Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

С. Э. Деркачёв, Д. И. Чичерин

ФУНКЦИЯ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЗАДАЧЕ КУЛОНА

1. Введение

Рассмотрим d-мерное евклидово пространство с координатами x_i $(i = 1, 2, \cdots, d)$. Мы будем использовать следующие компактные обозначения

$$x^\alpha \equiv (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^\alpha; \quad xy = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

Если речь идёт о операторах координат $\mathbf{x}_k$ и компонент импульса $\mathbf{p}_j$, будем это выделять шрифтом, в отличие от обычных координат x_k и компонент импульса p_j. Операторы $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{p}_j$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_j] = i\delta_{kj}.$$

Гамильтониан для кулоновской задачи в d-мерии имеет следующий вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{p}^2 - \frac{\lambda}{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^2 + \cdots + \mathbf{x}_d^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_1^2 + \cdots + \mathbf{p}_d^2, \tag{1.1}$$

а резольвента или функция Грина определяется как обратный оператор [7, 8]

$$(\mathbf{H} + z) \cdot \mathbf{G}(z) = \left(\mathbf{p}^2 + z - \frac{\lambda}{\mathbf{x}}\right) \cdot \mathbf{G}(z) = \mathbb{1}. \tag{1.2}$$

Ключевые слова : кулоновская функция грина, соотношение уникальностей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: грант 07-02-92166 (С.Д и Д.Ч.), гранты 08-01-00638, 09-01-12150, 09-01-93108 (С.Д.). С.Д. благодарен институту Теоретической физики Лейпцигского Университета за гостеприимство и фонду DFG за поддержку (грант DFG KI 623/6-1) и НШ-5931.2010.1 .

Рассмотрим собственное подпространство V_n, отвечающее дискретному собственному числу $z_n > 0$. Обозначим $|\, z_n, k\rangle$ векторы ортонормированного базиса в V_n

$$\mathbf{H}|\, z_n, k\rangle = -z_n|\, z_n, k\rangle; \quad \langle z_n, i|\, z_n, k\rangle = \delta_{ik}.$$

Индекс k для нумерации базисных векторов собственного подпространства возникает в случае вырождения, т.е. когда собственное подпространство, отвечающее собственному числу z_n, не является одномерным. Для проектора P_n на подпространство V_n будем использовать следующее представление

$$P_n = \sum_k |\, z_n, k\rangle\langle z_n, k\,|.$$

Аналогичные формулы для собственных векторов $|\, z, s\rangle$ непрерывного спектра $z \le 0$ имеют вид

$$\mathbf{H}|\, z, s\rangle = -z|\, z, s\rangle; \quad \langle z, s|\, z, t\rangle = \delta(s-t); \quad P_z = \int \mathrm{d}s|\, z, s\rangle\langle z, s\,|.$$

Легко проверить, используя условие полноты

$$\sum_n P_n + \int \mathrm{d}z\ P_z = \mathbb{1},$$

что выражение для функции Грина имеет следующий вид

$$\mathbf{G}(z) = \sum_n \frac{P_n}{z+z_n} + \int \mathrm{d}y \frac{P_y}{z+y}.$$

Таким образом, функция Грина содержит всю информацию о спектре и собственных подпространствах. Если существует удобное замкнутое представление для функции Грина, то спектр и собственные функции могут быть восстановлены [7, 8].

В данной статье мы постарались по возможности замкнуто изложить известные нам способы суммирования ряда теории возмущений для резольвенты. Таким образом, работа носит в основном методический характер, но мы надеемся, что использованные при этом формулы могут представлять независимый интерес. В связи с тем, что вычисление функции Грина в задаче Кулона является, по сути дела, классическим и хорошо известным результатом, мы не стали приводить полный список литературы, а ограничились лишь теми работами, результаты которых так или иначе использовали.

2. Суммирование ряда теории возмущений для кулоновской функции Грина

Самым прямолинейным методом вычисления функции Грина является непосредственное суммирование членов ряда теории возмущений. Ряд теории возмущений по константе связи λ получается обычным образом

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(z) &= \left(\mathbf{p}^2 + z - \frac{\lambda}{\mathbf{x}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{p}^2 + z\right)^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}^2+z)}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda}{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}^2+z)}\right]^k\end{aligned} \tag{2.1}$$

или, более подробно

$$\mathbf{G}(z) = \frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \lambda\cdot\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\,\frac{1}{\mathbf{x}}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \lambda^2\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\,\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\,\frac{1}{\mathbf{x}}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \cdots.$$

Введём векторы $|\,x\rangle \equiv |\,x_1\cdots x_d\rangle$ и $|\,p\rangle \equiv |\,p_1\cdots p_d\rangle$, являющиеся собственными векторами операторов координат и импульсов

$$\mathbf{x}_j|\,x\rangle = x_j|\,x\rangle\ ,\ \langle x\,|y\rangle = \delta^d(x-y);\quad \mathbf{p}_k|\,p\rangle = p_k|\,p\rangle,\quad \langle p\,|k\rangle = \delta^d(p-k),$$

и выберем нормировку следующим образом

$$\langle x\,|k\rangle = \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}},\quad \langle k\,|x\rangle = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}};\quad \int \mathrm{d}^d x|\,x\rangle\langle x\,| = \mathbb{1};\quad \int \mathrm{d}^d p|\,p\rangle\langle p\,| = \mathbb{1}.$$

Будем вычислять ядро оператора $\mathbf{G}(z)$ в импульсном пространстве $G(p,q) = \langle p\,|\mathbf{G}(z)|\,q\rangle$. Первые два члена вычисляются сразу явным образом и, кроме того, видно, что слева и справа всегда выделяются простые множители p^2+z и q^2+z

$$\begin{aligned}G(p,q) &= \frac{\delta^d(p-q)}{p^2+z} + \lambda\cdot\frac{1}{p^2+z}\cdot\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle\cdot\frac{1}{q^2+z} \\ &\quad + \lambda^2\cdot\frac{1}{p^2+z}\cdot\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\,\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle\cdot\frac{1}{q^2+z} + \cdots.\end{aligned} \tag{2.2}$$

В итоге задача сводится к вычислению выражений вида $\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle$, $\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle$ и т.д. Используя полный набор состояний в координатном пространстве, получаем стандартную справочную формулу [9, 10]

$$\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}^{2\alpha}}|\,q\rangle = \int \mathrm{d}^d x \langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}^{2\alpha}}|\,x\rangle\langle x\,|q\rangle = \int \mathrm{d}^d x \langle p\,|x\rangle \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}} \cdot \langle x\,|q\rangle$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d}\frac{e^{-ix(p-q)}}{x^{2\alpha}} = \frac{A(\alpha)}{(p-q)^{2(d/2-\alpha)}},$$

где $A(\alpha)$ – стандартное обозначение для появляющейся комбинации π и гамма-функций [9, 10], но в нашем частном случае $\alpha = \frac{1}{2}$ всё упрощается и удобно ввести более компактные обозначения

$$A(\alpha) \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)}{\pi^{d/2}4^{\alpha}\Gamma(\alpha)}; \quad A = A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(a\right)}{2\pi^{a+1}}, \quad a \equiv \frac{d-1}{2}.$$

Для других вкладов теории возмущений всё повторяется аналогичным образом, например,

$$\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle = \int \mathrm{d}^d k_1 \mathrm{d}^d k_2 \langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}|\,k_1\rangle\langle k_1\,|\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}|\,k_2\rangle\langle k_2\,|\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle$$
$$= \int \mathrm{d}^d k_1 \mathrm{d}^d k_2 \frac{A}{(p-k_1)^{2a}} \cdot \frac{\delta^d(k_1-k_2)}{k_1^2+z} \cdot \frac{A}{(k_2-q)^{2a}}$$
$$= A^2 \int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(p-k)^{2a}}\frac{1}{k^2+z}\frac{1}{(k-q)^{2a}},$$

так что получаем интегралы следующего вида

$$\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle = A^2 \int \mathrm{d}^d k \; \frac{1}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}}, \tag{2.3}$$

$$\langle p\,|\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle = A^3 \int \mathrm{d}^d k_1 \; \frac{1}{(p-k_1)^{2a}(k_1^2+z)}$$
$$\times \int \mathrm{d}^d k_2 \frac{1}{(k_1-k_2)^{2a}(k_2^2+z)(k_2-q)^{2a}}. \tag{2.4}$$

Эти интегралы можно вычислять двумя способами. Достоинствами первого способа являются его элементарность и прямолинейность. Кроме того, он позволяет ясно проиллюстрировать механизм того, что происходит, а так же итерационную процедуру вычисления интегралов. Но, как обычно, если какие-то интегралы вдруг вычисляются, для этого должна быть серьёзная причина.

Причиной в данном случае является скрытая $SO(d+1)$-симметрия задачи, открытая В. А. Фоком [1], и второй способ напрямую использует эту симметрию [2].

2.1. Прямолинейное вычисление

Первый способ основан на трюке [3, 4], аналогичном формуле Фейнмана для перехода к интегралам по параметру. Вычислим в качестве примера первый нетривиальный вклад (2.3). Если пользоваться языком диаграмм Фейнмана, то множитель k^2+M^2 отвечает линии с массой, а $k^{2\alpha}$ – безмассовой линии с индексом α. Интеграл без k^2+z в знаменателе легко вычисляется в общем случае(при произвольных α и β)

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}} = \frac{A(d-\alpha-\beta)}{A\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)A\left(\frac{d}{2}-\beta\right)} \cdot \frac{1}{(p-q)^{2(\alpha+\beta-\frac{d}{2})}},$$

поэтому вся проблема заключается в дополнительной вставке массивного множителя k^2+z. Оказывается, что при специальном соотношении между параметрами $\alpha+\beta=d$ следующий интеграл с одной массивной линией вычисляется явным образом

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p_1-k)^{2\alpha}\left[(k-p_2)^2+M^2\right]^\beta} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\beta-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\left[(p_1-p_2)^2+M^2\right]^\alpha M^{2\beta-d}} \tag{2.5}$$

при помощи формулы Фейнмана

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{\left[\alpha A+(1-\alpha)B\right]^{a+b}}.$$

В работе [3] изобретён специальный трюк, позволяющий свести всё к вычислению интеграла данного типа. Трюк основан на следующем интегральном представлении

$$\frac{1}{(k^2+z)(k-q)^{2a}(q^2+z)} = (4z)^a a \cdot \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha^2)}{\left[(1-\alpha)^2(k^2+z)(q^2+z)+4z\alpha(k-q)^2\right]^{a+1}}, \tag{2.6}$$

которое явным образом напоминает формулу Фейнмана для перехода к интегралу по параметру α. Для упрощения формул удобно ввести компактное обозначение $\langle\alpha|k,q\rangle$ для возникшей функции параметра α и импульсов k и q

$$\langle\alpha|k,q\rangle = (1-\alpha)^2(k^2+z)(q^2+z) + 4z\alpha(k-q)^2. \tag{2.7}$$

Смысл функции $\langle\alpha|k,q\rangle$ станет понятен при рассмотрении второго метода вычисления интералов. Представление (2.6) легко выводится из элементарной формулы

$$\partial_\alpha \frac{\alpha^a}{\langle\alpha|k,q\rangle^a} = (k^2+z)(q^2+z)\cdot\frac{a\alpha^{a-1}(1-\alpha^2)}{\langle\alpha|k,q\rangle^{a+1}} \tag{2.8}$$

при помощи интегрирования по частям

$$a\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha^2)(k^2+z)(q^2+z)}{\langle\alpha|k,q\rangle^{a+1}}$$
$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\partial_\alpha\frac{\alpha^a}{\langle\alpha|k,q\rangle^a} = \frac{\alpha^a}{\langle\alpha|k,q\rangle^a}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = \frac{1}{(4z)^a(k-q)^{2a}}. \tag{2.9}$$

Используем теперь представление (2.6) для вычисления рассматриваемого вклада теории возмущений

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}}$$
$$= (4z)^a a(q^2+z)\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}(1-\alpha^2)\cdot\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2a}\langle\alpha|k,q\rangle^{a+1}}.$$

Получающийся интеграл по импульсу k относится к типу (2.5) при

$$\alpha = a,\quad \beta = a+1;\quad p_1 = p;\quad p_2 = \frac{4z\alpha q}{(1-\alpha)^2(q^2+z)+4z\alpha}$$

$$M^2 = \frac{z(1-\alpha^2)^2(q^2+z)^2}{\left[(1-\alpha)^2(q^2+z)+4z\alpha\right]^2}$$

и вычисляется в замкнутом виде

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2a}\langle\alpha|k,q\rangle^{a+1}}$$
$$= \frac{\pi^{a+1}}{\sqrt{z}\Gamma(a+1)}\frac{1}{(1-\alpha^2)(q^2+z)}\frac{1}{\langle\alpha|p,q\rangle^a}, \tag{2.10}$$

так что в итоге получаем следующее выражение для интересующего нас интеграла

$$\int \mathrm{d}^d k \; \frac{1}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}} = \frac{(4z)^a \pi^{a+1}}{\sqrt{z}\Gamma(a)} \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}}{\langle\alpha|p,q\rangle^a}.$$

В третьем порядке теории возмущений возникает интеграл (2.4), который при помощи полученной формулы преобразуется следующим образом

$$\int \mathrm{d}^d k_1 \; \frac{1}{(p-k_1)^{2a}(k_1^2+z)} \int \mathrm{d}^d k_2 \; \frac{1}{(k_1-k_2)^{2a}(k_2^2+z)(k_2-q)^{2a}}$$
$$= \frac{(4z)^a \pi^{a+1}}{\sqrt{z}\Gamma(a)} \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \alpha^{a-1} \int \mathrm{d}^d k_1 \; \frac{1}{(p-k_1)^{2a}(k_1^2+z)\langle\alpha|k_1,q\rangle^a}.$$

Теперь можно использовать естественное обобщение формулы (2.6)

$$\frac{1}{(k^2+z)\langle\alpha|k,q\rangle^a(q^2+z)} = \frac{a}{\alpha^a} \cdot \int\limits_0^\alpha \mathrm{d}\beta \frac{\beta^{a-1}(1-\beta^2)}{\langle\beta|k,q\rangle^{a+1}}, \tag{2.11}$$

получающееся, если в (2.9) интегрировать не от нуля до единицы, а от нуля до α. Дальше возникает уже известный интеграл (2.10), так что весь вклад переписывается в виде

$$\int \mathrm{d}^d k_1 \frac{1}{(p-k_1)^{2a}(k_1^2+z)} \int \mathrm{d}^d k_2 \; \frac{1}{(k_1-k_2)^{2a}(k_2^2+z)(k_2-q)^{2a}}$$
$$= (4z)^a \left[\frac{\pi^{a+1}}{\sqrt{z}\Gamma(a)}\right]^2 \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \alpha^{a-1} \cdot \alpha^{-a} \int\limits_0^\alpha \mathrm{d}\beta \beta^{a-1} \frac{1}{\langle\beta|p,q\rangle^a}$$
$$= (4z)^a \left[\frac{\pi^{a+1}}{\sqrt{z}\Gamma(a)}\right]^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \frac{(\alpha_1\alpha_2)^{a-1}}{\langle\alpha_1\alpha_2|p,q\rangle^a}.$$

В итоге получаем выражения для первых двух членов ряда теории возмущений

$$\Big\langle p \mid \frac{1}{\mathbf{x}} \; \frac{1}{\mathbf{p}^2+z} \; \frac{1}{\mathbf{x}} \mid q \Big\rangle = (4z)^a A \frac{\pi^{a+1} A}{\sqrt{z}\Gamma(a)} \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}}{\langle\alpha|p,q\rangle^a} \tag{2.12}$$

$$\Big\langle \mid \frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\,\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\,\frac{1}{\mathbf{x}}\mid q\Big\rangle$$
$$= (4z)^a A\left[\frac{\pi^{a+1}A}{\sqrt{z}\Gamma(a)}\right]^2\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\frac{(\alpha_1\alpha_2)^{a-1}}{\langle\alpha_1\alpha_2|p,q\rangle^a}. \quad (2.13)$$

Подставим явное выражение для A, чтобы упростить коэффициент перед интегралом:

$$\frac{\pi^{a+1}A}{\sqrt{z}\Gamma(a)} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Механизм рекурсии основан на формуле (2.11), так что обобщение на случай степени N очевидно

$$\langle p\,|\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N\frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle = \frac{(4z)^a A}{(2\sqrt{z})^N}\int\limits_0^1 !\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_N\frac{(\alpha_1\cdots\alpha_N)^{a-1}}{\langle\alpha_1\cdots\alpha_N|p,q\rangle^a}. \quad (2.14)$$

Этот многократный интеграл сводится к однократному. Для понимания того, что происходит, лучше всего использовать индукцию. Предполагаем следующую формулу для нашего многократного интеграла

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_N(\alpha_1\cdots\alpha_N)^{a-1}F(\alpha_1\cdots\alpha_N) = C_N\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}(\ln\alpha)^{N-1}F(\alpha)$$

и используем её на следующем шаге индукции

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_{N+1}(\alpha_1\cdots\alpha_{N+1})^{a-1}F(\alpha_1\cdots\alpha_{N+1})$$
$$= C_N\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha_{N+1}\alpha_{N+1}^{a-1}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}(\ln\alpha)^{N-1}F(\alpha\alpha_{N+1}).$$

Дальше делаем очевидную замену переменных $\beta = \alpha\alpha_{N+1}$ и приходим к интегралу

$$
\begin{aligned}
&C_N \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha_{N+1}}{\alpha_{N+1}} \int_0^{\alpha_{N+1}} \mathrm{d}\beta \beta^{a-1} \ln^{N-1}\left(\frac{\beta}{\alpha_{N+1}}\right) F(\beta) \\
&\quad = C_N \cdot \int_0^1 \mathrm{d}\beta \beta^{a-1} F(\beta) \int_\beta^1 \frac{\mathrm{d}\alpha_{N+1}}{\alpha_{N+1}} \ln^{N-1}\left(\frac{\beta}{\alpha_{N+1}}\right) \\
&\quad = -\frac{C_N}{N} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}\beta \beta^{a-1} (\ln\beta)^N F(\beta).
\end{aligned}
$$

В итоге подтвердилось предположение индукции и получилось рекуррентное соотношение для коэффициента C_N, имеющее простое решение

$$
C_{N+1} = -\frac{C_N}{N} \to C_N = \frac{(-)^{N-1}}{(N-1)!}.
$$

После всех преобразований получаем компактное выражение для общего члена ряда теории возмущений

$$
\langle p \,|\left(\frac{1}{\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N \frac{1}{\mathbf{x}} |\, q \rangle = \frac{(-)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{(4z)^a A}{(2\sqrt{z})^N} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}(\ln\alpha)^{N-1}}{\langle \alpha | p, q\rangle^a}. \tag{2.15}
$$

Теперь всё готово для вычисления суммы ряда теории возмущений

$$
\begin{aligned}
G(p,q) &= \frac{\delta^d(p-q)}{p^2+z} + \frac{1}{p^2+z} \\
&\times \left[\frac{\lambda A}{(p-q)^{2a}} + \sum_{N=1}^{\infty} \lambda^{N+1} \langle p \,|\left(\frac{1}{\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N \frac{1}{\mathbf{x}} |\, q\rangle\right] \cdot \frac{1}{q^2+z},
\end{aligned}
$$

что сводится к вычислению следующей суммы

$$
\begin{aligned}
&\sum_{N=1}^{\infty} \lambda^{N+1} \langle p \,|\left(\frac{1}{\mathbf{x}} \frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N \frac{1}{\mathbf{x}} |\, q\rangle \\
&= \frac{(4z)^a A \lambda^2}{2\sqrt{z}} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1}}{\langle \alpha | p, q\rangle^a} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda \ln\alpha}{2\sqrt{z}}\right)^{N-1}}{(N-1)!} \\
&= \frac{(4z)^a A \lambda^2}{2\sqrt{z}} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{\langle \alpha | p, q\rangle^a}.
\end{aligned}
$$

В итоге ответ для функции Грина такой

$$G(p,q) = \frac{\delta^d(p-q)}{p^2+z} + \frac{A\lambda}{(p^2+z)(q^2+z)} \times \left[\frac{1}{(p-q)^{2a}} + \frac{(4z)^a\lambda}{2\sqrt{z}} \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{\langle\alpha|p,q\rangle^a} \right], \quad (2.16)$$

где $\langle\alpha|p,q\rangle = (1-\alpha)^2(p^2+z)(q^2+z) + 4z\alpha(p-q)^2$.

2.2. $SO(d+1)$-симметрия Фока

Переходим ко второму методу вычисления интегралов

$$\langle p\,| \left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N \frac{1}{\mathbf{x}}|\,q\rangle = \int \mathrm{d}^d k_1\ \frac{1}{(p-k_1)^{2a}(k_1^2+z)} \cdots \int \mathrm{d}^d k_N\ \frac{A^{N+1}}{(k_{N-1}-k_N)^{2a}(k_N^2+z)(k_N-q)^{2a}},$$

который основан на использовании $SO(d+1)$-симметрии задачи. Считаем, что $z>0$, а потом полученные выражения при помощи аналитического продолжения распространим на все значения спектрального параметра z.

При помощи стереографической проекции переходим от плоского импульсного пространства $\mathbb{R}^d$ к поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^{d+1}$: $p \to P \in \mathbb{R}^{d+1}$; $P^2 = P_1^2 + \cdots + P_d^2 + P_{d+1}^2 = 1$

$$\begin{aligned} &P = \left(\frac{2\sqrt{z}p}{p^2+z}; \frac{p^2-z}{p^2+z}\right); \quad K = \left(\frac{2\sqrt{z}k}{k^2+z}; \frac{k^2-z}{k^2+z}\right); \\ &(P-K)^2 = \frac{4z(p-k)^2}{(p^2+z)(k^2+z)}; \\ &\mathrm{d}^d p = \left(\frac{p^2+z}{2\sqrt{z}}\right)^d \mathrm{dS}; \quad \mathrm{dS} = \delta(P^2-1)\ \mathrm{d}^{d+1}P, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где в последней формуле явным образом выписан якобиан перехода: теперь интегрирование производится по поверхности сферы dS единичного радиуса в $\mathbb{R}^{d+1}$. Перепишем интеграл для первого нетривиального вклада в новых координатах

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a} \int \mathrm{d}S\ \frac{1}{(P-K)^{2a}(K-Q)^{2a}}. \quad (2.18)$$

Из-за условия $2a+1=d$ множитель $\left(k^2+z\right)^{d-2a-1}$ в числителе превратился в единицу, поэтому весь интеграл переписывается в терминах векторов P, Q и K, и интегрирование по $\mathbb{R}^d$ заменяется интегрированием по поверхности сферы $K^2=1$ в $\mathbb{R}^{d+1}$. Точно так же все вклады теории возмущений переписываются однотипным образом при помощи перехода к сфере Фока

$$\langle p|\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N\frac{1}{\mathbf{x}}|q\rangle = A\left[\frac{A}{2\sqrt{z}}\right]^N\frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a} \times\int \mathrm{d}S_1\ \cdots\mathrm{d}S_N\ \frac{1}{(P-K_1)^{2a}\cdots(K_N-Q)^{2a}}.$$

В итоге $SO(d+1)$-симметрия задачи стала совершенно явной. Задача об интегрировании по сфере в пространстве $\mathbb{R}^D$ естественным образом приводит к полиномам Гегенбауэра со значком $\frac{D}{2}-1$. Нам нужны две формулы: производящая функция для полиномов Гегенбауэра и соотношение ортогональности. Полиномы Гегенбауэра $C_n^\lambda(z)$ со значком λ можно определить при помощи производящей функции

$$\frac{1}{\left(1-2xZ+x^2\right)^\lambda}=\sum_{n=0}^\infty x^n\cdot C_n^\lambda\left(Z\right). \tag{2.19}$$

Для вычисления интегралов ключевым является следующее свойство ортогональности полиномов Гегенбауэра

$$\int \mathrm{d}^D S\ C_n^{\frac{D}{2}-1}\left(PK\right)C_m^{\frac{D}{2}-1}\left(KQ\right) = \frac{\frac{D}{2}-1}{n+\frac{D}{2}-1}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}\cdot\delta_{nm}\cdot C_n^{\frac{D}{2}-1}\left(PQ\right). \tag{2.20}$$

В этой формуле $PK=P_1K_1+\cdots P_DK_D$ и интегрирование производится по поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^D$: $K\in R^D$, $K^2=1$ и $P,Q\in R^D$, $P^2=Q^2=1$. В нашем случае $D=d+1$, так что $\frac{D}{2}-1=\frac{d+1}{2}-1=a$, поэтому сразу получаем

$$\frac{1}{(1-2xPK+x^2)^a}=\sum_{n=0}^\infty x^n\cdot C_n^a\left(PK\right),$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}S\, C_n^a\,(PK)\, C_m^a\,(KQ) &= \frac{1}{n+a}\ \frac{2\pi^{a+1}}{\Gamma(a)}\delta_{nm}\cdot C_n^a\,(PQ)\\ &= \frac{1}{n+a}\ \frac{1}{A}\delta_{nm}\cdot C_n^a\,(PQ)\,,\end{aligned}$$

где на последнем шаге мы использовали явное выражение для A

$$\frac{2\pi^{a+1}}{\Gamma(a)} = \frac{1}{A}.$$

Умножив последнее соотношение на $x^n y^m$ и просуммировав по n и m, последнее соотношение легко переписать на языке производящих функций

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}S \frac{1}{(1-2xPK+x^2)^a(1-2yKQ+y^2)^a}\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{A}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xy)^n}{n+a}\cdot C_n^a\,(PQ)\,. \end{aligned}\tag{2.21}$$

Воспользуемся очевидной формулой $\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a+n-1} = (a+n)^{-1}$ и свернём получившийся под знаком интеграла ряд опять в прозводящую функцию. После этого всё представляется в совсем компактном виде

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}S \frac{1}{(1-2xPK+x^2)^a(1-2yKQ+y^2)^a}\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{A}\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}\frac{1}{(1-2xy\alpha PQ+x^2y^2\alpha^2)^a}. \end{aligned}\tag{2.22}$$

Положим $y=1$ и, воспользовавшись тождествами $(K-Q)^2 = K^2 - 2KQ+Q^2 = 2(1-KQ)$ и $(xP-K)^2 = x^2-2xPK+1$, получаем формулу

$$\int \mathrm{d}S\ \frac{1}{(xP-K)^{2a}(K-Q)^{2a}} = \frac{1}{A}\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}\frac{1}{(\alpha xP-Q)^{2a}}. \tag{2.23}$$

Подставив $x = 1$ и вспоминая (2.18), получаем следующее представление для первого нетривиального интеграла

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^d k \; \frac{A}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}} \\
&= \frac{A}{2\sqrt{z}} \frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a} \int \mathrm{d}S \frac{1}{(P-K)^{2a}(K-Q)^{2a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \alpha^{a-1} \frac{1}{(\alpha P - Q)^{2a}}.
\end{aligned}$$

Чтобы сравнить с уже полученным выражением, выразим всё через d-мерные импульсы p и q

$$(P-Q)^2 = \frac{4z(p-q)^2}{(p^2+z)(q^2+z)} \to PQ = 1 - \frac{2z(p-q)^2}{(p^2+z)(q^2+z)}$$

$$(\alpha P - Q)^2 = \alpha^2 - 2\alpha PQ + 1 = (1-\alpha)^2 + \frac{4z\alpha(p-q)^2}{(p^2+z)(q^2+z)}.$$

Таким образом, выясняется смысл введённой раньше специальной величины $\langle\alpha|p,q\rangle$

$$\langle\alpha|p,q\rangle = (p^2+z)(q^2+z)(\alpha P - Q)^2.$$

Возвращаемся к ряду теории возмущений. Формула (2.23), по сути дела, решает задачу, так как всё сводится к её многократному применению

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}S_1 \; \cdots \mathrm{d}S_N \; \frac{1}{(P-K_1)^{2a} \cdots (K_N - Q)^{2a}} \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{A^N} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_N \frac{(\alpha_1 \cdots \alpha_N)^{a-1}}{(\alpha_1 \cdots \alpha_N P - Q)^{2a}}.
\end{aligned}$$

Как и раньше, всё может быть преобразовано в однократный интеграл, так что получаем

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}S_1 \; \cdots \mathrm{d}S_N \; \frac{1}{(P-K_1)^{2a} \cdots (K_N - Q)^{2a}} \\
&\qquad\qquad = \frac{(-)^{N-1}}{(N-1)!} \frac{1}{A^N} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}\alpha \alpha^{a-1} \frac{(\ln\alpha)^{N-1}}{(\alpha P - Q)^{2a}},
\end{aligned}$$

$$\langle p|\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N\frac{1}{\mathbf{x}}|q\rangle=\frac{A(-)^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{z}}\right]^N \times\frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a}\cdot\int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\alpha^{a-1}\frac{(\ln\alpha)^{N-1}}{(\alpha P-Q)^{2a}}.$$

Вся сумма ряда теории возмущений считается точно так же, как раньше, и в итоге получаем второе представление для функции Грина

$$G(p,q)=\frac{\delta^d(p-q)}{p^2+z}+\frac{A\lambda}{(p^2+z)(q^2+z)} \times\left[\frac{1}{(p-q)^{2a}}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a}\cdot\int\limits_0^1\mathrm{d}\alpha\frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{(\alpha P-Q)^{2a}}\right], \quad (2.24)$$

которое можно переписать в эквивалентном виде при помощи полиномов Гегенбауэра, если вспомнить, что под интегралом стоит производящая функция

$$\frac{1}{(1-2\alpha PQ+\alpha^2)^a}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cdot C_n^a\left(PQ\right),$$

$$G(p,q)=\frac{\delta^d(p-q)}{p^2+z}+\frac{A\lambda}{(p^2+z)(q^2+z)} \times\left[\frac{1}{(p-q)^{2a}}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\frac{(4z)^a}{(p^2+z)^a(q^2+z)^a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^a\left(PQ\right)}{a+n-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}\right]. \quad (2.25)$$

2.3. Операторный метод

В качестве любопытной иллюстрации соотношения звезда-треугольник приведём операторный метод вычисления резольвенты. Метод основан на следующем соотношении

$$\frac{1}{\mathbf{x}^{2\alpha}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\alpha+\beta}}\frac{1}{\mathbf{x}^{2\beta}} =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\beta+n}}\cdot\frac{(-4z)^n\mathrm{A}_n(\alpha,\beta)}{\mathbf{x}^{2(\alpha+\beta+n)}}\cdot\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\alpha+n}}, \quad (2.26)$$

$$\mathrm{A}_n(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)n!}$$

вывод которого дан в Приложении. Тождество (2.26) является обобщением операторного соотношения звезда-треугольник [10]

$$\frac{1}{\mathbf{x}^{2\alpha}}\frac{1}{\mathbf{p}^{2(\alpha+\beta)}}\frac{1}{\mathbf{x}^{2\beta}} = \frac{1}{\mathbf{p}^{2\beta}}\frac{1}{\mathbf{x}^{2(\alpha+\beta)}}\frac{1}{\mathbf{p}^{2\alpha}},$$

которое получается из (2.26) при $z = 0$. Из формулы (2.26) при разложении в ряд по z получается целое семейство соотношений, обобщающих тождество звезда-треугольник [9, 10] на случай, когда сумма индексов линий в вершине больше размерности пространства на $n = 1, 2\cdots$. Рассмотрим ряд теории возмущений для функции Грина

$$\mathbf{G}(z) = \frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \lambda\cdot\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \lambda^2\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \cdots.$$

Ядро оператора $\mathbf{G}(z)$ легко вычислить в импульсном представлении, если получится перегруппировать множители так, что бы вся зависимость от оператора $\mathbf{p}$ выделилась в виде множителей слева и справа. Это как раз то, что происходит в тождестве (2.26), поэтому используем его для преобразования первого нетривиального члена ряда $(\alpha = \beta = \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\right)\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{1}{2}+n}}\cdot\frac{(-4z)^n\mathrm{A}_n^2}{\mathbf{x}^{2(1+n)}}\cdot\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{3}{2}+n}},\end{aligned}$$

где мы ввели компактное обозначение для коэффициентов $\mathrm{A}_n^2 \equiv \mathrm{A}_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Во избежание недоразумений отметим, что двойка – верхний индекс, показывающий степень оператора в левой части равенства. Разберём подробно, что происходит в следующем порядке $(\alpha =$

$1+n,\, \beta=\frac{1}{2})$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n^2 \cdot (-4z)^n \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{1}{2}+n}} \\
&\times \left(\frac{1}{\mathbf{x}^{2(1+n)}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{3}{2}+n}} \frac{1}{\mathbf{x}}\right) \frac{1}{\mathbf{p}^2+z} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathrm{A}_n^2 \cdot \mathrm{A}_m \left(1+n, \frac{1}{2}\right) \cdot (-4z)^{n+m} \\
&\times \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{1+n+m}} \frac{1}{\mathbf{x}^{2(\frac{3}{2}+n+m)}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{2+n+m}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{1+n}} \frac{(-4z)^n \mathrm{A}_n^3}{\mathbf{x}^{2(\frac{3}{2}+n)}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{2+n}}; \\
\mathrm{A}_n^3 &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k^2 \cdot \mathrm{A}_{n-k} \left(1+k, \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

где на последнем шаге мы перешли к новым переменным суммирования $n \to k$; $m \to n-k$. Таким образом возникает итерационная процедура: используем для степени N общий анзатц

$$
\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\right)^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{N-1}{2}+n}} \frac{(-4z)^n \mathrm{A}_n^N}{\mathbf{x}^{2\left(\frac{N}{2}+n\right)}} \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{\frac{N+1}{2}+n}}
$$

и дальше при помощи формулы (2.26) при $\alpha=\frac{N}{2}+n$; $\beta=\frac{1}{2}$ получаем выражение такого же вида для степени $N+1$ с коэффициентами

$$
\mathrm{A}_n^{N+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k^N \cdot \mathrm{A}_{n-k} \left(\frac{N}{2}+k, \frac{1}{2}\right).
$$

Решение рекуррентных соотношений для коэффициентов A_n^N с начальным условием $\mathrm{A}_n^2 \equiv \mathrm{A}_n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ может быть представлено в следующем виде

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_n^{2p} &= \frac{(-)^{p+1}}{(2p-2)!} \partial_x^{2p-2}\, \mathrm{A}^{+}(x; n+p)\big|_{x=0}; \\
\mathrm{A}^{+}(x;k) &= \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+x\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)};
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n^{2p+1} &= \frac{(-)^{p+1}}{(2p-2)!}\partial_x^{2p-2}\ \mathrm{A}^-(x;n+p)\big|_{x=0}\,; \\ \mathrm{A}^-(x;k) &= \frac{\Gamma(k-x)\,\Gamma(k+x)}{\Gamma(1-x)\,\Gamma(1+x)}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Таким образом, коэффициенты A_n^N различаются для чётных и нечётных N и связаны с коэффициентами при степенях x в разложениях двух простых функций $\mathrm{A}^{\pm}$. Тот факт, что приведённые коэффициенты являются решениями рекуррентных соотношений, проверяется прямой подстановкой с использованием следующей формулы суммирования

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c-a-b+n-k)}{k!(n-k)!\Gamma(c+k)} \\ &=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\cdot\frac{\Gamma(c-a+n)\Gamma(c-b+n)}{n!\Gamma(c+n)}. \end{aligned}$$

Теперь, зная коэффициенты A_n^N, можно получить замкнутое выражение для резольвенты. Для этого разбиваем сумму на вклады с чётными и нечётными номерами и в каждом используем выражение для коэффициентов A_n^N

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\left[\frac{\lambda}{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}^2+z)}\right]^n = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\left[\frac{\lambda}{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}^2+z)}\right]^{2p} \\ &+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\left[\frac{\lambda}{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}^2+z)}\right]^{2p+1} \\ &=\sum_{p,n}^{\infty}\left[\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{p+n+\frac{1}{2}}}\frac{(-4z)^n\mathrm{A}_n^{2p}\lambda^{2p}}{\mathbf{x}^{2(p+n)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{p+n+\frac{1}{2}}}\right. \\ &\left.+\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{p+n+1}}\frac{(-4z)^n\mathrm{A}_n^{2p+1}\lambda^{2p+1}}{\mathbf{x}^{2\left(p+n+\frac{1}{2}\right)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{p+n+1}}\right] \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{A}_n^+}{\mathbf{x}^{2(n+1)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+\frac{3}{2}}}\right. \\ &\left.+\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+2}}\frac{\mathrm{A}_n^-}{\mathbf{x}^{2\left(n+\frac{3}{2}\right)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+2}}\right], \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы перешли к новым переменным суммирования. Новые коэффициенты представляются в виде сумм, которые могут быть вычислены точно благодаря тому, что сами коэффициенты A_n^{2p} и A_n^{2p+1} являются коэффициентами ряда Тэйлора для функций $A^{\pm}$.

$$\begin{aligned}
A_n^{+} &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^{2n-2k+2}(-4z)^k A_k^{2n-2k+2} \\
&= \lambda^2(-4z)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}, \\
A_n^{-} &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^{2n-2k+3}(-4z)^k A_k^{2n-2k+3} \\
&= \lambda^3(-4z)^n \frac{\Gamma\left(n+1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(n+1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}.
\end{aligned}$$

В итоге получаем следующее выражение для резольвенты

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(z) &= \frac{1}{\mathbf{p}^2+z} + \lambda\cdot\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{1}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z} \\
&+ \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)} \\
&\times \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+\frac{3}{2}}}\frac{(-4z)^n}{\mathbf{x}^{2(n+1)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{p+n+\frac{3}{2}}} \\
&+ \lambda^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(n+1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)} \\
&\times \frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+2}}\frac{(-4z)^n}{\mathbf{x}^{2\left(n+\frac{3}{2}\right)}}\frac{1}{(\mathbf{p}^2+z)^{n+2}}.
\end{aligned}$$

3. Собственные функции

3.1. Дискретный спектр

Функция Грина имеет полюса по спектральному параметру z в точках дискретного спектра:

$$\mathbf{G}(z) = \sum_n \frac{\sum_k |\,n,k\rangle\langle n,k\,|}{z+z_n} + \cdots ,$$

где мы для краткости опустили вклад непрерывного спектра. Из полученного интегрального представления (2.16) для функции Грина видно, что особенности возникают из-за расходимости интеграла в нуле при условии, что степень α становится целым отрицательным числом $a - \frac{\lambda}{2\sqrt{z}} = -n$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. То же самое получается из представления (2.25). Таким образом, полюса находятся в точках

$$z_n = \frac{\lambda^2}{4(n+a)^2}; \quad n = 0, 1, 2\cdots,$$

что и приводит к хорошо известной формуле для энергии дискретных уровней. Волновые функции дискретного спектра можно определить по вычетам функции Грина в полюсах:

$$G(p,q) = \sum_n \frac{P_n(p,q)}{z + z_n} + \cdots,$$

где

$$P_n(p,q) = \sum_k \Psi_{n,k}(p)\overline{\Psi}_{n,k}(q); \quad \Psi_{n,k}(p) = \langle p|\, n,k\rangle; \quad \overline{\Psi}_{n,k}(q) = \langle n,k\,|q\rangle.$$

В представлении (2.16) вычет в полюсе $z = z_n$ определяется производной по α порядка n в точке $\alpha = 0$ от подынтегральной функции. Таким образом, подынтегральное выражение должно играть роль производящей функции для собственных функций дискретного спектра. Посмотрим, как связаны функции $P_n(z|p,q)$, возникающие при разложении производящей функции в ряд по параметру α

$$\frac{1}{(p^2+z)(q^2+z)}\frac{1}{\langle\alpha|p,q\rangle^a} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(z|p,q),$$

с проекторами на собственные подпространства

$$P_n(p,q) = \sum_k \Psi_{n,k}(p)\overline{\Psi}_{n,k}(q).$$

Ответ на этот вопрос содержит формула (2.10), которую мы перепишем в другом виде при помощи (2.8)

$$\int \mathrm{d}^d k\ \frac{A}{(p-k)^{2a}(k^2+z)} \cdot \partial_\alpha \frac{\alpha^a}{\langle\alpha|k,q\rangle^a} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{\alpha^{a-1}}{\langle\alpha|p,q\rangle^a}. \qquad (3.1)$$

Раскладывая в ряд по α и приравнивая коэффициенты при α^n, получаем тождество

$$(a+n)\int \mathrm{d}^d k \; \frac{A}{(p-k)^{2a}} \cdot P_n(z|k,q) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (p^2+z) P_n(z|p,q), \quad (3.2)$$

при помощи которого можно вывести результат действия гамильтониана на функцию $P_n(z|p,q)$

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}+z)\, P_n(z|p,q) &= (p^2+z)P_n(z|p,q) - \lambda \int \mathrm{d}^d k \; \frac{A}{(p-k)^{2a}} \cdot P_n(z|k,q) \\ &= (p^2+z)\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{z}(n+a)}\right)\cdot P_n(z|p,q). \quad (3.3)\end{aligned}$$

При $z = z_n$ правая часть равенства обращается в ноль и, следовательно, $P_n(p,q) = P_n(z_n|p,q)$ является проектором на собственное подпространство, отвечающее собственному значению $z = z_n$. Явное выражение для проекторов легко получить, используя производящую функцию, при помощи которой они определялись. Кроме того, представление, использующее $SO(d+1)$-симметрию задачи, сразу приводит к явному описанию функций $P_n(z|p,q)$ при помощи полиномов Гегенбауэра

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p^2+z)(q^2+z)}\frac{1}{\langle\alpha|p,q\rangle^a} &= \frac{1}{(p^2+z)^{a+1}(q^2+z)^{a+1}}\frac{1}{(1-2\alpha PQ+\alpha^2)^a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cdot\frac{C_n^a(PQ)}{(p^2+z)^{a+1}(q^2+z)^{a+1}},\end{aligned}$$

так что получаем

$$P_n(z|p,q) = \frac{C_n^a(PQ)}{(p^2+z)^{a+1}(q^2+z)^{a+1}}.$$

Заметим, что функция $P_n(p,q) = \sum_k \Psi_{n,k}(p)\overline{\Psi}_{n,k}(q)$ является производящей функцией для базисных векторов $\Psi_{n,k}(p)$ собственного подпространства, отвечающего энергии z_n. Размерность этого подпространства

$$d_n = \frac{(d-1+2n)\Gamma(d-1+n)}{\Gamma(d)n!},$$

а роль базисных функций играют сферические гармоники на сфере в $\mathbb{R}^{d+1}$ [5, 11].

Аргументом производящей функции является вектор q, дифференцированием по которому можно получить все $\Psi_{n,k}(p)$ из производящей функции $P_n(p,q)$. Вектор q является “внешним” для производящей функции, и мы можем выбирать его по своему усмотрению. При этом имеется большая свобода и, в частности, можно использовать векторы с комплексными компонентами. К самым простым формулам приводит, по-видимому, следующий выбор:

$$q = i\sqrt{z}\cdot n; \quad n = (n_1 \cdots n_d); \quad n^2 = n_1^2 + \cdots + n_d^2 = 1.$$

При таком условии “массовой поверхности” $q^2+z=0$ с точностью до общей нормировки получаем простое выражение для производящей функции

$$\lim_{q^2\to -z}(q^2+z)^{a+1+n}P_n(z|p,q) \sim \frac{(p-q)^{2n}}{(p^2+z)^{a+1+n}}. \tag{3.4}$$

Такая простая производящая функция подсказывает вид собственных функций непрерывного спектра.

3.2. Непрерывный спектр

Для потенциалов с хорошим убыванием на бесконечности волновая функция непрерывного спектра, удовлетворяющая асимптотическим условиям, соответствующим физической картине рассеяния, обычно находится из решения уравнения Липпмана–Швингера. Это уравнение может быть записано следующим образом. Вектор $|\,q\rangle$ является решением свободного уравнения

$$(\mathbf{p}^2 - q^2)|\,q\rangle = 0.$$

В координатном пространстве это плоская волна $\langle x|\,q\rangle = e^{iqx}$, а в импульсном – дельта-функция $\langle p|\,q\rangle = \delta^d(p-q)$. Решение $|\,\psi_q\rangle$ уравнения Липпмана–Швингера

$$|\,\psi_q\rangle = |\,q\rangle + \frac{1}{\mathbf{p}^2-q^2}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}\cdot|\,\psi_q\rangle$$

параметризуется вектором q и может быть представлено в виде ряда теории возмущений

$$\begin{aligned}|\,\psi_q\rangle &= \left(1 - \frac{1}{\mathbf{p}^2-q^2}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}\right)^{-1}|\,q\rangle \\ &= |\,q\rangle + \frac{1}{\mathbf{p}^2-q^2}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}|\,q\rangle + \frac{1}{\mathbf{p}^2-q^2}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2-q^2}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}|\,q\rangle + \cdots,\end{aligned}$$

который имеет почти такую же структуру, как и ряд для функции Грина. Имеется одно отличие: ампутирован пропагатор q^2+z и вместо произвольного спектрального параметра z, который был в операторе $\mathbf{p}^2+z$, теперь $z=-q^2$. То же самое можно сформулировать по-другому: теперь $z\in\mathbb{R}$; $z<0$ и вектор q удовлетворяет условию массовой поверхности $q^2=-z$. В импульсном представлении получаем следующий ряд

$$\begin{aligned}\langle p|\,\psi_q\rangle &= \lim_{q^2\to -z} G(p,q)\cdot(q^2+z)=\delta^d(p-q)+\frac{1}{p^2+z}\langle p\,|\frac{\lambda}{\mathbf{x}}|\,q\rangle\\ &+\frac{1}{p^2+z}\langle p\,|\frac{\lambda}{\mathbf{x}}\frac{1}{\mathbf{p}^2+z}\frac{\lambda}{\mathbf{x}}|\,q\rangle+\cdots=\delta^d(p-q)+\frac{\lambda A}{(p^2+z)(p-q)^{2a}}\\ &+\int \mathrm{d}^d k\ \frac{(\lambda A)^2}{(p-k)^{2a}(k^2+z)(k-q)^{2a}}+\cdots.\end{aligned}$$

При попытке итерационного вычисления интегралов сразу возникают хорошо известные инфракрасные расходимости. Это проявление того факта, что кулоновский потенциал слишком медленно убывает на бесконечности и, как следствие, кулоновская функция Грина имеет другое асимптотическое поведение при $q^2\to -z$: не $(q^2+z)^{-1}$, как для потенциала с хорошим убыванием, а $(q^2+z)^{-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}$. Приведённая асимптотика проще всего вычисляется при помощи интегрального представления (2.16) для функции Грина. При $X=\frac{4z(p-q)^2}{(p^2+z)(q^2+z)}\to\infty$ получаем

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\ \frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{\left[(1-\alpha)^2+\alpha X\right]^a}\\ &\quad = X^{-a+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}\int_0^X \mathrm{d}\alpha\ \frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{\left[\left(1-\frac{\alpha}{X}\right)^2+\alpha\right]^a}\to X^{-a+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}\int_0^\infty \mathrm{d}\alpha\ \frac{\alpha^{a-1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{\left[1+\alpha\right]^a},\end{aligned}$$

где оставшийся интеграл выражается через гамма-функции Эйлера. В итоге лидирующий член асимптотики функции Грина при $q^2+z\to 0$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}G(p,q)&\to\frac{\mathrm{C}}{(p^2+z)^{1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}(p-q)^{2\left(a-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}}\cdot\frac{1}{(q^2+z)^{1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}};\\ C&=\frac{A\lambda^2(4z)^{\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}}{2\sqrt{z}}\cdot\frac{\Gamma\left(a-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}\right)}{\Gamma(a)}.\end{aligned}$$

Полученная асимптотика функции Грина сразу позволяет найти собственные функции непрерывного спектра. Из уравнения

$$(\mathbf{H}+z)\cdot G(p,q)=\delta^d(p-q)$$

следует, что лидирующий член асимптотики при $q^2+z\to 0$ удовлетворяет уравнению без дельта-функции в правой части. Таким образом, собственная функция непрерывного спектра с точностью до нормировки вычисляется по формуле, полностью аналогичной (3.4) в случае дискретного спектра

$$\begin{aligned}\lim_{q^2\to -z}(q^2+z)^{1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}\ G(p,q)\sim\Psi_q(p)\\ =\frac{1}{(p^2+z)^{1+\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}}(p-q)^{2(a-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}})}};\quad q^2+z=0;\end{aligned}\tag{3.5}$$

$\Psi_q(p)$ параметризуется вектором импульса q, удовлетворяющим условию массовой поверхности $q^2=-z$.

Тот факт, что функция $\Psi_q(p)$ является собственной функцией непрерывного спектра, можно доказать и непосредственно при помощи следующей формулы

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^d k\ \frac{1}{(p-k)^{2\alpha}(k^2+z)^{d-\alpha-\beta}(k-q)^{2\beta}}\\ =\frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(d-\alpha-\beta)}\frac{1}{z^{\frac{d}{2}-\alpha}(p-q)^{2\beta}(p^2+z)^{\alpha-\beta}},\end{aligned}\tag{3.6}$$

доказательство которой приведено в Приложении. Формула справедлива при условии $q^2=-z$. В нашей задаче $\alpha=a=\frac{d-1}{2}$, так что всё упрощается

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^d k\ \frac{A}{(p-k)^{2a}}\cdot\frac{1}{(k^2+z)^{a+1-\beta}(k-q)^{2\beta}}\\ =\frac{1}{2\sqrt{z}(a-\beta)}\frac{1}{(p^2+z)^{a-\beta}(p-q)^{2\beta}},\end{aligned}\tag{3.7}$$

и приходим к формуле, аналогичной случаю дискретного спектра (3.3)

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{H}+z)\,\frac{1}{(p^2+z)^{a+1-\beta}(p-q)^{2\beta}} = \frac{p^2+z}{(p^2+z)^{a+1-\beta}(p-q)^{2\beta}} \\
&-\lambda\int \mathrm{d}^d k\ \frac{A}{(p-k)^{2a}}\cdot\frac{1}{(k^2+z)^{a+1-\beta}(k-q)^{2\beta}} \\
&=\left(1-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}(a-\beta)}\right)\cdot\frac{1}{(p^2+z)^{a-\beta}(p-q)^{2\beta}}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, при условии обращения в ноль правой части, т.е. $\beta = a-\frac{\lambda}{2\sqrt{z}}$, получаем собственную функцию непрерывного спектра $\Psi_q(p)$.

4. Приложение

Выведем интегральное тождество, из которого получается целое семейство соотношений, обобщающих соотношение звезда-треугольник [9, 10] на случай, когда сумма индексов линий в вершине больше размерности пространства на $n = 1, 2\cdots$:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(p-k)^{2\alpha}(k^2+z)^{\gamma}(k-q)^{2\beta}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\cdot\int_0^\infty \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\ t_1^{\frac{d}{2}-\beta-1}t_2^{\frac{d}{2}-\alpha-1}t_3^{\frac{d}{2}-\gamma-1} \qquad (4.1)\\
&\times\exp\left[-t_1p^2-t_2q^2-t_3(p-q)^2-z\cdot\frac{t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3}{t_3}\right].
\end{aligned}
$$

Индексы линий удовлетворяют соотношению $\alpha+\beta+\gamma = d$. Первый шаг стандартный – введение швингеровских параметров. Используем соотношение

$$
\frac{1}{p^{2\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \mathrm{d}s s^{\alpha-1}e^{-sp^2}
$$

для каждого из сомножителей, после чего интеграл по k превращается в гауссов и легко вычисляется ($\mathrm{d}^3 s \equiv \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3$)

$$\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(p-k)^{2\alpha}(k^2+z)^{\gamma}(k-q)^{2\beta}} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}$$
$$\times \int_0^\infty \mathrm{d}^3 s\ s_1^{\alpha-1} s_2^{\beta-1} s_3^{\gamma-1} (s_1+s_2+s_3)^{-\frac{d}{2}}$$
$$\times \exp\left[-p^2 \frac{s_1 s_3}{s_1+s_2+s_3} - q^2 \frac{s_2 s_3}{s_1+s_2+s_3} - (p-q)^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2+s_3} - z \cdot s_3\right].$$

Дальше делаем замену переменных

$$t_1 = \frac{s_1 s_3}{s_1+s_2+s_3}; \qquad t_2 = \frac{s_2 s_3}{s_1+s_2+s_3};$$
$$t_3 = \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2+s_3}; \qquad \mathrm{d}^3 t = \frac{s_1 s_2 s_3 \cdot \mathrm{d}^3 s}{(s_1+s_2+s_3)^3}$$

или, в обратную сторону,

$$s_1 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}{t_2}; \qquad s_2 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}{t_1};$$
$$s_3 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}{t_3}; \qquad \mathrm{d}^3 s = \frac{(t_1 t_2 t_3)^2 \cdot \mathrm{d}^3 t}{(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)^3},$$

так что получаем

$$\int_0^\infty \mathrm{d}^3 s\ \frac{s_1^{\alpha-1} s_2^{\beta-1} s_3^{\gamma-1}}{(s_1+s_2+s_3)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-p^2 \frac{s_1 s_3}{s_1+s_2+s_3} - q^2 \frac{s_2 s_3}{s_1+s_2+s_3}\right.$$
$$\left. - (p-q)^2 \frac{s_1 s_2}{s_1+s_2+s_3} - z \cdot s_3\right] = \int_0^\infty \mathrm{d}^3 t\ \frac{t_1^{\frac{d}{2}-\beta-1} t_2^{\frac{d}{2}-\alpha-1} t_3^{\frac{d}{2}-\gamma-1}}{(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)^{d-\alpha-\beta-\gamma}}$$
$$\times \exp\left[-p^2 t_1 - q^2 t_2 - (p-q)^2 t_3 - z \cdot \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1}{t_3}\right].$$

Пока на индексы α, β и γ не накладывалось никаких ограничений. Перепутывающий все переменные интегрирования множитель $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1$ пропадает при условии $\alpha + \beta + \gamma = d$, и мы получаем формулу (4.1). Формула (4.1) приводит к двум тождествам, которые использовались в основном тексте.

- Соотношение (3.6). Если в общей формуле (4.1) использовать условие $q^2 = -z$, показатель экспоненты упростится до выражения $-t_1(p^2+z) - t_3(p-q)^2 - z \cdot \frac{t_1 t_2}{t_3}$. Сначала берётся интеграл по t_2, после чего оставшийся вклад факторизуется в произведение двух интегралов и в итоге получаем (3.6).
- Соотношение (2.26). Показатель экспоненты в (4.1) можно переписать в виде
$$-t_1(p^2+z) - t_2(q^2+z) - t_3(p-q)^2 - z \cdot \frac{t_1 t_2}{t_3}.$$

Делаем замену переменных $t_1 \to t_1(p^2+z)^{-1}$; $t_2 \to t_2(q^2+z)^{-1}$; $t_3 \to t_3(p-q)^{-2}$ и раскладываем экспоненту в ряд по z, так что все коэффициенты легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^d k \frac{1}{(p-k)^{2\alpha}(k^2+z)^{\gamma}(k-q)^{2\beta}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{(p-q)^{2\left(\frac{d}{2}-\alpha-\beta\right)}}{(p^2+z)^{\frac{d}{2}-\beta}(q^2+z)^{\frac{d}{2}-\alpha}} \\
&\times \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 \; t_1^{\frac{d}{2}-\beta-1} t_2^{\frac{d}{2}-\alpha-1} t_3^{\frac{d}{2}-\gamma-1} \\
&\times \exp\left[-t_1 - t_2 - t_3 - \frac{z(p-q)^2}{(p^2+z)(q^2+z)} \cdot \frac{t_1 t_2}{t_3}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \frac{(p-q)^{2\left(\frac{d}{2}-\alpha-\beta+n\right)}}{(p^2+z)^{\frac{d}{2}-\beta+n}(q^2+z)^{\frac{d}{2}-\alpha+n}} \\
&\times \frac{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha+n\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\beta+n\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\gamma-n\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Получившееся в итоге тождество эквивалентно операторному соотношению (2.26) при $\alpha \to \frac{d}{2} - \alpha$ и $\beta \to \frac{d}{2} - \beta$. Если вычислить ядра операторов слева и справа в тождестве (2.26), получится приведённое выше соотношение.

Благодарности

Мы благодарны П. П. Кулишу, Р. Киршнеру, Д. Караханяну и Д. Иванову за обсуждения.

Литература

1. V. A. Fock, *Zur Theorie des Wasserstoffatoms.* — Zeit. Phys. **98** (1935), 145.
2. J. Schwinger, *Coulomb Green's function.* — J. Math. Phys. **5** (1964), 1606.
3. G. S. Adkins, *Derivation of Schrodinger–Coulomb Green's function from the scattering expansion.* — Nuovo. Cim. B **97** (1987), 99.
4. Barry R. Holstein, *Quantum mechanics in momentum space: The Coulomb system.* — Amer. J. Phys. **63**, (8) (1995), 710.
5. M. Bander, C. Itzykson, *Group theory and hydrogen atom.* I, II. — Rev. Mod. Phys. **38** (1966), 330, 346.
6. А. М. Переломов, В. С. Попов, — ЖЭТФ **50** (1966), 179.
7. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* "Наука", Москва, 1971.
8. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.* "Наука", Москва, 1985.
9. А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критичесского поведения и стохастической динамике.* ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
10. A. P. Isaev, *Multi-loop Feynman integrals and conformal quantum mechanics.* — Nucl. Phys. B **662** (2003), 461. `[arXiv:hep-th/0303056]`.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Том 2, Гл. 11: сферические и гиперсферические гармонические многочлены, Наука, Москва, 1974.

Derkachev S., Chicherin D. Green function in the quantum Coulomb problem.

We present in a closed form three methods for the summation of the perturbation series for the Coulomb Green function.

Поступило 10 февраля 2010 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет
Ульяновская ул. 3, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: tchitcherin@gmail.com