномерных гамильтонианов с заданным спектром. В [1, 2] было доказано, что любое сложное преобразование исходного гамильтониана, описываемое сплетающим оператором произвольного порядка и производимое с целью получения гамильтониана с требуемым спектром, сводится к последовательности простых преобразований. Другими словами, указанный сплетающий оператор может быть представлен [1, 2] с помощью цепной конструкции [3–6] в виде произведения сплетающих операторов первого порядка и вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка I, II и III рода [1, 7]. Цель предлагаемой статьи – дать единообразное описание как известных ранее [8–18], так и найденных в настоящей работе типов сплетающих операторов первого порядка и вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка I, II и III рода, т.е. всех простых преобразований — всех тех сомножителей, из которых можно построить [1, 2] произвольный сплетающий оператор. Дополнительные сведения и литературу можно найти в [1, 2].

В основу представленной в этой статье классификации положены структура ядра сплетающего оператора и определяемое этой структурой соотношение между спектрами сплетаемых гамильтонианов. Приведённая здесь классификация вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка I и III рода является исчерпывающей в общем случае, в то время как классификация сплетающих опе-

Ключевые слова : суперсимметричная квантовая механика, приводимые и неприводимые сплетающие операторы, спектр гамильтониана.

раторов первого порядка и вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка II рода исчерпывающа только в условиях теорем о приводимости из [1, 2].

Статья построена следующим образом. Сначала изложены основные определения и предположения, используемые в статье. Затем представлена классификация сплетающих операторов первого порядка. И наконец, приведена классификация вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка I, II и III рода.

2. Основные определения и предположения

Начнем изложение с формулировки алгебры суперсимметрии. Рассмотрим два одномерных гамильтониана шрёдингеровского типа $h^+ = -\partial^2 + V_1(x)$ и $h^- = -\partial^2 + V_2(x)$, $\partial \equiv d/dx$, определённых на всей оси, с достаточно гладкими вещественнозначными потенциалами $V_1(x)$ и $V_2(x)$ и объединим их в *супергамильтониан*,

$$H = \begin{pmatrix} h^+ & 0 \\ 0 & h^- \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Предположим, что гамильтонианы h^+ и h^- имеют почти одинаковые спектры для связанных состояний (т.е. точечные спектры h^+ и h^- могут отличаться не более чем в конечном числе собственных значений) и одинаковые спектральные плотности в непрерывной части спектра и что такая эквивалентность обеспечивается при помощи сплетения операторами [19, 20] Дарбу–Крама $q_N^\pm$:

$$h^+ q_N^+ = q_N^+ h^-, \quad q_N^- h^+ = h^- q_N^-. \tag{2}$$

В дальнейшем ограничимся дифференциальными операторами Дарбу–Крама конечного порядка N,

$$q_N^\pm = \sum_{k=0}^{N} w_k^\pm(x)\partial^k, \quad w_N^\pm \equiv (\mp 1)^N, \tag{3}$$

с вещественными достаточно гладкими коэффициентами $w_k^\pm(x)$. В этом случае, в представлении фермионных чисел заполнения, нелинейная $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая механика образуется при помощи нильпотентных суперзарядов,

$$Q_N = \begin{pmatrix} 0 & q_N^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_N^- & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_N^2 = \bar{Q}_N^2 = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что соотношения (2) приводят к суперсимметрии супергамильтониана H,

$$[H, Q_N] = [H, \bar{Q}_N] = 0, \tag{5}$$

где квадратными скобками обозначен коммутатор операторов.

Ввиду (2) ядро оператора $q_N^{\pm}$ является инвариантным подпространством для гамильтониана $h^{\mp}$,

$$h^{\mp} \ker q_N^{\pm} \subset \ker q_N^{\pm}. \tag{6}$$

Следовательно, для любого базиса $\phi_1^{\pm}(x), \ldots, \phi_N^{\pm}(x)$ подпространства $\ker q_N^{\pm}$ существует постоянная матрица $\mathbf{T}^{\mp} \equiv \|T_{ij}^{\mp}\|$ размера $N \times N$ такая, что

$$h^{\mp}\phi_i^{\pm} = \sum_{j=1}^{N} T_{ij}^{\mp}\phi_j^{\pm}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

В дальнейшем *матрицей* $\mathbf{T}$ *сплетающего оператора* будем называть матрицу, которая строится по этому оператору таким же образом, каким $\mathbf{T}^{\pm}$ строится по $q^{\mp}$. При этом базис в ядре сплетающего оператора, относительно которого выбрана матрица $\mathbf{T}$, не будет уточняться в тех случаях, когда нас будут интересовать лишь спектральные характеристики этой матрицы или, что то же самое, спектральные характеристики сужения соответствующего гамильтониана на ядро рассматриваемого сплетающего оператора (ср. с (7)).

Описанная выше нелинейная алгебра суперсимметрии замыкается соотношением между антикоммутатором суперзарядов и супергамильтонианом,

$$\{Q_N, \bar{Q}_N\} = P_N(H), \tag{8}$$

в котором $P_N(H)$ является дифференциальным оператором порядка $2N$, коммутирующим с супергамильтонианом. В зависимости от соотношения между суперзарядами Q_N и $\bar{Q}_N$ (сплетающими операторами q_N^+ и q_N^-) этот оператор $P_N(H)$ может быть [21, 22] либо полиномом от гамильтониана, если сплетающие операторы связаны операцией транспонирования $q_N^+ = \left(q_N^-\right)^t \equiv \sum\limits_{k=0}^{N}(-\partial)^k w_k^-(x)$, либо функцией как от супергамильтониана, так и, вообще говоря, от дифференциального оператора симметрии нечетного порядка по производным, если сплетающие операторы связаны эрмитовым сопряжением † и коэффициенты этих операторов являются комплекснозначными. В данной работе мы ограничимся первым случаем $\bar{Q}_N = Q_N^t$. Соответствующая теорема [1, 22] о структуре такой алгебры суперсимметрии приведена ниже.

Теорема 1 (о суперсимметричной алгебре с симметрией транспонирования)**.** *Замыкание алгебры суперсимметрии с $\bar{Q}_N = Q_N^t$ имеет полиномиальный вид:*

$$\{Q_N, Q_N^t\} \equiv \begin{pmatrix} q_N^+ q_N^- & 0 \\ 0 & q_N^- q_N^+ \end{pmatrix} = \det[E\mathbf{I} - \mathbf{T}^+]_{E=H}$$
$$= \det[E\mathbf{I} - \mathbf{T}^-]_{E=H} \equiv P_N(H), \tag{9}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица размера $N \times N$, а $\mathbf{T}^\pm$ – матрица $\mathbf{T}$ оператора $q_N^\mp$.

Следствие 1. *Спектры матриц $\mathbf{T}^+$ и $\mathbf{T}^-$ одинаковы.*

Базис ядра сплетающего оператора, в котором матрица $\mathbf{T}$ этого оператора имеет каноническую жорданову форму, будем называть *каноническим базисом*. Элементы канонического базиса называются *функциями преобразования* или *преобразующими функциями*.

В том случае, когда жорданова форма матрицы $\mathbf{T}$ сплетающего оператора содержит клетки порядка большего единицы, соответствующие канонические базисы включают в себя не только формальные решения уравнения Шрёдингера, но и формальные присоединенные функции, которые определяются следующим образом [23].

Функция $\psi_{n,i}(x)$ называется *формальной присоединённой функцией i-го порядка* гамильтониана h для спектрального параметра λ_n, если

$$(h - \lambda_n \mathbb{I})^{i+1} \psi_{n,i} \equiv 0, \quad (h - \lambda_n \mathbb{I})^i \psi_{n,i} \not\equiv 0, \tag{10}$$

где $\mathbb{I}$ – единичный оператор и слово “формальный” подчёркивает, что функция $\psi_{n,i}(x)$ не обязательно нормируема. В частности, формальная присоединённая функция нулевого порядка $\psi_{n,0}$ является формальной собственной функцией h (не обязательно нормируемым решением однородного уравнения Шрёдингера).

Если сплетающий оператор $q_N^\pm$ можно представить в виде произведения сплетающих операторов $k_{N-M}^\pm$ и $p_M^\pm$, $0 < M < N$ так, что

$$q_N^+ = p_M^+ k_{N-M}^+,\ q_N^- = k_{N-M}^- p_M^-;\ p_M^+ h_M = h^+ p_M^+,\ p_M^- h^+ = h_M p_M^-;$$
$$k_{N-M}^+ h^- = h_M k_{N-M}^+,\ k_{N-M}^- h_M = h^- k_{N-M}^-,\ h_M = -\partial^2 + v_M(x), \tag{11}$$

где коэффициенты $k^{\pm}_{N-M}$ и $p^{\pm}_M$ и потенциал $v_M(x)$ возможно являются комплекснозначными и/или имеют полюсные особенности, то гамильтониан h_M называется *промежуточным* по отношению к h^+ и h^-. При этом в силу теоремы 1 (см. также лемму 1 в [22]) характеристический многочлен матрицы $\mathbf{T}$ оператора $q^{\pm}_N$ равен произведению характеристических многочленов матриц $\mathbf{T}$ операторов $k^{\pm}_{N-M}$ и $p^{\pm}_M$ и тем самым спектр матрицы $\mathbf{T}$ оператора $q^{\pm}_N$ представляет собой объединение спектров матриц $\mathbf{T}$ операторов $k^{\pm}_{N-M}$ и $p^{\pm}_M$.

Сплетающий оператор $q^{\pm}_N$ называется *минимизуемым*, если он может быть представлен в виде

$$q^{\pm}_N = P(h^{\pm})p^{\pm}_M = p^{\pm}_M P(h^{\mp}), \qquad (12)$$

где $p^{\pm}_M$ – оператор порядка M, сплетающий те же гамильтонианы, что и $q^{\pm}_N$ (т.е. $p^{\pm}_M h^{\mp} = h^{\pm}p^{\pm}_M$), а $P(h^{\pm})$ – многочлен степени $(N-M)/2>0$ (разность $N-M$ чётна в силу того, что $P(h^{\pm})$, будучи многочленом от $h^{\pm}$, является оператором чётного порядка). В противном случае сплетающий оператор $q^{\pm}_N$ называется *неминимизуемым*. Критерий (не)минимизуемости сплетающего оператора можно найти в [1, 22].

Сплетающий оператор $q^{\pm}_N$ называется (*вещественно*) *приводимым*, если он может быть представлен в виде произведения двух сплетающих операторов с (вещественными) достаточно гладкими коэффициентами без полюсных особенностей $k^{\pm}_{N-M}$ и $p^{\pm}_M$, $0<M<N$ так, что справедливы равенства (11), и промежуточный гамильтониан h_M имеет вещественный достаточно гладкий потенциал без полюсных особенностей[1]. В противном случае $q^{\pm}_N$ называется (*вещественно*) *неприводимым*.

Вещественно неприводимые неминимизуемые сплетающие операторы второго порядка с вещественными коэффициентами можно разделить на операторы трёх родов [1, 7].

Вещественно неприводимым сплетающим оператором I рода называется дифференциальный сплетающий оператор второго порядка с вещественными коэффициентами, собственные числа матрицы $\mathbf{T}$

[1]Используя формулы, выражающие коэффициенты p^-_M и потенциал $v_M(x)$ через вронскиан элементов канонического базиса в $\ker p^-_M$ и $V_1(x)$ (см. [1]), нетрудно убедиться, что нарушение гладкости коэффициентов p^-_M, $p^+_M=(p^-_M)^t$ и потенциала $v_M(x)$ возможно лишь за счёт появления полюсных особенностей в точках, совпадающих с корнями указанного вронскиана. Аналогичное утверждение справедливо для коэффициентов k^+_{N-M} и k^-_{N-M}.

которого имеют нетривиальные мнимые части и являются взаимно комплексно сопряжёнными.

Вещественно неприводимым сплетающим оператором II рода называется дифференциальный сплетающий оператор второго порядка с вещественными коэффициентами $q_2^{\pm}$ такой, что:

(1) собственные числа матрицы $\mathbf{T}$ оператора $q_2^{\pm}$ вещественны и различны;

(2) оба элемента $\varphi_1^{\pm}(x)$ и $\varphi_2^{\pm}(x)$ канонического базиса подпространства $\ker q_2^{\pm}$ имеют нули.

Вещественно неприводимым сплетающим оператором III рода называется дифференциальный сплетающий оператор второго порядка с вещественными коэффициентами $q_2^{\pm}$ такой, что:

(1) $\lambda_{1,2}$ – собственные числа матрицы $\mathbf{T}$ оператора $q_2^{\pm}$ – одинаковы: $\lambda_1 = \lambda_2$;

(2) канонический базис в $\ker q_2^{\pm}$ состоит из формальных собственной $\varphi_{10}^{\pm}(x)$ и присоединённой $\varphi_{11}^{\pm}(x)$ функций гамильтониана $h^{\mp}$, которые образуют жорданову клетку: $h^{\mp}\varphi_{10}^{\pm} = \lambda_1\varphi_{10}^{\pm}$, $(h^{\mp} - \lambda_1)\varphi_{11}^{\pm} = \varphi_{10}^{\pm}$;

(3) $\varphi_{10}^{\pm}(x)$ имеет по крайней мере один корень.

В статье в некоторых случаях будет упоминаться достаточно богатый класс бесконечно гладких вещественнозначных потенциалов K, определение которого можно найти в [1]. В этот класс, в частности, входят потенциалы, которые при $|x| \to +\infty$ стремятся к $+\infty$ либо к постоянным.

Кроме того, будет использоваться нормируемость либо ненормируемость функций на $+\infty$ и/или на $-\infty$, которая определяется следующим образом.

Функция $f(x)$ называется *нормируемой на* $+\infty$ (*на* $-\infty$), если существует вещественное a_+ (a_-) такое, что

$$\int_{a_+}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty \quad \left(\int_{-\infty}^{a_-} |f(x)|^2\,dx < +\infty\right). \tag{13}$$

В противном случае $f(x)$ называется *ненормируемой на* $+\infty$ (на $-\infty$).

Принимая во внимание, что непрерывные спектры гамильтонианов h^+ и h^- одинаковы (оператор $q_N^{\mp}$ в соответствии с (2) отображает почти любую[2] волновую функцию непрерывного спектра гамильтониана $h^{\pm}$ в волновую функцию непрерывного спектра гамильтониана

[2] Исключение могут составить функции из $\ker q_N^{\mp}$.

$h^{\mp}$ для того же значения спектрального параметра), будем обозначать нижнюю границу непрерывных спектров этих гамильтонианов E_c и при описании различных типов сплетающих операторов будем указывать соотношение не между полными спектрами сплетаемых гамильтонианов, а лишь между их точечными спектрами. При отсутствии непрерывных спектров у гамильтонианов h^+ и h^- будем предполагать, что $E_c = +\infty$. Приводимые в настоящей работе соотношения между точечными спектрами для многих типов сплетающих операторов известны [8–18], а для впервые описанных типов сплетающих операторов легко выводятся с помощью лемм 3, 5 и 6 из [2]. С помощью этих же лемм можно также сделать выводы о типах сплетающих операторов транспонированных по отношению к рассматриваемым. Энергию l-го связанного состояния гамильтониана h^+ (h^-) будем обозначать соответственно $E_{l,+}$ ($E_{l,-}$), $l = 0, 1, 2, \ \ldots$.

Классификацию представим только для операторов q_1^- и q_2^-. Классификация для операторов q_1^+ и q_2^+ ввиду симметрии между q_N^- и q_N^+ легко строится аналогично.

3. Сплетающие операторы первого порядка

3.1. Основные обозначения и соотношения (случай $N = 1$).

Используя вещественнозначный суперпотенциал $\chi(x)$ из $C^2_{\mathbb{R}}$ и вещественное число λ, с помощью равенств

$$q_1^{\pm} = \mp\partial + \chi(x), \quad \partial \equiv d/dx, \quad q_1^+ = (q_1^-)^t = (q_1^-)^{\dagger}, \tag{14}$$

$$h^{\pm} = q_1^{\pm} q_1^{\mp} + \lambda \equiv -\partial^2 + V_{1,2}(x), \quad V_{1,2}(x) = \mp\chi'(x) + \chi^2(x) + \lambda \tag{15}$$

можно построить [8] гамильтонианы h^+ и h^- с вещественнозначными потенциалами $V_1(x)$ и $V_2(x)$ из $C^1_{\mathbb{R}}$, сплетаемые операторами q_1^+ и q_1^- так, что:

$$q_1^{\pm} h^{\mp} = h^{\pm} q_1^{\pm}. \tag{16}$$

При этом $\varphi^{\pm}(x)$ – элемент (единственный) базиса $\ker q_1^{\pm}$ выражается через $\chi(x)$ равенством

$$\varphi^{\pm}(x) = \varphi^{\pm}(x_0) e^{\pm \int\limits_{x_0}^{x} \chi(x')\, dx'} \tag{17}$$

и тем самым не имеет нулей и принадлежит $C^3_{\mathbb{R}}$. Функции $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$ будем без ограничения общности считать вещественнозначными и связанными соотношением

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{\varphi^-(x)}. \tag{18}$$

Для этих функций в силу их определений и (15) имеют место равенства

$$h^{\pm}\varphi^{\mp} = \lambda\varphi^{\mp}, \tag{19}$$

т.е. λ представляет собой собственное число (единственное) матриц $\mathbf{T}$ операторов $q_1^{\pm}$. Нетрудно проверить, что формулы (14) и (15) дают общее гладкое вещественное решение уравнений (16) относительно неизвестных функций $V_1(x)$, $V_2(x)$ и $\chi(x)$.

Если изначально задан не суперпотенциал $\chi(x)$, а вещественнозначный потенциал $V_1(x) \in C^1_{\mathbb{R}}$ гамильтониана h^+ и вещественнозначная формальная собственная функция $\varphi^-(x) \in C^3_{\mathbb{R}}$ этого гамильтониана для вещественного спектрального числа λ, то вещественнозначные $\chi(x)$ и потенциал $V_2(x)$ гамильтониана h^-, сплетаемого с h^+ операторами (14) в соответствии с (16), можно найти с помощью равенств:

$$\chi(x) = -\frac{\varphi^{-\prime}(x)}{\varphi^-(x)}, \quad V_2(x) = V_1(x) + 2\chi'(x) = V_1(x) - 2[\ln\varphi^-(x)]''. \tag{20}$$

При этом для того, чтобы потенциал $V_2(x)$ не имел полюсов и принадлежал $C^1_{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно (см. (20)), чтобы функция $\varphi^-(x)$ не имела нулей, а для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы λ лежало не выше нижней границы спектра h^+. В силу симметрии между h^+ и h^- указанное ограничение на расположение λ справедливо и по отношению к спектру h^-.

3.2. Классификация сплетающих операторов первого порядка.

Первые три типа сплетающих операторов q_1^- давно и хорошо известны [8].

3.2.1. Сплетающие операторы первого порядка: тип 1.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа 1*, если:

(1) $\lambda = E_{0+}$ – энергия основного состояния h^+, причём $E_{0+} < E_c$;

(2) функция $\varphi^-(x)$ нормируема на обеих бесконечностях (т.е. представляет собой волновую функцию основного и при том связанного состояния h^+ и не имеет нулей).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только отсутствием уровня $E = E_{0+}$;

(2) оператор $q_1^+ = (q_1^-)^t$ является оператором описываемого ниже типа 3.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая волновая функция основного состояния h^+ при условии, что энергия этого состояния $\lambda = E_{0+} < E_c$.

3.2.2. Сплетающие операторы первого порядка: тип 2.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа 2*, если:

(1) λ лежит ниже спектра h^+;

(2) функция $\varphi^-(x)$ нормируема только на одной из бесконечностей (тем самым $\varphi^-(x)$ не имеет нулей).

В этом случае:

(1) точечные спектры h^+ и h^- одинаковы;

(2) оператор $q_1^+ = (q_1^-)^t$ является оператором этого же типа 2.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая нормируемая только на одной из бесконечностей формальная собственная функция $\varphi^-(x)$ гамильтониана h^+ для спектрального числа, лежащего ниже спектра h^+.

Этот тип сплетающих операторов существует в частности и в случае с периодическим потенциалом у h^+, когда λ лежит ниже спектра h^+ и в качестве $\varphi^-(x)$ выбирается блоховская собственная функция h^+ (см. [9]).

3.2.3. Сплетающие операторы первого порядка: тип 3.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа* 3, если:

(1) λ лежит ниже спектра h^+;

(2) функция $\varphi^-(x)$ ненормируема на обеих бесконечностях и не имеет нулей.

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением дополнительного уровня $E = E_{0-} = \lambda$, на кото-

ром находится связанное состояние гамильтониана h^-, описываемое волновой функцией $\varphi^+(x) = 1/\varphi^-(x) \in L_2(\mathbb{R})$;

(2) оператор $q_1^+ = (q_1^-)^t$ является оператором типа 1.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая ненормируемая на обеих бесконечностях и не имеющая нулей формальная собственная функция $\varphi^-(x)$ гамильтониана h^+ для спектрального числа λ, лежащего ниже спектра h^+.

Этот тип сплетающих операторов существует в частности и в случае с периодическим потенциалом у h^+, когда λ лежит ниже спектра h^+ и в качестве $\varphi^-(x)$ выбирается неблоховская собственная функция h^+ без нулей (см. [10, 11]).

Три описанных выше типа сплетающих операторов исчерпывают все случаи сплетающих операторов первого порядка, встречающиеся в теоремах о приводимости из [2], но в общем случае существуют и другие типы сплетающих операторов первого порядка, например, описываемые ниже типы 4, 5 (см. [12, 13]) и 6.

3.2.4. Сплетающие операторы первого порядка: тип 4.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа 4*, если:

(1) $\lambda = E_c$ и ниже E_c спектра у h^+ нет;

(2) $\varphi^-(x)$ не имеет нулей и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только отсутствием уровня E_c;

(2) $q_1^+ = (q_1^-)^t$ является оператором описываемого ниже типа 6.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая не имеющая нулей собственная функция $\varphi^-(x) \in L_2(\mathbb{R})$ гамильтониана h^+ для спектрального числа $\lambda = E_c$. При этом отсутствие собственных функций (из $L_2(\mathbb{R})$) у h^- на уровне $E = E_c$ следует из того, что общее решение уравнения $(h^- - E_c)\varphi = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{\varphi^-(x)}\Big\{C_1 + C_2 \int\limits_{x_0}^{x} [\varphi^-(x')]^2\, dx'\Big\}. \tag{21}$$

Пример 1 (гамильтонианы, сплетаемые операторами типов 4 и 6).

$$h^+ = -\partial^2 + \frac{2x^2 - a^2}{(a^2+x^2)^2}, \quad h^- = -\partial^2 + \frac{a^2}{(a^2+x^2)^2}, \ a > 0,$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \varphi^+(x) = \sqrt{a^2+x^2}, \ \chi(x) = \frac{x}{a^2+x^2}, \ \lambda = E_c = 0. \tag{22}$$

3.2.5. Сплетающие операторы первого порядка: тип 5.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа* 5, если:

(1) $\lambda = E_c$ и ниже E_c спектра у h^+ нет;

(2) $\varphi^-(x)$ не имеет нулей; $\varphi^-(x)$ и $\varphi^+(x) = 1/\varphi^-(x)$ не принадлежат $L_2(\mathbb{R})$.

В этом случае:

(1) точечные спектры h^+ и h^- совпадают;

(2) $q_1^+ = (q^-)^t$ является оператором этого же типа 5.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая не имеющая нулей формальная собственная функция $\varphi^-(x)$ гамильтониана h^+ для спектрального числа $\lambda = E_c$ такая, что $\varphi^-(x)$ и $\varphi^+(x) = 1/\varphi^-(x)$ не принадлежат $L_2(\mathbb{R})$.

Этот тип сплетающих операторов существует в частности и в случае с периодическим потенциалом у h^+, когда $\lambda = E_c$ и в качестве $\varphi^-(x)$ выбирается периодическая собственная функция h^+ (см. [12, 13]).

Пример 2 (гамильтонианы, сплетаемые операторами типа 5).

$$h^+ = h^- = -\partial^2, \quad \varphi^- = \varphi^+ = 1, \quad \chi = 0, \quad \lambda = E_c = 0. \tag{23}$$

Пример 3 (гамильтонианы, сплетаемые операторами типа 5).

$\varphi^-(x) \in C^3_{\mathbb{R}}$ – вещественнозначная периодическая функция без нулей,

$$h^\pm = -\partial^2 + \frac{\varphi^{\mp\prime\prime}(x)}{\varphi^\mp(x)}, \ \varphi^+(x) = \frac{1}{\varphi^-(x)}, \ \chi(x) = -\frac{\varphi^{-\prime}(x)}{\varphi^-(x)}, \ \lambda = E_c = 0. \tag{24}$$

Пример 4 (гамильтонианы, сплетаемые операторами типа 5).

$$h^+ = -\partial^2 + \frac{\alpha^2}{1+e^{-\alpha x}}, \ h^- = -\partial^2 + \alpha^2 \frac{1-e^{-\alpha x}}{(1+e^{-\alpha x})^2}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\varphi^-(x) = 1 + e^{\alpha x}, \ \varphi^+(x) = \frac{1}{1+e^{\alpha x}}, \ \chi(x) = -\frac{\alpha}{1+e^{-\alpha x}}, \ \lambda = E_c = 0. \tag{25}$$

3.2.6. Сплетающие операторы первого порядка: тип 6.

Сплетающий оператор первого порядка q_1^- назовём оператором *типа* 6, если:

(1) $\lambda = E_c$ и ниже E_c спектра у h^+ нет;

(2) $\varphi^-(x)$ не имеет нулей и $\varphi^+(x) = 1/\varphi^-(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением дополнительного уровня E_c;

(2) $q_1^+ = (q_1^-)^t$ является оператором типа 4.

Для построения оператора q_1^- описанного типа пригодна любая не имеющая нулей формальная собственная функция $\varphi^-(x)$ гамильтониана h^+ для спектрального числа $\lambda = E_c$ такая, что $\varphi^+(x) = 1/\varphi^-(x)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

4. Неприводимые операторы второго порядка

4.1. Основные обозначения и соотношения (случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Используя вещественные числа a и d, $d \neq 0$, а также вещественнозначную параметризующую функцию $f(x)$ из $C^4_{\mathbb{R}}$ такую, что либо $f(x)$ не имеет нулей, либо любой корень этой функции является простым её корнем и одновременно нулём $[f'(x)]^2 + d$ и точкой, в которой существует $f^{(5)}(x)$, с помощью равенств

$$h^{\pm} = -\partial^2 + V_{1,2}(x), \quad V_{1,2} = \mp 2f' + f^2 + \frac{f''}{2f} - \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 - \frac{d}{4f^2} - a \tag{26}$$

можно построить [14] гамильтонианы h^+ и h^-, сплетаемые неминимизуемыми операторами

$$q_2^{\pm} = \partial^2 \mp 2f(x)\partial + \widetilde{b}(x) \mp f'(x), \quad q_2^+ = (q_2^-)^t = (q_2^-)^{\dagger},$$
$$\widetilde{b} = f^2 - \frac{f''}{2f} + \left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \frac{d}{4f^2} \tag{27}$$

так, что:

$$q_2^{\pm} h^{\mp} = h^{\pm} q_2^{\pm}. \tag{28}$$

При этом в силу указанных выше ограничений на a, d и $f(x)$ потенциалы $V_1(x)$ и $V_2(x)$, а также функция $\widetilde{b}(x)$ являются вещественнозначными и принадлежат $C^2_{\mathbb{R}}$.

Произведение операторов q_2^+ и q_2^- имеет вид [14]:

$$q_2^{\pm} q_2^{\mp} = (h^{\pm} + a)^2 + d \equiv (h^{\pm} - \lambda_1)(h^{\pm} - \lambda_2), \ \lambda_{1,2} = \begin{cases} -a \pm i\sqrt{d}, & d > 0, \\ -a \pm \sqrt{-d}, & d < 0. \end{cases} \tag{29}$$

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 числа λ_1 и $\lambda_2 \neq \lambda_1$ образуют спектр матриц $\mathbf{T}$ операторов q_2^+ и q_2^-. Нетрудно проверить, что формулы (26) и (27) дают общее гладкое вещественное решение уравнений (28) относительно неизвестных функций $V_1(x)$, $V_2(x)$, $f(x)$ и $\widetilde{b}(x)$ в рассматриваемом случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Пусть функции $\varphi_1^{\pm}(x)$ и $\varphi_2^{\pm}(x)$ образуют канонический базис в $\ker q_2^{\pm}$ так, что

$$h^{\pm}\varphi_1^{\mp} = \lambda_1 \varphi_1^{\mp}, \quad h^{\pm}\varphi_2^{\mp} = \lambda_2 \varphi_2^{\mp}. \tag{30}$$

Тогда эти функции, как формальные собственные функции гамильтонианов с потенциалами из $C^2_{\mathbb{R}}$, принадлежат $C^4_{\mathbb{R}}$. Нетрудно убедиться в том, что вронскианы

$$W_{\pm}(x) = \varphi_1^{\pm}(x)\varphi_2^{\pm\prime}(x) - \varphi_1^{\pm\prime}(x)\varphi_2^{\pm}(x) \tag{31}$$

связаны с $f(x)$ соотношениями

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{W_+'(x)}{W_+(x)} = -\frac{1}{2}\frac{W_-'(x)}{W_-(x)} \tag{32}$$

и, что с помощью (30) производные этих вронскианов можно представить в виде

$$W_{\pm}'(x) = (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1^{\pm}(x)\varphi_2^{\pm}(x). \tag{33}$$

Из (32) следует, что вронскианы $W_+(x)$ и $W_-(x)$ выражаются через $f(x)$ равенством

$$W_{\pm}(x) = W_{\pm}(x_0) e^{\pm 2 \int_{x_0}^{x} f(x')\, dx'} \tag{34}$$

и тем самым не имеют нулей и принадлежат $C^5_{\mathbb{R}}$.

Будем без ограничения общности предполагать, что функции $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ нормированы так, что [24]

$$\varphi_1^+(x) = \frac{\varphi_2^-(x)}{W_-(x)}, \quad \varphi_2^+(x) = \frac{\varphi_1^-(x)}{W_-(x)}. \tag{35}$$

В этом случае с помощью прямолинейных вычислений можно показать, что $W_+(x)$ и $W_-(x)$ связаны соотношением

$$W_+(x) = -\frac{1}{W_-(x)} \tag{36}$$

и в силу (32) и (33) имеют место тождества

$$\varphi_1^+(x)\varphi_1^-(x) = \varphi_2^+(x)\varphi_2^-(x) = \frac{2f(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{37}$$

Кроме того, не ограничивая общности, будем предполагать, что функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ выбраны в случае $d < 0$ (т.е. тогда, когда λ_1 и λ_2 вещественны) вещественнозначными, а в случае $d > 0$ (т.е. тогда, когда λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены) комплексно сопряжёнными. При этом, очевидно, в первом случае вронскианы $W_+(x)$ и $W_-(x)$, а также функции $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ будут вещественнозначными, а во втором случае вронскианы $W_+(x)$ и $W_-(x)$ будут чисто мнимыми, а функции $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ связаны соотношением $\varphi_2^{+*}(x) = -\varphi_1^+(x)$.

Используя полученные в [14] разложения сплетающего оператора второго порядка в произведение сплетающих операторов первого порядка (с, вообще говоря, комплекснозначными и разрывными коэффициентами)

$$q_2^- = \Big(\partial + f + \frac{f'}{2f} \pm \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4f}\Big)\Big(\partial + f - \frac{f'}{2f} \mp \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4f}\Big), \tag{38}$$

которым соответсвуют промежуточные гамильтонианы

$$-\partial^2 + f^2 - \frac{f''}{2f} + \frac{3}{4}\Big(\frac{f'}{f}\Big)^2 \pm (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{f'}{2f^2} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{16f^2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \tag{39}$$

(с, вообще говоря, комплекснозначными и разрывными потенциалами[3]), и учитывая, что базис ядра правого оператора в правой части

[3]Принимая во внимание свойства $f(x)$, нетрудно увидеть, что коэффициенты (38) при ∂^0 и потенциалы (39) в случае $d > 0$ являются комплекснозначными (в подслучае $f(x) = \mathrm{Const}$ комплекснозначны только коэффициенты (38) при ∂^0, но не потенциалы (39)) и принадлежат соответственно $C^3_{\mathbb{R}}$ и $C^2_{\mathbb{R}}$, а в случае $d < 0$ являются вещественнозначными, но, вообще говоря, имеют полюса в нулях $f(x)$, обладая вне этих нулей той же гладкостью, что и в первом случае.

(38) состоит либо из $\varphi_1^-(x)$ либо из $\varphi_2^-(x)$, можно выразить $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ через $f(x)$:

$$\varphi_{1,2}^-(x) = \varphi_{1,2}^-(x_0)\sqrt{\frac{f(x)}{f(x_0)}}\exp\Big[-\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx' \pm \frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx'}{f(x')}\Big], \quad (40)$$

где x_0 выбирается между корнями $f(x)$. Аналогичным образом можно убедиться, что

$$\varphi_{1,2}^+(x) = \varphi_{1,2}^+(x_0)\sqrt{\frac{f(x)}{f(x_0)}}\exp\Big[\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx' \mp \frac{\lambda_1-\lambda_2}{4}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx'}{f(x')}\Big]. \quad (41)$$

При этом нетрудно проверить, что формальной собственной функцией промежуточного гамильтониана (39) на уровне λ_1 является $1/\varphi_1^{\mp}(x)$, а на уровне λ_2 соответственно $1/\varphi_2^{\pm}(x)$.

Предположим теперь, что изначально задана не параметризующая функция $f(x)$, а вещественнозначный потенциал $V_1(x) \in C^2_{\mathbb{R}}$ гамильтониана h^+ и формальные собственные функции $\varphi_1^-(x) \in C^4_{\mathbb{R}}$ и $\varphi_2^-(x) \in C^4_{\mathbb{R}}$ этого гамильтониана для спектральных чисел λ_1 и $\lambda_2 \neq \lambda_1$ соответственно, причём либо $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ вещественнозначны либо $\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$ и функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ взаимно комплексно сопряжены. В этом случае вещественные постоянные a и d, а также вещественнозначные параметризующую функцию $f(x)$ и потенциал $V_2(x)$ гамильтониана h^-, сплетаемого с h^+ операторами (27) в соответствии с (28), можно найти с помощью равенств (31), (32) и

$$\begin{gathered} a = -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \quad d = -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4}, \\ V_2(x) = V_1(x) + 4f'(x) = V_1(x) - 2[\ln W_-(x)]''. \end{gathered} \quad (42)$$

При этом для того, чтобы потенциал $V_2(x)$ не имел полюсов и принадлежал $C^2_{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно (см. (42)), чтобы вронскиан $W_-(x)$, принадлежащий в силу (33) пространству $C^5_{\mathbb{R}}$, не имел нулей. Используя (26) и (31)–(33), нетрудно проверить, что при отсутствии нулей у вронскиана $W_-(x)$ найденная указанным образом функция $f(x)$ принадлежит $C^4_{\mathbb{R}}$ и либо не имеет нулей либо любой корень этой функции является простым её корнем и одновременно нулём $[f'(x)]^2 + d$ и точкой, в которой существует $f^{(5)}(x)$.

Принимая во внимание, что любой корень $f(x)$ является одновременно и нулём $[f'(x)]^2 + d$, получаем, что в том случае, когда q_2^+ (q_2^-) является вещественно неприводимым оператором I рода, т.е. тогда, когда $\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0 \Leftrightarrow d > 0$, параметризующая функция $f(x)$ не имеет нулей. Более того в силу (37) функции $\varphi_1^+(x)$, $\varphi_1^-(x)$, $\varphi_2^+(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ в указанном случае также не имеют нулей.

Из соотношений (32) и (33) следует, что в том случае, когда оператор q_2^+ (q_2^-) является вещественно неприводимым оператором II рода, т.е. тогда, когда $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и обе функции $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ $(\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x))$ имеют корни (в силу (35) эти условия для функций с "+" и с "−" равносильны), параметризующая функция $f(x)$ не может не иметь нулей. Более того множество нулей $f(x)$ совпадает с множествами нулей $W'_+(x)$ и $W'_-(x)$ и с объединениями множеств нулей $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$, $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$, а также (см. (37)) $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_1^-(x)$, $\varphi_2^+(x)$ и $\varphi_2^-(x)$. При этом ввиду однократности корней $f(x)$ нули $\varphi_1^+(x)$ $(\varphi_2^-(x))$ не могут совпадать с нулями $\varphi_2^+(x)$ $(\varphi_1^-(x))$.

Неотрицательность $q_2^+ q_2^-$ на волновых функциях h^+ накладывает следующие ограничения на λ_1 и λ_2: либо $\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$ либо λ_1 и λ_2 лежат в одной спектральной лакуне h^+ (в т.ч. λ_1 и λ_2 могут лежать и на краях лакуны).

Неприводимость $q_2^\pm$ накладывает ещё одно ограничение на вещественные λ_1 и λ_2: эти числа не могут лежать ниже спектра h^+, т.к. в противном случае $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ имеют по одному нулю и ненормируемы на обеих бесконечностях, из чего следует, что вронскиан

$$W_-(x) = W_-(x_0) + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{x_0}^{x} \varphi_1^-(x')\varphi_2^-(x')\, dx' \tag{43}$$

стремится[4] при $x \to \pm\infty$ к бесконечностям разных знаков и имеет нуль, что противоречит отсутствию нулей $W_-(x)$. В силу симметрии между h^+ и h^- описанные в последних двух абзацах ограничения на расположение λ_1 и λ_2 относительно спектра h^+ справедливы и по отношению к спектру h^-.

[4]Строго доказать справедливость этого утверждения для случая гамильтонианов с потенциалами из класса K можно с помощью асимптотик и оценок, содержащихся в [25].

4.2. Классификация неприводимых операторов I рода.

В случае, когда q_2^- является вещественно неприводимым сплетающим оператором I рода, выполнены условия $\lambda_2 = \lambda_1^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$ и функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ являются (см. выше) взаимно комплексно сопряжёнными: $\varphi_2^-(x) = \varphi_1^{-*}(x)$. При этом их вронскиан $W_-(x) = 2i\mathrm{Im}\,\varphi_2^{-\prime}(x)\varphi_1^-(x)$ является чисто мнимым и $iW_-(x)$ в силу равенства

$$iW_-'(x) = -2\mathrm{Im}\,\lambda_1|\varphi_1^-(x)|^2 \tag{44}$$

изменяется монотонно. Поскольку

$$iW_-(x) = iW_-(x_0) - 2\mathrm{Im}\,\lambda_1 \int\limits_{x_0}^{x} |\varphi_1^-(x')|^2\, dx', \tag{45}$$

постольку необходимым условием отсутствия корней у $W_-(x)$ (т.е. одновременной гладкости $V_1(x)$ и $V_2(x)$, см. (42)) является нормируемость $\varphi_1^-(x)$ по крайней мере на одной из бесконечностей. Таким образом, принимая во внимание, что нормируемых на обеих бесконечностях функций $\varphi_1^-(x)$ при комплексном λ_1 ($\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$) быть не может, получаем, что существует только один описываемый ниже тип неприводимых операторов I-го рода.

4.2.1. Неприводимые операторы I рода: тип I.1.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка I рода q_2^- назовём оператором *типа* I.1, если:

(1) $\lambda_1 = \lambda_2^*$, $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq 0$;

(2) функция $\varphi_1^-(x) = \varphi_2^{-*}(x)$ нормируема только на одной из бесконечностей.

В этом случае:

(1) точечные спектры h^+ и h^- одинаковы;

(2) оператор q_2^+ является оператором этого же типа I.1.

Сплетающие операторы типа I.1 ранее описаны в [14, 15]. Для построения сплетающего оператора q_2^- типа I.1 в общем случае пригодны не любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2 (ср. с [15]), т.к. можно привести пример (см. следствие 1 в [2]), в котором $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ удовлетворяют условиям 1 и 2, но их вронскиан имеет корень, что ведёт к наличию полюсов у коэффициентов $q_2^\pm$ и h^-. В том случае, когда h^+ имеет потенциал из K, условия 1 и 2 являются достаточными для построения оператора q_2^- типа I.1, т.к. в этом случае (см.

следствие 1 в [2]) вронскиан $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ стремится к нулю на той бесконечности, на которой нормируемы $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$, и в силу (44) не имеет нулей, что обеспечивает гладкость коэффициентов $q_2^\pm$ и h^-. При этом принадлежность потенциала $V_2(x)$ классу K, а также бесконечная гладкость коэффициентов $q_2^\pm$ следуют из леммы 1 в [2].

Более общие достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ для того, чтобы порождаемый ими оператор q_2^- был оператором типа I.1, очевидно, состоят в том, что эти функции помимо условий 1 и $\varphi_1^-(x) = \varphi_2^{-*}(x)$ должны удовлетворять условию (обеспечивающему стремление $W_-(x)$ к нулю на одной из бесконечностей и тем самым отсутствие нулей у $W_-(x)$):

$$\varphi_1^{-\prime}(x) = o(1/\varphi_1^-(x)) \tag{46}$$

при x, стремящемся к одной из бесконечностей, или, в частности, условиям

$$\varphi_1^-(x) = o(1), \quad \varphi_1^{-\prime}(x) = O(1) \tag{47}$$

(ср. с [15]). Поскольку из достаточного условия следует необходимое, постольку из (46) следует нормируемость $\varphi_1^-(x)$ на той из бесконечностей, на которой выполнено (46).

4.3. Классификация неприводимых операторов II рода.

В случае, когда q_2^- является вещественно неприводимым сплетающим оператором II рода, выполнены следующие условия: $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и каждая из функций $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ имеет по крайней мере по одному корню, причём обе эти функции являются (см. выше) вещественнозначными.

При рассмотрении первых девяти типов неприводимых сплетающих операторов II рода будем предполагать, что λ_1 и λ_2 располагаются между энергиями l-го и $l+1$-го снизу связанных состояний h^+ так, что

$$E_{l,+} \leqslant \lambda_2 < \lambda_1 \leqslant E_{l+1,+} \leqslant E_c \tag{48}$$

либо, если $E_{l,+}$ соответствует самому верхнему связанному состоянию h^+ и $E_{l,+} < E_c$, что λ_1 и λ_2 располагаются между $E_{l,+}$ и E_c:

$$E_{l,+} \leqslant \lambda_2 < \lambda_1 < E_c. \tag{49}$$

4.3.1. Неприводимые операторы II рода: тип II.1.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.1, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$);

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и ненормируема на обеих бесконечностях, $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+2$ корня (из чего следует, что $\varphi_2^-(x)$ ненормируема на обеих бесконечностях).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением двух дополнительных уровней энергии $E_{l+1,-} = \lambda_2$ и $E_{l+2,-} = \lambda_1$, на которых находятся связанные состояния с волновыми функциями соответственно $\varphi_2^+(x)$ и $\varphi_1^+(x)$;

(2) q_2^+ является оператором описываемого ниже типа II.9.

Сплетающие операторы типа II.1 ранее описаны в [17] (случай (а)). Для построения оператора q_2^- типа II.1 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ для h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2 (доказательство см. в [17]).

Аналогичный тип сплетающих операторов существует (см. [10, 11]) и в случае с периодическим потенциалом у h^+, когда

$$E_l < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l'}, \qquad (50)$$

где E_l и $E_{l'}$ – границы l-ой лакуны, и $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ – неблоховские собственные функции h^+. При этом так же, как и выше спектр h^- отличается от спектра h^+ только появлением двух дополнительных уровней энергии λ_2 и λ_1, на которых находятся связанные состояния с волновыми функциями соответственно $\varphi_2^+(x)$ и $\varphi_1^+(x)$.

4.3.2. Неприводимые операторы II рода: тип II.2.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.2, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$);

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей, $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+2$ корня (из чего следует, что $\varphi_2^-(x)$ ненормируема на обеих бесконечностях).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением одного дополнительного уровня энергии $E_{l+1,-} = \lambda_2$, на котором находится связанное состояние с волновой функцией $\varphi_2^+(x)$;

(2) q_2^+ является оператором описываемого ниже типа II.8.

Сплетающие операторы типа II.2 ранее описаны в [17] (случай (b)). Для построения оператора q_2^- типа II.2 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ для h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2 (доказательство см. в [17]).

4.3.3. Неприводимые операторы II рода: тип II.3.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.3, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 = E_{l+1,+}$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на обеих бесконечностях (т.е. представляет собой волновую функцию), $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+2$ корня (из чего следует, что $\varphi_2^-(x)$ ненормируема на обеих бесконечностях).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только исчезновением уровня энергии $E_{l+1,+} = \lambda_1$ и появлением уровня энергии $E_{l+1,-} = \lambda_2$, на котором находится связанное состояние с волновой функцией $\varphi_2^+(x)$;

(2) q_2^+ является оператором описываемого ниже типа II.7.

Сплетающие операторы типа II.3 ранее описаны в [17] (случай (c)). Для построения оператора q_2^- типа II.3 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ для h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2 (доказательство см. в [17]).

4.3.4. Неприводимые операторы II рода: тип II.4.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.4, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$);

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и ненормируема на обеих бесконечностях, $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей.

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением одного дополнительного уровня энергии $E_{l+1,-} = \lambda_1$, на котором находится связанное состояние с волновой функцией $\varphi_1^+(x)$;

(2) q_2^+ является оператором описываемого ниже типа II.6.

Убедимся, что для построения оператора q_2^- типа II.4 можно использовать любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$

для h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\varphi_2^-(x)$ нормируема на $-\infty$ (случай с $+\infty$ рассматривается аналогично). Покажем сначала, что самый левый корень $\varphi_1^-(x)$ лежит левее x_0 — самого левого корня $\varphi_2^-(x)$. Предположим противное и будем без ограничения общности считать, что $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ левее x_0 положительны. Тогда при любом $x < x_0$ положителеьна левая часть следующей цепочки равенств:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int\limits_x^{x_0} \varphi_1^-(x')\varphi_2^-(x')\, dx'$$
$$= \int\limits_x^{x_0} W_-'(x')\, dx' = \varphi_1^-(x_0){\varphi_2^-}'(x_0) - W_-(x). \tag{51}$$

Если доказать, что $W(x) \geqslant 0$ при $x < x_0$, то тем самым ввиду очевидных условий ${\varphi_2^-}'(x_0) < 0$ и $\varphi_1^-(x_0) \geqslant 0$ будет показано, что правая часть (51) не превосходит нуля. Из получившегося противоречия будет следовать ошибочность исходного предположения.

Предположим, что при некотором $x_1 < x_0$ вронскиан $W(x_1) < 0$. Тогда, принимая во внимание монотонный рост $W(x)$ при $x < x_0$ ($\Leftarrow$ $W'(x) = (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1^-(x)\varphi_2^-(x)$), получаем, что при любом $x < x_1$ имеет место следующая цепочка соотношений:

$$W(x_1) \int\limits_x^{x_1} \frac{dx'}{[\varphi_2^-(x')]^2} > \int\limits_x^{x_1} \frac{W(x')\, dx'}{[\varphi_2^-(x')]^2} = -\int\limits_x^{x_1} \Big[\frac{\varphi_1^-(x')}{\varphi_2^-(x')}\Big]' dx'$$
$$= \frac{\varphi_1^-(x)}{\varphi_2^-(x)} - \frac{\varphi_1^-(x_1)}{\varphi_2^-(x_1)} > -\frac{\varphi_1^-(x_1)}{\varphi_2^-(x_1)}, \tag{52}$$

причём левая часть последней цепочки стремится при $x \to -\infty$ к $-\infty$, а правая часть постоянна и конечна. Следовательно, $W(x) \geqslant 0$ при любом $x < x_0$ и утверждение относительно корней $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ доказано.

Теперь, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ правее своих самых правых нулей положительны. То, что $W(x) > 0$ при любом x, не меньшем x_0' – самого левого корня $\varphi_1^-(x)$, можно доказать так же, как это было сделано при рассмотрении других случаев в [17] (при этом следует помнить, что нули

$\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ в силу теоремы Штурма чередуются). Таким образом, остаётся доказать, что $W(x) > 0$ левее x_0'. Положительность $W'(x) = (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1^-(x)\varphi_2^-(x)$ левее x_0' следует из чередования нулей $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$, из одинакового числа нулей у $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$, из того, что самый левый нуль $\varphi_1^-(x)$ лежит левее самого левого нуля $\varphi_2^-(x)$ и из условия $\lambda_1 > \lambda_2$. Таким образом, $W(x)$ при $x < x_0'$ монотонно растёт и для завершения доказательства достаточно показать, что $W(x)$ не может принимать левее x_0' отрицательных значений. Последнее легко проверяется так же, как и выше с помощью цепочки подобной (52).

4.3.5. Неприводимые операторы II рода: тип II.5.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.5, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$);

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей, $\varphi_2^-(x)$ также имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей.

В этом случае:

(1) точечные спектры h^- и h^+ одинаковы;

(2) q_2^+ является оператором этого же типа II.5.

Убедиться в том, что для построения оператора q_2^- типа II.5 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2, можно так же, как и в случае с оператором q_2^- типа II.4.

Аналогичный тип сплетающих операторов существует (см. [10, 11]) и в случае с периодическим потенциалом у h^+, когда

$$E_l < \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l'}, \tag{53}$$

где E_l и $E_{l'}$ – границы l-ой лакуны, и $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ – блоховские собственные функции h^+. При этом так же, как и выше спектры h^- и h^+ одинаковы.

4.3.6. Неприводимые операторы II рода: тип II.6.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.6, если:

(1) $E_{l,+} < \lambda_2 < \lambda_1 = E_{l+1,+}$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на обеих бесконечностях (т.е. представляет собой волновую функцию связанного состояния h^+), $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей.

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только отсутствием уровня $E_{l+1,+} = \lambda_1$;

(2) q_2^+ является оператором типа II.4.

Убедиться в том, что для построения оператора q_2^- типа II.6 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2, можно так же, как и в случаях с операторами q_2^- типов II.4 и II.5.

4.3.7. Неприводимые операторы II рода: тип II.7.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.7, если:

(1) $E_{l,+} = \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$), причём $l \geqslant 1$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и ненормируема на обеих бесконечностях, $\varphi_2^-(x)$ имеет l корней и нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением уровня $E_{l,-} = \lambda_1$, на котором находится связанное состояние с волновой функцией $\varphi_1^+(x)$ и отсутствием уровня $E_{l,+} = \lambda_2$;

(2) q_2^+ является оператором типа II.3.

Сплетающие операторы типа II.7 ранее описаны в [17] (случай (d)). Убедимся, что для построения оператора q_2^- типа II.7 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2. Действительно, в том, что самый левый (правый) корень $\varphi_1^-(x)$ лежит левее (правее) самого левого (правого) корня $\varphi_2^-(x)$ можно убедиться так же, как и при рассмотрении оператора q_2^- типа II.4. Таким образом, в соответствии с теоремой Штурма корни $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ чередуются. Будем, не ограничивая общности, считать, что $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ положительны правее своих самых правых корней. Тогда в отрицательности $W(x)$ между крайними корнями $\varphi_1^-(x)$ можно убедиться так же, как и в [17], а в отрицательности $W(x)$ на оставшейся части оси так же, как и в положительности $W(x)$ левее x_0' в случае с оператором q_2^- типа II.4.

4.3.8. Неприводимые операторы II рода: тип II.8.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.8, если:

(1) $E_{l,+} = \lambda_2 < \lambda_1 < E_{l+1,+}$ (или $< E_c$), причём $l \geqslant 1$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на одной из бесконечностей, $\varphi_2^-(x)$ имеет l корней и нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только отсутствием уровня $E_{l,+} = \lambda_2$;

(2) q_2^+ является оператором типа II.2.

Сплетающие операторы типа II.8 ранее описаны в [17] (случай (e)). Убедиться в том, что для построения оператора q_2^- типа II.8 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2, можно так же, как и в случае с оператором q_2^- типа II.7.

4.3.9. Неприводимые операторы II рода: тип II.9.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.9, если:

(1) $E_{l,+} = \lambda_2 < \lambda_1 = E_{l+1,+}$, причём $l \geqslant 1$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема на обеих бесконечностях, $\varphi_2^-(x)$ имеет l корней и нормируема на обеих бесконечностях (т.е. $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ являются волновыми функциями связанных состояний h^+).

В этом случае:

(1) точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только отсутствием уровней $E_{l,+} = \lambda_2$ и $E_{l+1,+} = \lambda_1$;

(2) q_2^+ является оператором типа II.1.

Сплетающие операторы типа II.9 ранее описаны в [17] (случай (f)). Убедиться в том, что для построения оператора q_2^- типа II.9 пригодны любые формальные собственные функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ гамильтониана h^+, удовлетворяющие условиям 1 и 2, можно так же, как и в случаях с операторами q_2^- типов II.7 и II.8.

Ниже в разделе 4.4 будет показано, что девять описанных выше типов вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка II рода исчерпывают все случаи таких операторов, встречающиеся в теоремах о приводимости из [2], но в общем случае существуют и другие типы вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка II рода, например, описываемый ниже тип II.10.

4.3.10. Неприводимые операторы II рода: тип II.10.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка II рода q_2^- назовём оператором *типа* II.10, если:

(1) λ_1 и λ_2 совпадают с границами лакуны в непрерывном спектре h^+ и $\lambda_2 < \lambda_1$;

(2) $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ являются собственными функциями непрерывного спектра h^+, причём $\varphi_1^-(x), \varphi_2^-(x), \varphi_1^+(x), \varphi_2^+(x) \notin L_2(\mathbb{R})$.

В этом случае:

(1) точечные спектры h^+ и h^- совпадают;

(2) q_2^+ является оператором этого же типа II.10.

Сплетающие ператоры q_2^- типа II.10 в случае, когда потенциал h^+ является периодическим, ранее описаны в [16].

Замечание 2. В [17] приведено доказательство существования операторов q_2^- типов II.7–II.9 для более узкого класса гамильтонианов, чем в случае с операторами q_2^- типов II.1–II.3. Предложенное здесь доказательство существования операторов q_2^- типов II.7–II.9 пригодно для столь же широкого класса гамильтонианов, как и в случае с операторами q_2^- типов II.1–II.3.

4.4. Доказательство отсутствия других типов неприводимых сплетающих операторов II рода.

В этом разделе будет показано, что операторы q_2^- типов II.1–II.9 исчерпывают все возможные случаи вещественно неприводимых сплетающих операторов второго порядка II рода при условии, что λ_1 и λ_2 удовлетворяют неравенствам (48) или (49). Данное условие выполнено, например, в условиях теорем о приводимости из [2]. Таким образом, сделанное выше утверждение о полноте операторов q_2^- типов II.1–II.9 справедливо в силу следующего.

1. Случаев, когда $\lambda_2 = E_{l,+}$ ($\lambda_1 = E_{l+1,+}$) и $\varphi_2^-(x)$ ($\varphi_1^-(x)$) ненормируема на обеих бесконечностях, не может быть в силу лемм 4 и 6 из [2].

2. Случаев, когда обе функции $\varphi_1^-(x)$ и $\varphi_2^-(x)$ имеют $l+2$ нуля (либо $l+1$ нуль) и ненормируемы на обеих бесконечностях, не может быть потому, что в противном случае $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ были бы в силу леммы 5 из [2] волновыми функциями соседних уровней энергии h^- и имели бы (см. (35)) одинаковое число нулей $l+2$ ($l+1$).

3. Случаев, когда $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+2$ нуля, а $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+1$ нуль и ненормируема на обеих бесконечностях, не может быть, т.к. в противном случае $\varphi_1^+(x)$ и $\varphi_2^+(x)$ были бы в силу леммы 5 из [2] волновыми функциями соседних уровней энергии h^-, причём (см. (35)) функция

$\varphi_1^+(x)$, соответствующая верхнему из этих уровней, имела бы $l+1$ нуль, а $\varphi_2^+(x)$, соответствующая нижнему уровню, имела бы $l+2$ нуля.

4. Случаев, когда $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема по крайней мере на одной из бесконечностей, а $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+1$ корень и ненормируема на обеих бесконечностях, не может быть, т.к. в противном случае спектр h^- отличался бы от спектра h^+ (см. леммы 3, 5 и 6 из [2]) только появлением дополнительного уровня энергии $E_{l+1,-} = \lambda_2$, причём для спектрального числа $\lambda_1 > \lambda_2$ нашлась бы формальная собственная функция $\varphi_1^+(x)$ с $l+1$ нулём (см. (35)), чего не может быть.

5. Случаев, когда $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+2$ корня, а $\varphi_2^-(x)$ имеет $l+1$ корень и нормируема только на одной из бесконечностей, не может быть, т.к. в противном случае спектр h^- отличался бы от спектра h^+ (см. леммы 3, 5 и 6 из [2]) только появлением дополнительного уровня энергии $E_{l+1,-} = \lambda_1$, причём для спектрального числа $\lambda_2 < \lambda_1$ нашлась бы формальная собственная функция $\varphi_2^+(x)$ с $l+2$ нулями (см. (35)), нормируемая в силу леммы 5 из [2] только на одной из бесконечностей, чего не может быть.

6. Наконец, случаев, в которых $\varphi_1^-(x)$ имеет $l+2$ корня, а $\varphi_2^-(x)$ имеет l корней и нормируема на обеих бесконечностях, не может быть в силу того, что в противном случае у h^- для спектрального числа λ_1 нашлась бы формальная собственная функция $\varphi_1^+(x)$ с l нулями, а для спектрального числа $\lambda_2 < \lambda_1$ – формальная собственная функция $\varphi_2^+(x)$ с $l+2$ нулями (см. (35)), чего не может быть.

4.5. Основные обозначения и соотношения (случай $\lambda_1 = \lambda_2$).

Используя вещественное число a и вещественнозначную параметризующую функцию $f(x)$ из $C^4_{\mathbb{R}}$ такую, что либо $f(x)$ не имеет нулей либо любой корень x_0 этой функции является двойным её корнем и одновременно нулём $f'''(x)$ и точкой, в которой существует $f^{(5)}(x)$ и выполнено условие

$$f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x_0) + f^{(5)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f_6(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2), \quad x \to x_0, \tag{54}$$

где $f_6(x_0)$ – некоторая постоянная, с помощью равенств (26) и (27) при $d = 0$ можно построить [14] гамильтонианы h^+ и h^-, сплетаемые неминимизуемыми операторами q_2^+ и q_2^- так, что имеет место равенство (28). При этом нетрудно проверить, что в силу указанных выше ограничений на a и $f(x)$ потенциалы $V_1(x)$ и $V_2(x)$, а также функция $\widetilde{b}(x)$ являются вещественнозначными и принадлежат $C^2_{\mathbb{R}}$.

Произведение операторов q_2^+ и q_2^- имеет вид [14]:

$$q_2^{\pm} q_2^{\mp} = (h^{\pm} + a)^2 \equiv (h^{\pm} - \lambda_1)(h^{\pm} - \lambda_2), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -a. \tag{55}$$

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 числа λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1$ образуют спектр матриц $\mathbf{T}$ операторов q_2^+ и q_2^-. Нетрудно проверить, что формулы (26) и (27) при $d = 0$ дают общее гладкое вещественное нетривиальное (т. е. с неминимизуемыми сплетающими операторами) решение уравнений (28) относительно неизвестных функций $V_1(x)$, $V_2(x)$, $f(x)$ и $\widetilde{b}(x)$ в рассматриваемом случае $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть функции $\varphi_{10}^{\pm}(x)$ и $\varphi_{11}^{\pm}(x)$ образуют канонический базис в $\ker q_2^{\pm}$ так, что

$$h^{\pm} \varphi_{10}^{\mp} = \lambda_1 \varphi_{10}^{\mp}, \quad (h^{\pm} - \lambda_1)\varphi_{11}^{\mp} = \varphi_{10}^{\mp}. \tag{56}$$

Тогда эти функции, как формальные собственные и присоединённые функции гамильтонианов с потенциалами из $C^2_{\mathbb{R}}$, принадлежат $C^4_{\mathbb{R}}$. Нетрудно убедиться в том, что вронскианы

$$W_{\pm}(x) = \varphi_{10}^{\pm}(x)\varphi_{11}^{\pm\prime}(x) - \varphi_{10}^{\pm\prime}(x)\varphi_{11}^{\pm}(x) \tag{57}$$

связаны с $f(x)$ соотношениями (32) и, что с помощью (56) производные этих вронскианов можно представить в виде

$$W_{\pm}'(x) = -[\varphi_{10}^{\pm}(x)]^2. \tag{58}$$

Из (32) следует, что вронскианы $W_+(x)$ и $W_-(x)$ выражаются через $f(x)$ равенством (34) и тем самым не имеют нулей и принадлежат $C^5_{\mathbb{R}}$.

С помощью прямолинейных вычислений нетрудно проверить, что функции $\varphi_{10}^+(x)$ и $\varphi_{11}^+(x)$ можно выбрать так (и без ограничения общности выберем их так), что

$$\varphi_{10}^+(x) = \frac{\varphi_{10}^-(x)}{W_-(x)}, \quad \varphi_{11}^+(x) = -\frac{\varphi_{11}^-(x)}{W_-(x)}. \tag{59}$$

Кроме того, нетрудно показать, что при этом $W_+(x)$ и $W_-(x)$ связаны соотношением (36) и в силу (32) и (58) имеет место тождество

$$\varphi_{10}^+(x)\varphi_{10}^-(x) = 2f(x). \tag{60}$$

Не ограничивая общности, будем предполагать, что функции $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ выбраны вещественнозначными. При этом, очевидно, вронскианы $W_+(x)$ и $W_-(x)$ и функции $\varphi_{10}^+(x)$ и $\varphi_{11}^+(x)$ также будут вещественнозначными.

Используя полученное в [14] разложение сплетающего оператора второго порядка в произведение сплетающих операторов первого порядка (с, вообще говоря, разрывными коэффициентами) (38) при $\lambda_1 = \lambda_2$, которому соответствует промежуточный гамильтониан (39) при $\lambda_1 = \lambda_2$ (с, вообще говоря, разрывным потенциалом) и учитывая, что базис ядра правого оператора в правой части (38) в рассматриваемом случае состоит из $\varphi_{10}^-(x)$, можно выразить $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ через $f(x)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{10}^-(x) &= \varphi_{10}^-(x_0)\sqrt{\frac{f(x)}{f(x_0)}}\exp\Big[-\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx'\Big],\\ \varphi_{11}^-(x) &= \varphi_{10}^-(x)\Big[\frac{\varphi_{11}^-(x_0)}{\varphi_{10}^-(x_0)} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx'}{f(x')}\Big],\end{aligned} \tag{61}$$

где x_0 выбирается между корнями $f(x)$. Аналогичным образом можно убедиться, что

$$\begin{aligned}\varphi_{10}^+(x) &= \varphi_{10}^+(x_0)\sqrt{\frac{f(x)}{f(x_0)}}\exp\Big[\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx'\Big],\\ \varphi_{11}^+(x) &= \varphi_{10}^+(x)\Big[\frac{\varphi_{11}^+(x_0)}{\varphi_{10}^+(x_0)} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx'}{f(x')}\Big].\end{aligned} \tag{62}$$

Нетрудно проверить, что формальными собственными функциями промежуточного гамильтониана (39) на уровне $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ в рассматриваемом случае являются $1/\varphi_{10}^+(x)$ и $1/\varphi_{10}^-(x)$.

Предположим теперь, что изначально задана не параметризующая функция $f(x)$, а вещественнозначные потенциал $V_1(x) \in C_{\mathbb{R}}^2$ гамильтониана h^+ и формальные собственная и присоединённая функции $\varphi_{10}^-(x) \in C_{\mathbb{R}}^4$ и $\varphi_{11}^-(x) \in C_{\mathbb{R}}^4$ этого гамильтониана для вещественного спектрального числа λ_1 так, что имеют место соотношения (56) с верхними знаками. Тогда вещественную постоянную a, а также вещественнозначные параметризующую функцию $f(x)$ и потенциал $V_2(x)$

гамильтониана h^-, сплетаемого с h^+ операторами (27) при $d = 0$ в соответствии с (28), можно найти с помощью равенств (32), (57) и

$$a = -\lambda_1, \quad V_2(x) = V_1(x) + 4f'(x) = V_1(x) - 2[\ln W_-(x)]''. \qquad (63)$$

При этом для того, чтобы потенциал $V_2(x)$ не имел полюсов и принадлежал $C^2_{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно (см. (63)), чтобы вронскиан $W_-(x)$, принадлежащий в силу (58) пространству $C^5_{\mathbb{R}}$, не имел нулей. Используя (26), (32), (57) и (58), нетрудно проверить, что при отсутствии нулей у вронскиана $W_-(x)$ найденная указанным образом функция $f(x)$ принадлежит $C^4_{\mathbb{R}}$ и либо не имеет нулей либо любой корень этой функции является двойным её корнем и одновременно нулём $f'''(x)$ и точкой, в которой существует $f^{(5)}(x)$ и выполнено условие (54).

Из соотношений (32) и (58) следует, что в том случае, когда оператор q_2^+ (q_2^-) является вещественно неприводимым оператором III рода, т.е. тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и функция $\varphi^+_{10}(x)$ ($\varphi^-_{10}(x)$) имеет по крайней мере один корень (в силу (59) эти условия для функций с "+" и с "−" равносильны), параметризующая функция $f(x)$ не может не иметь нуля (нулей). Более того в силу (32), (58), (59) и (60) множество нулей $f(x)$ совпадает с множествами нулей $W'_+(x)$ и $W'_-(x)$, а также $\varphi^+_{10}(x)$ и $\varphi^-_{10}(x)$, причём все нули $f(x)$, $W'_+(x)$ и $W'_-(x)$ являются двукратными, а $\varphi^+_{10}(x)$ и $\varphi^-_{10}(x)$ – однократными.

Неприводимость $q_2^\pm$ накладывает следующее ограничение на $\lambda_1 = \lambda_2$: это число не может лежать ниже спектра h^+, т.к. в противном случае $\varphi^-_{10}(x)$ имеет один корень и ненормируема на обеих бесконечностях, из чего следует, что вронскиан

$$W_-(x) = W_-(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} [\varphi^-_{10}(x')]^2\, dx' \qquad (64)$$

(см. (58)) стремится при $x \to \pm\infty$ к бесконечностям разных знаков и имеет нуль, что противоречит отсутствию нулей у $W_-(x)$. В силу симметрии между h^+ и h^- указанное ограничение на расположение $\lambda_1 = \lambda_2$ относительно спектра h^+ справедливо и по отношению к спектру h^-.

Равенство (64) накладывает на φ^-_{10} следующее ограничение: необходимым условием отсутствия корней у $W_-(x)$ (т.е. отсутствия полюсов у потенциала гамильтониана h^-) является нормируемость $\varphi^-_{10}(x)$ по крайней мере на одной из бесконечностей.

Достаточным условием отсутствия нулей у $W_-(x)$ в силу строгого убывания $W_-(x)$ на всей оси (см. (58)) является стремление $W_-(x)$ к нулю на $+\infty$ или на $-\infty$. Покажем, что достаточное условие стремления $W_-(x)$ к нулю на $+\infty$ (на $-\infty$) состоит в том, что:

(1) $\varphi_{10}^-(x)$ либо нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$) либо ограничена при $x \geqslant 0$ ($x \leqslant 0$);

(2) $\varphi_{11}^-(x)$ либо нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$) либо ограничена при $x \geqslant 0$ ($x \leqslant 0$);

(3) существует x_0 такое, что либо $\varphi_{10}^-(x)$ либо $\varphi_{11}^-(x)$ не имеет нулей при $x \geqslant x_0$ ($x \leqslant x_0$) (для гамильтонианов с потенциалами из класса K это условие выполнено при $\lambda_1 \leqslant 0$ в силу асимптотик, полученных в [25]).

Ограничимся рассмотрением случая с $+\infty$. Предположим, что предел $W_-(x)$ при $x \to +\infty$ отрицателен либо равен $-\infty$. Тогда существует $x_1 \geqslant x_0$ такое, что $W_-(x_1) < 0$. Пусть (см. условие 3) при $x \geqslant x_0$ не имеет корней $\varphi_{10}^-(x)$. Тогда,

$$W_-(x_1)\int\limits_{x_1}^{x}\frac{dx'}{[\varphi_{10}^-(x')]^2} > \int\limits_{x_1}^{x}\frac{W_-(x')\,dx'}{[\varphi_{10}^-(x')]^2} = \frac{\varphi_{11}^-(x)}{\varphi_{10}^-(x)} - \frac{\varphi_{11}^-(x_1)}{\varphi_{10}^-(x_1)},\ x > x_1, \tag{65}$$

откуда с учётом условия 1 следует, что $\varphi_{11}^-(x)/\varphi_{10}^-(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$ и, в частности, что существует $x_2 \geqslant x_1$ такое, что $\varphi_{11}^-(x)$ при $x \geqslant x_2$ не имеет нулей. При этом, очевидно, справедливо неравенство

$$W_-(x_2)\int\limits_{x_2}^{x}\frac{dx'}{[\varphi_{11}^-(x')]^2} > \frac{\varphi_{10}^-(x_2)}{\varphi_{11}^-(x_2)} - \frac{\varphi_{10}^-(x)}{\varphi_{11}^-(x)}, \quad x > x_2, \tag{66}$$

из которого с учётом условия 2 следует, что $\varphi_{10}^-(x)/\varphi_{11}^-(x)$ стремится при $x \to +\infty$ к $+\infty$, что противоречит доказанному выше. Аналогичным образом приводится к противоречию и случай, когда $\varphi_{11}^-(x)$ не имеет нулей при $x > x_0$. Невозможность случая, когда $W_-(x)$ стремится при $x \to +\infty$ к положительному пределу $W_-(+\infty)$, доказывается аналогично, только при этом $W_-(x)$ следует сравнивать не с $W_-(x_{1,2})$, а с $W_-(+\infty)$.

В силу соотношений (58) и (64) для того, чтобы $\varphi_{10}^-(x)$ ($\varphi_{10}^+(x)$) была нормируемой на одной из бесконечностей, необходимо и достаточно, чтобы предел $W_-(x)$ ($W_+(x) \equiv -1/W_-(x)$) при x, стремящемся к этой бесконечности, был конечен. Соответственно для того, чтобы $\varphi_{10}^-(x)$ ($\varphi_{10}^+(x)$) была нормируемой на всей оси (т.е. была волновой функцией связанного состояния h^+ (h^-) на уровне λ_1), необходимо и достаточно, чтобы пределы $W_-(x)$ ($W_+(x)$) при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ были конечны.

4.6. Классификация неприводимых операторов III рода.

4.6.1. Неприводимые операторы III рода: тип III.1.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка III рода q_2^- назовём оператором *типа* III.1, если:

(1) $\lambda_1 = E_{l+}$, причём $l \geqslant 1$ (λ_1 может находиться вне, внутри или на границе непрерывного спектра h^+);

(2) $+\infty > W_-(-\infty) > W_-(+\infty) = 0$ либо $0 = W_-(-\infty) > W_-(+\infty) > -\infty$.

В этом случае:

(1) $0 > W_+(-\infty) > W_+(+\infty) = -\infty$ либо $+\infty = W_+(-\infty) > W_+(+\infty) > 0$, откуда следует (см. раздел 4.5), что $\varphi_{10}^+(x)$ нормируема только на одной из бесконечностей; соответственно точечный спектр h^- отличается[5] от точечного спектра h^+ только отсутствием уровня $E_{l,+} = \lambda_1$;

(2) $\varphi_{10}^-(x)$ (см. раздел 4.5) нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией связанного состояния h^+); если $V_1(x) \in K$ и $\lambda_1 \leqslant 0$, то $\varphi_{11}^-(x)$ в силу лемм 5 и 6 из [2] является нормируемой только на одной из бесконечностей (на $+\infty$, если $W_-(+\infty) = 0$ и на $-\infty$, если $W_-(-\infty) = 0$).

(3) q_2^+ является оператором описываемого ниже типа III.4.

Для построения оператора q_2^- типа III.1 в случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ в силу приведённого выше достаточного условия отсутствия нулей у $W_-(x)$ и леммы 2 из [2] пригодны любые удовлетворяющие равенствам (56) собственная функция $\varphi_{10}^-(x) \in L_2(\mathbb{R})$, имеющая по крайней мере один корень, и формальная присоединённая функция $\varphi_{11}^-(x)$, нормируемая только на одной из бесконечностей.

В общем случае для построения оператора q_2^- типа III.1 пригодна любая собственная функция $\varphi_{10}^-(x) \in L_2(\mathbb{R})$ гамильтониана h^+ для

[5] В утверждениях о соотношении точечных спектров гамильтонианов h^+ и h^-, сплетаемых операторами типов III.1–III.4, предполагается, что рассматриваемые гамильтонианы имеют для каждого спектрального числа не более одной формальной собственной функции (с точностью до постоянного сомножителя), нормируемой на $+\infty$ (на $-\infty$).

собственного числа λ_1, имеющая по крайней мере один корень. Формальную же присоединённую функцию $\varphi_{11}^-(x)$ можно выбирать следующим образом. Пусть $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$ – линейно независимая от $\varphi_{10}^-(x)$ формальная собственная функция h^+ на уровне λ_1, выбранная так, что

$$W_0 = \varphi_{10}^-(x)\widetilde{\varphi}_{10}^{-\prime}(x) - \varphi_{10}^{-\prime}(x)\widetilde{\varphi}_{10}^-(x) > 0, \tag{67}$$

и $\widetilde{\varphi}_{11}^-(x)$ – некоторая формальная присоединённая функция h^+ на уровне λ_1 для собственной функции $\varphi_{10}^-(x)$. Тогда общий вид присоединённой функции h^+ на уровне λ_1 для собственной функции $\varphi_{10}^-(x)$ следующий:

$$\varphi_{11}^-(x) = \widetilde{\varphi}_{11}^-(x) + C_1\varphi_{10}^-(x) + C_2\widetilde{\varphi}_{10}^-(x). \tag{68}$$

Чтобы вронскиан $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ равный

$$W_-(x) = \widetilde{W}(x) + C_2W_0, \quad \widetilde{W}(x) = \varphi_{10}^-(x)\widetilde{\varphi}_{11}^{-\prime}(x) - \varphi_{10}^{-\prime}(x)\widetilde{\varphi}_{11}^-(x) \tag{69}$$

обращался в нуль на одной из бесконечностей (что обеспечивает принадлежность q_2^- к типу III.1), необходимо и достаточно, чтобы либо $C_2 = -\widetilde{W}(+\infty)/W_0$ либо $C_2 = -\widetilde{W}(-\infty)/W_0$. В случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ функция $\varphi_{11}^-(x)$, отвечающая одному из приведённых значений C_2, очевидно, оказывается нормируемой на соответствующей из бесконечностей. Значение постоянной C_1 на $W_-(x)$, а, тем самым, и на $V_2(x) = V_1(x) - 2[\ln W_-(x)]''$ никак не влияет.

Пример 5, показывающий, что если λ_1 лежит на нижней границе непрерывного спектра, то, во-первых, для нормируемой на $+\infty$ (на $-\infty$) функции $\varphi_{10}^-(x)$ может и не существовать нормируемая на $+\infty$ (на $-\infty$) функция $\varphi_{11}^-(x)$ и, во-вторых, что если $\varphi_{10}^-(x)$ нормируема на $+\infty$ (на $-\infty$), а $\varphi_{11}^-(x)$ стремится к бесконечности (или ненормируема) при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), то $W(x)$ всё же может стремиться в этом случае при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) к нулю.

Если $\varphi_{10}^-(x)$ ведёт себя при $x \to \pm\infty$ как $x^{-\alpha}$, $\alpha > 1/2$ (условие $\alpha > 1/2$ обеспечивает нормируемость $\varphi_{10}^-(x)$), то:

(1) $V(x) - \lambda_1$ ведёт себя как x^{-2} при $x \to \pm\infty$ (стремится к нулю) и, тем самым, λ_1 лежит на нижней границе непрерывного спектра;

(2) $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$ ведёт себя как $x^{\alpha+1}$ при $x \to \pm\infty$ (стремится к бесконечности);

(3) $\varphi_{11}^-(x)$ при C_2, обеспечивающем стремление $W_-(x)$ к нулю на одной из бесконечностей, ведёт себя на этой бесконечности как $x^{2-\alpha}$

(стремится к бесконечности, если $\alpha < 2$; стремится к постоянной, если $\alpha = 2$; стремится к нулю и ненормируема, если $2 < \alpha \leqslant 5/2$; нормируема, если $\alpha > 5/2$);

(4) $W_-(x)$ при C_2, обеспечивающем стремление $W_-(x)$ к нулю на одной из бесконечностей, ведёт себя на этой бесконечности как $x^{1-2\alpha}$ (стремится к нулю).

4.6.2. Неприводимые операторы III рода: тип III.2.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка III рода q_2^- назовём оператором *типа* III.2, если:

(1) $\lambda_1 = E_{l+}$, причём $l \geqslant 1$ (λ_1 может находиться вне, внутри или на границе непрерывного спектра h^+);

(2) $+\infty > W_-(-\infty) > W_-(+\infty) > 0$ либо $0 > W_-(-\infty) > W_-(+\infty) > -\infty$.

В этом случае:

(1) $0 > W_+(-\infty) > W_+(+\infty) > -\infty$ либо $+\infty > W_+(-\infty) > W_+(+\infty) > 0$, откуда следует (см. раздел 4.5), что $\varphi_{10}^+(x)$ нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией связанного состояния h^- на уровне $E = E_{l-} = E_{l+} = \lambda_1$); соответственно точечные спектры h^+ и h^- одинаковы;

(2) $\varphi_{10}^-(x)$ (см. раздел 4.5) нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией связанного состояния h^+); если $V_1(x) \in K$ и $\lambda_1 \leqslant 0$, то $\varphi_{11}^-(x)$ в силу лемм 5 и 6 из [2] является ненормируемой на обеих бесконечностях;

(3) q_2^+ является оператором этого же типа III.2.

Для построения оператора q_2^- типа III.2 в общем случае (и, в частности, в случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$) пригодна любая собственная функция $\varphi_{10}^-(x) \in L_2(\mathbb{R})$ гамильтониана h^+ для собственного числа λ_1, имеющая по крайней мере один корень. Формальную же присоединённую функцию $\varphi_{11}^-(x)$ можно выбирать следующим образом. Пусть $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$, $\widetilde{\varphi}_{11}^-(x)$ и W_0 – то же, что и выше. Тогда общий вид функции $\varphi_{11}^-(x)$ снова описывается равенством (68). Чтобы вронскиан $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ равный (69) не имел нулей и имел на обеих бесконечностях конечные пределы, отличные от нуля, (что обеспечивает принадлежность q_2^- к типу III.2) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из условий:

$$C_2 > -\frac{\widetilde{W}(+\infty)}{W_0} \quad \text{либо} \quad C_2 < -\frac{\widetilde{W}(-\infty)}{W_0}. \tag{70}$$

В случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ ненормируемая на обеих бесконечностях функция $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$ может компенсировать ненормируемость $\widetilde{\varphi}_{11}^-(x)$ на $+\infty$ (на $-\infty$) и, тем самым, обеспечить нормируемость $\varphi_{11}^-(x)$ на $+\infty$ (на $-\infty$) только при одном значении C_2 — при $C_2 = -\widetilde{W}(+\infty)/W_0$ (при $C_2 = -\widetilde{W}(-\infty)/W_0$) (см. раздел, посвящённый типу III.1). Таким образом, в указанном случае каждое из условий (70) обеспечивает ненормируемость $\varphi_{11}^-(x)$ на обеих бесконечностях.

Замечание 3. В условиях примера 4 при $1/2 < \alpha \leqslant 5/2$ функция $\varphi_{10}^-(x)$ нормируема на обеих бесконечностях, а функция $\varphi_{11}^-(x)$ ненормируема на обеих бесконечностях, т.е. есть сходство с поведением на бесконечности элементов канонического базиса оператора q_2^- типа III.2. Тем не менее, поведение $W_-(x)$, а тем самым, и $\varphi_{10}^+(x)$ в окрестности бесконечности, а также связанное с ними соотношение между спектрами h^+ и h^- позволяют отнести оператор q_2^- в этом случае именно к типу III.1.

4.6.3. Неприводимые операторы III рода: тип III.3.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка III рода q_2^- назовём оператором *типа* III.3, если:

(1) $+\infty = W_-(-\infty) > W_-(+\infty) = 0$ либо $0 = W_-(-\infty) > W_-(+\infty) = -\infty$;

(2) λ_1 отлично от энергий связанных состояний E_{l+}, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и расположено так, что $\varphi_{10}^-(x)$ имеет по крайней мере один корень.

В этом случае:

(1) $0 = W_+(-\infty) > W_+(+\infty) = -\infty$ либо $+\infty = W_+(-\infty) > W_+(+\infty) = 0$, откуда следует (см. раздел 4.5), что $\varphi_{10}^+(x)$ нормируема только на одной из бесконечностей; соответственно точечные спектры h^+ и h^- одинаковы;

(2) $\varphi_{10}^-(x)$ нормируема только на одной из бесконечностей; если $V_1(x) \in K$ и $\lambda_1 \leqslant 0$, то $\varphi_{11}^-(x)$ в силу лемм 5 и 6 из [2] является нормируемой только на одной из бесконечностей (на $+\infty$, если $W_-(+\infty) = 0$ и на $-\infty$, если $W_-(-\infty) = 0$);

(3) q_2^+ является оператором этого же типа III.3.

Для построения оператора q_2^- типа III.3 в случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ в силу приведённого выше достаточного условия отсутствия нулей у $W_-(x)$ и леммы 2 из [2] пригодны любые удовлетворяющие равенствам (56) формальные собственная функция $\varphi_{10}^-(x)$, нормируемая только на одной из бесконечностей, и присоединённая функция $\varphi_{11}^-(x)$, нормируемая на той же бесконечности.

В общем случае для построения оператора q_2^- типа III.3 пригодна любая формальная собственная функция $\varphi_{10}^-(x)$ гамильтониана h^+, нормируемая только на одной из бесконечностей. Формальную же присоединённую функцию $\varphi_{11}^-(x)$ можно выбирать следующим образом. Пусть: $\varphi_{10}^-(x)$ нормируема только на $+\infty$ (на $-\infty$), $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$ – линейно независимая от $\varphi_{10}^-(x)$ формальная собственная функция h^+ на уровне λ_1, выбранная так, что

$$W_0 = \varphi_{10}^-(x)\widetilde{\varphi}_{10}^{-\prime}(x) - \varphi_{10}^{-\prime}(x)\widetilde{\varphi}_{10}^-(x) > 0, \tag{71}$$

и $\widetilde{\varphi}_{11}^-(x)$ – некоторая формальная присоединённая функция h^+ на уровне λ_1 для собственной функции $\varphi_{10}^-(x)$. Тогда общий вид присоединённой функции h^+ на уровне λ_1 для собственной функции $\varphi_{10}^-(x)$ так же, как и выше даётся равенством (68). Чтобы вронскиан $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ равный (69) обращался в нуль на $+\infty$ (на $-\infty$) (что обеспечивает принадлежность q_2^- к типу III.3) необходимо и достаточно, чтобы

$$C_2 = -\frac{\widetilde{W}(+\infty)}{W_0} \quad \Big(C_2 = -\frac{\widetilde{W}(-\infty)}{W_0}\Big). \tag{72}$$

В случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ функция $\varphi_{11}^-(x)$ при выполнении условия (72), очевидно, является нормируемой на $+\infty$ (на $-\infty$).

4.6.4. Неприводимые операторы III рода: тип III.4.

Вещественно неприводимый сплетающий оператор второго порядка III рода q_2^- назовём оператором *типа* III.4, если:

(1) $+\infty = W_-(-\infty) > W_-(+\infty) > 0$ либо $0 > W_-(-\infty) > W_-(+\infty) = -\infty$;

(2) λ_1 отлично от энергий связанных состояний E_{l+}, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и расположено так, что $\varphi_{10}^-(x)$ имеет по крайней мере один корень.

В этом случае:

(1) $0 = W_+(-\infty) > W_+(+\infty) > -\infty$ либо $+\infty > W_+(-\infty) > W_+(+\infty) = 0$, откуда следует (см. раздел 4.5), что $\varphi_{10}^+(x)$ нормируема на обеих бесконечностях (т.е. является волновой функцией связанного состояния h^+ на уровне $E = \lambda_1$); соответственно точечный спектр h^- отличается от точечного спектра h^+ только появлением дополнительного уровня $E = \lambda_1$;

(2) $\varphi_{10}^-(x)$ (см. раздел 4.5) нормируема только на одной из бесконечностей (на $+\infty$, если $W_-(+\infty) > 0$, или на $-\infty$, если $W_-(-\infty) < 0$); если $V_1(x) \in K$ и $\lambda_1 \leqslant 0$, то $\varphi_{11}^-(x)$ в силу лемм 5 и 6 из [2] является ненормируемой на обеих бесконечностях;

(3) q_2^+ является оператором типа III.1.

Для построения оператора q_2^- типа III.4 в общем случае (и, в частности, в случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$) пригодна любая формальная собственная функция $\varphi_{10}^-(x)$ гамильтониана h^+ для спектрального числа λ_1, нормируемая только на одной из бесконечностей. Формальную же присоединённую функцию $\varphi_{11}^-(x)$ можно выбирать следующим образом. Пусть $\varphi_{10}^-(x)$, $\widetilde{\varphi}_{10}^-(x)$, $\widetilde{\varphi}_{11}^-(x)$ и W_0 – то же, что и при рассмотрении типа III.3. Тогда общий вид функции $\varphi_{11}^-(x)$ снова описывается равенством (68). Чтобы вронскиан $\varphi_{10}^-(x)$ и $\varphi_{11}^-(x)$ равный (69) стремился при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) к конечному положительному (отрицательному) пределу (что обеспечивает принадлежность q_2^- к типу 4) необходимо и достаточно, чтобы

$$C_2 > -\frac{\widetilde{W}(+\infty)}{W_0} \quad \Big(C_2 < -\frac{\widetilde{W}(-\infty)}{W_0}\Big). \tag{73}$$

В случае $V_1(x) \in K$, $\lambda_1 \leqslant 0$ условие (73), очевидно, обеспечивает ненормируемость $\varphi_{11}^-(x)$ на обеих бесконечностях.

Замечание 4. Сплетающие операторы типов III.1–III.4 ранее описаны в [18], но без чёткого разделения на четыре типа и без упоминания о втором элементе канонического базиса в ядре q_2^- – о функции $\varphi_{11}^-(x)$.

Замечание 5. Приведённая выше тонкая классификация неприводимых операторов I и III рода в отличие от тонкой классификации неприводимых операторов II рода является исчерпывающей не только в том случае, когда эти операторы сплетают гамильтонианы с потенциалами из класса K и числа λ_1 и λ_2 удовлетворяют условию (48) или (49), но и в общем случае.

Я благодарю А. А. Андрианова за чтение рукописи и полезные замечания. Работа была поддержана Грантом РФФИ 09-01-00145-а.

Литература

1. А. А. Андрианов, А. В. Соколов. — Зап. научн. семин. ПОМИ **335** (2006), 22; препринт `arXiv: 0710.5738 [quant-ph]`.
2. А. В. Соколов. — Зап. научн. семин. ПОМИ **347** (2007), 214; препринт `arXiv: 0903.2835 [math-ph]`.
3. E. Schrödinger. — Proc. Roy. Irish Acad. A **47** (1941), 53 `[physics/9910003]`.
4. L. Infeld, T. E. Hull. — Rev. Mod. Phys. **23** (1951), 21.
5. А. А. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдес. — ТМФ **61** (1985), 17; Phys. Lett. A **109** (1985), 143.

6. C. V. Sukumar. — J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985), L57; 2917.
7. A. A. Andrianov, F. Cannata. — J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 10297.
8. F. Cooper, B. Freedman. — Ann. Phys. (NY) **146** (1983), 262.
9. L. Trlifaj. — Inv. Prob. **5** (1989), 1145.
10. D. J. Fernández, B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz, B. F. Samsonov. — J. Phys. A **35** (2002), 4279; препринт `quant-ph/0303051`.
11. D. J. Fernández, B. Mielnik, O. Rosas-Ortiz, B. F. Samsonov, — Phys. Lett. A **294** (2002), 168; препринт `quant-ph/0302204`.
12. G. Dunne, J. Feinberg. — Phys. Rev. D **57** (1998), 1271; препринт `hep-th/9706012`.
13. A. Khare, U. Sukhatme. — J. Math. Phys. **40** (1999), 5473; препринт `quant-ph/9906044`.
14. A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder, M. V. Ioffe. — Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995), 2683; препринт `hep-th/9404061`.
15. D. J. Fernández, R. Muñoz, A. Ramos. — Phys. Lett. A **308** (2003), 11 ; препринт `quant-ph/0212026`.
16. D. J. Fernández, J. Negro, L. M. Nieto. — Phys. Lett. A **275** (2000), 338.
17. B. F. Samsonov. — Phys. Lett. A **263** (1999), 274; препринт `quant-ph/9904009`.
18. D. J. Fernández, E. Salinas-Hernández. — J. Phys. A **36** (2003), 2537.
19. G. Darboux. — C. R. Acad. Sci. (Paris) **94** (1882), 1456 `[physics/9908003]`.
20. M. M. Crum. — Quart. J. Math. (Oxford) **6** (1955), 121 `[physics/9908019]`.
21. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, V. P. Spiridonov. — Phys. Lett. A **174** (1993), 273; препринт `hep-th/9303005`.
22. A. A. Andrianov, A. V. Sokolov. — Nucl. Phys. B **660** (2003), 25; препринт `hep-th/0301062`.
23. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* Наука, ФМ, М. (1969).
24. V. G. Bagrov, B. F. Samsonov. — Phys. Part. Nucl. **28** (1997), 374.
25. A. V. Sokolov. — Nucl. Phys. B **773** [PM] (2007), 137; препринт `math-ph/0610022`.

Sokolov A. V. Factorization of nonlinear supersymmetry in one-dimensional Quantum Mechanics III: precise classification of irreducible intertwining operators.

The detailed classification of intertwining operators of the first order and of really irreducible intertwining operators of the second order of the I, II and III types is presented in this part of the work. This classification is constructed in dependence of kernels structures of these operators and relations between spectra of intertwined Hamiltonians. It was shown earlier that one can construct from such operators any intertwining operator of arbitrary order with the help of chain (ladder) construction.

С.-Петербургский
государственный университет
Ульяновская ул. 3, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: avs_avs@rambler.ru

Поступило 4 февраля 2010 г.