Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

С. Э. Деркачёв, А. Н. Манашов

О СПЕКТРЕ АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Введение

Метод ренормгруппы является одним из важнейших средств анализа квантовополевых моделей. В частности, операторное разложение Вильсона лежит в основе теоретического описания как жестких процессов в квантовой хромодинамике (КХД), так и критического поведения систем в точке фазового перехода. Необходимым ингредиентом этого метода является вычисление аномальных размерностей составных операторов. В приложениях наибольший интерес обычно представляют операторы низшей размерности (статистика), либо же операторы наименьшего твиста (=размерность-спин) (КХД). Как правило, такие операторы перенормируется мультипликативно и их аномальные размерности известны с высокой степенью точности. В общем случае, из-за операторного смешивания, проблема нахождения аномальных размерностей оказывается нетривиальной уже в однопетлевом приближении. Хотя матрица смешивания конечномерна, в некоторых случаях представляет интерес вычисление её собственных значений в пределе, когда размер матрицы стремится к бесконечности.

В теории критического поведения интерес к такого рода проблеме возник после того как было обнаружено, что в некоторых моделях в $2+\epsilon$ разложении однопетлевые поправки к размерностям определенных операторов становятся аномально большими, делая их инфракрасно-существенными [1, 2]. При условии, что данный эффект не исчезает при учете высших поправок, это означало бы нестабильность нетривиальной критической точки в рассматриваемых моде-

Ключевые слова : ренормировка составных операторов, матрица смешивания, аномальные размерности, конформная инвариантность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: гранты 07-02-92166, 09-01-93108 (С.Д и А.М.), гранты 08-01-00638, 09-01-12150 (С.Д.).

лях [2–5].

В КХД задачи с большим числом смешивающихся операторов возникают вполне естественно, т.к. начиная с твиста-3 размер матрицы смешивания увеличивается с ростом спина оператора (см. например, работы [6–8].

Как оказалось, целый ряд таких задач может быть решен в аналитическом виде. В случае КХД было обнаружено, что некоторые феноменологически важные эволюционные уравнения являются полностью интегрируемыми [9]. Задача изучения аномальных размерностей стала особенно актуальной в связи с попытками проверить гипотезу AdS/CFT соответствия [10] и обнаружения интегрируемости дилатационного оператора в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [11].

В данной работе мы излагаем технические приемы работы с составными операторами, которые оказались полезными при решении ряда проблем как в скалярной теории поля [12–14], так и в КХД [9, 15–17]. Для того, чтобы максимально упростить изложение, мы рассматриваем теорию безмассового скалярного поля. Задача вычисления аномальных размерностей составных операторов в теории φ^4 рассматривалась в работах [12, 18–20], где были найдены точные решения для аномальных размерностей $2, 3, 4$ – частичных операторов. Мы воспроизведем эти результаты более простым способом и распространим их на операторы с произвольным числом полей.

2. Действие для скалярной теория поля и его симметрии

Мы будем рассматривать самый простой вариант теории поля – теорию скалярного безмассового поля φ с взаимодействием φ^p в евклидовом пространстве размерности d. Действие для этой модели имеет следующий вид

$$\mathrm{S}(\mathrm{g}, \varphi) = \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{\mathrm{g}}{p!} \varphi^p(x) \right], \tag{2.1}$$

где g – константа связи. Всем величинам в действии можно приписать определённые канонические размерности, определив их из требования безразмерности каждого из вкладов. При стандартном выборе импульсу приписывается размерность единица. Используя обозначение Δ_F для канонической размерности величины F, получаем

$$\Delta_p = \Delta_\partial = 1, \quad \Delta_x = -1, \quad \Delta_\varphi = \frac{d}{2} - 1, \quad \Delta_{\mathrm{g}} = p - \frac{d(p-2)}{2}. \tag{2.2}$$

Безразмерность действия эквивалентна его инвариантности, $\mathrm{S}(\mathrm{g},\varphi) = \mathrm{S}\left(\mathrm{g}_\lambda, \varphi_\lambda\right)$, при масштабных преобразованиях поля и константы связи

$$\varphi(x) \to \varphi_\lambda(x) = \lambda^{\Delta_\varphi}\, \varphi\left(\lambda x\right), \quad \mathrm{g} \to \mathrm{g}_\lambda = \lambda^{\Delta_\mathrm{g}}\, \mathrm{g}. \tag{2.3}$$

Размерность пространства d^*, при которой константа связи становится безразмерной, $\Delta_\mathrm{g}(d^*) = 0$, называется логарифмической. Для теории φ^3 $d^* = 6$ и $d^* = 4$ для теории φ^4. В логарифмической размерности в теории не остаётся размерных параметров, поэтому действие инвариантно при масштабных преобразованиях одного лишь поля φ

$$\varphi(x) \to \lambda^{\Delta}\, \varphi\left(\lambda x\right), \tag{2.4}$$

где $\Delta = \Delta_\varphi(d^*) = (d^* - 2)/2$ – каноническая масштабная размерность поля φ в размерности d^*: $\Delta = 2$ для теории φ^3 и $\Delta = 1$ для теории φ^4.

В произвольной размерности d действие S инвариантно относительно трансляций и d-мерных вращений. В логарифмической размерности d^* группа симметрии расширяется до полной группы конформных преобразований, содержащей в качестве подгруппы масштабные преобразования и инверсии. В инфинитезимальной форме d-мерные конформные преобразования поля φ имеют вид:

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \delta_\alpha \varphi(x), \quad \delta_\alpha \varphi = \alpha \cdot \partial\varphi + \frac{\Delta_\varphi}{d} \partial\alpha \cdot \varphi, \tag{2.5}$$

где $\alpha_k(x)$ – решение уравнения

$$\partial_i \alpha_k + \partial_k \alpha_i = \frac{2}{d} (\partial\alpha)\, \delta_{ik}. \tag{2.6}$$

Это уравнение является определяющим для преобразований, принадлежащих конформной группе.

Проверим инвариантность действия (2.1) относительно конформных преобразований в размерности d^*. Вариация члена взаимодействия в размерности d имеет следующий вид:

$$\delta_\alpha \left[\varphi^p\right] = p\varphi^{p-1} \delta_\alpha \varphi = \partial\left[\alpha \cdot \varphi^p\right] + \partial\alpha \cdot \varphi^p \left[\frac{p\Delta_\varphi}{d} - 1\right]$$

Первое слагаемое является полной производной и пропадёт после интегрирования, а коэффициент при втором слагаемом обращается в

ноль в размерности $d^* = \frac{2p}{p-2}$. При вариации кинетического члена в d-мерии получаем:

$$\delta_\alpha \left[\frac{(\partial\varphi)^2}{2} \right] = \partial_i\varphi\partial_k\varphi \left[\partial_i\alpha_k + \partial_k\alpha_i - \frac{2}{d}(\partial\alpha)\delta_{ik} \right] - \frac{\Delta_\varphi}{2d}\varphi^2 \left(\partial_i\partial_i\partial\alpha\right) + \frac{\Delta_\varphi}{2d}\partial_i \left(\varphi^2\partial_i\partial\alpha\right).$$

Первые два вклада обращаются в ноль при условии, что выполнено уравнение (2.6). Нетрудно увидеть, что соотношение $\partial_i\partial_i\partial\alpha = 0$ является прямым следствием (2.6). Последнее слагаемое опять является полной производной и пропадёт после интегрирования. Отметим, что кинетический член инвариантен при конформных преобразованиях в произвольной размерности d, а член взаимодействия только при условии $d = d^*$.

Общее решение уравнения (2.6) в d-измерениях имеет следующий вид

$$\alpha_i(x) = a_i + \omega_{ik}x_k + \lambda x_i + (x^2\delta_{ik} - 2x_ix_k)c_k, \tag{2.7}$$

где a_i, $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$, λ, c_k – произвольные параметры. В глобальной форме конформные преобразования имеют вид

- сдвиги (P_i): $\alpha_i = a_i$; $\varphi(x) \to \varphi(x+a)$;
- вращения (M_{ik}): $\alpha_i = \omega_{ik}x_k$; $\varphi(x) \to \varphi\left(\mathrm{e}^\omega \cdot x\right)$;
- растяжения или масштабные преобразования (D): $\alpha_i = \lambda x_i$; $\varphi(x) \to \lambda^{\Delta_\varphi} \cdot \varphi\left(\lambda x\right)$;
- специальные конформные преобразования (K_i): $\alpha_i = x^2c_i - 2(xc)x_i$;

$$\varphi(x) \to \frac{1}{(1+2xc+x^2c^2)^{\Delta_\varphi}} \cdot \varphi\left(\frac{x_i + x^2c_i}{1+2xc+x^2c^2}\right).$$

Специальное конформное преобразование (K) поля может быть представлено как композиция сдвига и инверсий, $K = R\,C\,R$,

$$R\,\varphi(x) = \frac{1}{x^{2\Delta_\varphi}}\,\varphi\left(\frac{x}{x^2}\right), \quad C\,\varphi(x) = \varphi(x+c). \tag{2.8}$$

Таким образом, помимо обычных сдвигов и вращений в безмассовой теории скалярного поля в логарифмической размерности появляются две новые симметрии: масштабное преобразование и инверсия.

3. Симметричные составные операторы

Локальным составным оператором называется любая линейная комбинация мономов, построенных из полей и их производных, взятых в одной точке (см. например, [21]). В данной работе мы рассмотрим перенормировку специального класса составных операторов в скалярной теории поля, а именно, перенормировку симметричных и бесследовых операторов, $\mathrm{O}_{i_1\ldots i_\ell}$, построенных из n полей и ℓ производных. Технически, крайне удобно рассматривать вместо оператора $\mathrm{O}_{i_1\ldots i_\ell}$ его свертку со вспомогательным вектором u

$$\mathrm{O}(u) = \mathrm{O}_{i_1\ldots i_\ell}\, u_{i_1}\, \ldots u_{i_\ell}, \quad \mathrm{O}_{i_1\ldots i_\ell} = \frac{1}{\ell!}\, \frac{\partial}{\partial u_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial u_{i_\ell}}\, \mathrm{O}(u). \tag{3.1}$$

Как нетрудно понять, оператор построенный из n полей и ℓ производных имеет вид

$$\mathrm{O}\,(u) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=\ell} C_{k_1\ldots k_n}\, (u\partial)^{k_1}\varphi \ldots (u\partial)^{k_n}\varphi$$

$$\text{— члены, пропорциональные} \quad u^2, \tag{3.2}$$

где коэффициенты $C_{k_1\ldots k_n}$ симметричны при любой перестановке индексов $k_1, \ldots, k_n$. Вычитаемые члены ($\sim u^2$) однозначным образом находятся из условия бесследовости оператора $\mathrm{O}_{i_1\ldots i_\ell}$, так что оператор полностью определяется коэффициентами $C_{k_1\ldots k_n}$. Явный вид оператора P вычитающего следы (проектора на бесследовую часть

$$\mathrm{O}(u) - \mathrm{traces} = \mathrm{P}(u, \partial_v)\mathrm{O}(v)\Big|_{v=0} \tag{3.3}$$

приведен в Приложении A. Таким образом, в формуле (3.2) можно опустить вклады $\sim u^2$, подразумевая применение проектора P. Для упрощения формул мы не будем каждый раз выписывать проектор явным образом, считая, что все соотношения понимаются под знаком проектора или по модулю u^2. Если явный вид вычитаемых членов не представляет интереса, можно просто считать, что $u^2 = 0$. В евклидовой метрике такой вектор с необходимостью имеет комплексные компоненты, но поскольку он является всего лишь вспомогательным вектором, то это вполне допустимо.

Формула (3.2) представляет собой разложение произвольного оператора по базисным мономам

$$(u\partial)^{k_1}\varphi \ldots (u\partial)^{k_n}\varphi.$$

Представляется желательным избавиться от привязки к конкретному базису и перейти к "ковариантному" описанию операторов. Для этого перепишем формулу (3.2) в следующем виде

$$\mathrm{O}\,(u) = \psi(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n})\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n)\Big|_{z_1=\ldots=z_n=0}, \tag{3.4}$$

где симметрический полином ψ (=коэффициентная функция) имеет вид

$$\psi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=\ell} C_{k_1\ldots k_n}\, z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \tag{3.5}$$

и производящая функция (=нелокальный оператор [7]) $\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n)$ дается произведением полей в точке x[1]

$$\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{O}_n(z) = \varphi(x + z_1 u) \dots \varphi(x + z_n u). \tag{3.6}$$

Аргументы всех полей в производящей функции $\mathbb{O}_n(z)$ лежат на одной и той же прямой, направленной вдоль вектора u и проходящей через точку x. Поскольку $u^2 = 0$, по аналогии с пространством Минковского, будем называть такую прямую "светоподобной".

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между составными операторами из рассматриваемого нами класса и симметрическими полиномами. Переход к описанию операторов в терминах полиномов полезен тем, что приводит к большей свободе в выборе методов анализа.

Существует еще один естественный способ сопоставить некоторый полином оператору. Предположим, что мы выбрали некоторый базис O_q в пространстве операторов. В этом случае нелокальный оператор $\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n)$ может быть разложен в ряд по этому базису

$$\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n) = \sum_q \widehat{\psi}_q(z_1, \dots, z_n)\, \mathrm{O}_q, \tag{3.7}$$

где коэффициенты разложения, $\widehat{\psi}_q(z_1, \dots, z_n)$, являются (симметрическими) полиномами от z_k. Таким образом, каждому базисному моному O_q можно поставить в соответствие полином $\widehat{\psi}_q(z_1, \dots, z_n)$ и

[1] Без потери общности можно всегда считать $x = 0$, что мы и будем делать впоследствии.

распространить это отображение на все пространство по линейности. В отличие от первого способа, при разных выборах базиса одному и тому же оператору будут соответствовать разные полиномы. Например,

$$\begin{aligned}\mathbb{O}(z_1,z_2) &= \varphi^2 + (z_1+z_2)(u\partial)\varphi^2 + \frac{z_1^2+z_2^2}{2}\,\varphi(u\partial)^2\varphi \\ &\quad + z_1 z_2\,(u\partial)\varphi\,(u\partial)\varphi + \cdots \\ &= \varphi^2 + (z_1+z_2)(u\partial)\varphi^2 + \frac{(z_1+z_2)^2}{2}\,\varphi(u\partial)^2\varphi \\ &\quad + z_1 z_2\,[(u\partial)\varphi\,(u\partial)\varphi - \varphi(u\partial)^2\varphi] + \cdots\end{aligned}$$

Таким образом, в первом случае оператору $\varphi(u\partial)^2\varphi$ соответствует полином $(z_1^2+z_2^2)/2$, а во втором – $(z_1+z_2)^2/2$. Тем не менее, если базис зафиксирован, то отображение $\mathrm{O}_q \leftrightarrow \widehat{\psi}_q$ однозначно определено.

В задаче о перенормировке операторов существует выделенный базис – базис мультипликативно ренормируемых операторов (см. следующий раздел). Как оказывается, полиномы $\widehat{\psi}_q$, связанные с этим базисом, устроены значительно проще, чем ψ_q, что оправдывает некоторую избыточность описания. Более того, многие свойства операторов, в частности свойства симметрии, гораздо проще формулируются в терминах полиномов $\widehat{\psi}_q$.

Отметим также, что, как следует из формул (3.4), (3.7)

$$(\psi_q, \widehat{\psi}_{q'}) \equiv \psi_q(\partial_{z_1},\ldots,\partial_{z_n})\widehat{\psi}_{q'}(z_1,\ldots,z_n)|_{z=0} = \delta_{q\,q'}. \tag{3.8}$$

Это выражение, вследствие взаимно однозначного соответствия между операторами и полиномами ψ и $\widehat{\psi}$, может служить определением скалярного произведения на пространстве операторов. Все эти вопросы будут более подробно обсуждаться в разделе 6.

В заключение этого раздела, мы приведем формулу для размерности пространства операторов $\mathrm{O}_{n,\ell}$, которое изоморфно пространству $C_n(\ell)$ симметрических полиномов степени ℓ от n переменных

$$D(n,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell \dim C_n(\ell) = \prod_{k=1}^{n}(1-t^k)^{-1}. \tag{3.9}$$

Заметим, что с ростом ℓ число независимых операторов быстро увеличивается, $\dim C_n(\ell) \sim \ell^n/(n!(n-1)!)$.

4. Однопетлевая перенормировка составных операторов

N-точечная функция Грина основных полей (=коррелятор) определяется как функциональный интеграл

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_N(\vec{x}, \mathrm{g}) &= \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N)\rangle \\ &= Z^{-1}\int D\varphi\ \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(\mathrm{g},\varphi)}\ \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $Z = \int D\varphi\ \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(\mathrm{g},\varphi)}$ – нормировочный фактор. В произвольной (нецелой) размерности d функции Грина конечны, однако становятся сингулярны при $d \to d^*$. Сингулярности (ультрафиолетовые расходимости) проявляются в виде полюсов по ϵ, $d = d^* - 2\epsilon$, и устраняются перенормировкой поля и константы связи в каждом порядке теории возмущений. А именно, функции Грина $\mathrm{G}_N(x, \mathrm{g})$ конечны в пределе $\epsilon \to 0$, если усреднение в (4.1) производится с ренормированным действием

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_R &= \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{Z_\varphi^2}{2}\,(\partial\varphi)^2 + \frac{g\mu^{(p-2)\epsilon} Z_g Z_\varphi^p}{p!}\varphi^p\right] \\ &= \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{1}{2}\,(\partial\varphi_0)^2 + \frac{g_0}{p!}\varphi_0^p\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

где Z_φ, Z_g – ренормировочные константы и φ_0, g_0 – “голые” поле и заряд,

$$\varphi_0 = Z_\varphi \varphi, \quad g_0 = g \cdot Z_g \mu^{(p-2)\epsilon}. \tag{4.3}$$

Напомним, что для теории φ^3 размерность $d = 6 - 2\epsilon$, а для теории φ^4 $d = 4 - 2\epsilon$. Вместо размерной константы g, (см. (2.2)), мы, как обычно, ввели безразмерную константу связи g и ренормировочную массу μ, $\mathrm{g} = \mu^{(p-2)\epsilon} g$. В схеме минимальных вычитаний (MS) ренормировочные константы Z_φ, Z_g являются рядами по обратным степеням ϵ:

$$Z(g) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{-k}\ Z^{(k)}(g). \tag{4.4}$$

В функциях Грина со вставкой составного оператора, $\mathrm{O}(x)$

$$\begin{aligned} G_O(\vec{x}, g, \mu) &= \langle \mathrm{O}(x)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_N)\rangle \\ &= \int \mathrm{D}\varphi\ \mathrm{e}^{-\mathrm{S}_R}\ \mathrm{O}(x)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_N), \end{aligned} \tag{4.5}$$

появляются дополнительные ультрафиолетовые расходимости, которые устраняются добавлением контрчленов к самому составному оператору. Контрчлен также является составным оператором, имеющим те же квантовые числа, в частности, размерность, но который, как правило не совпадает с исходным. Это явление называется операторным смешиванием. Если, $\mathrm{O}^{(i)}$, $i = 1, \dots, M$, набор смешивающихся при перенормировке операторов, то ренормированный оператор дается следующим выражением

$$[\mathrm{O}^{(i)}]_R = \sum_{k=1}^{M} Q_{ik} \mathrm{O}^{(k)}, \quad Q_{ik}(g) = \delta_{ik} + \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^{-m} Q_{ik}^{(m)}(g), \tag{4.6}$$

где Q_{ik} – так называемая матрица смешивания. Зависимость ренормированного оператора от масштаба μ задается ренормгрупповым уравнением (РГ)

$$\left(\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\delta_{ik} + \gamma_{ik}(g)\right)[\mathrm{O}^{(k)}]_R = 0. \tag{4.7}$$

Здесь $\beta(g)$ – бета-функция

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial\mu} = -(p-2)\varepsilon g\Big(1 + g\partial_g \log Z_g\Big)^{-1}, \tag{4.8}$$

и γ_{ik} матрица аномальных размерностей,

$$\gamma_{ik}(g) = -n_k\,\gamma_\varphi(g)\delta_{ik} + \beta(g)\left[Q^{-1}\partial_g Q\right]_{ik}, \tag{4.9}$$

где n_k – число полей φ в операторе $\mathrm{O}^{(k)}$ и γ_φ – аномальная размерность поля φ

$$\gamma_\varphi = \mu\partial_\mu \log Z_\varphi. \tag{4.10}$$

В рассматриваемых моделях [21, 22]

$$\begin{aligned} \varphi^4:\ & \beta(g) = -2\epsilon g + 3g^2/16\pi^2 + O(g^4), \quad \gamma_\varphi = \mathcal{O}(g^2), \\ \varphi^3:\ & \beta(g) = -\epsilon g - 3g^3/256\pi^3 + O(g^5), \quad \gamma_\varphi = \frac{g^2}{768\pi^3} + \mathcal{O}(g^4). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Уравнение (4.7) позволяет определить поведение корреляторов (4.5) при изменении масштаба

$$G_i\left(t^{-1}\vec{x}; g(\mu), \mu\right) = t^{N\Delta+\Delta_i} \exp\left\{N \int\limits_{\mu}^{t\mu} \frac{d\tau}{\tau} \gamma_\varphi(g(\tau))\right\} \times \left(\mathrm{T} \exp \int\limits_{\mu}^{t\mu} \frac{d\tau}{\tau} \gamma(g(\tau))\right)_{ik} G_k\left(\vec{x}; g(t\mu), \mu\right), \tag{4.12}$$

где Δ – каноническая размерность поля, Δ_i – каноническая размерность составного оператора $\mathrm{O}^{(i)}$, $g(\tau)$ – бегущая константа связи (решение уравнения (4.8)) и знак T означает T – упорядочение матриц γ_{ik}. В общем случае собственные вектора, как и сама матрица $\gamma_{ik}(g)$, зависят от g нетривиальным образом. В критической точке $\beta(g^*) = 0$ формула (4.12) значительно упрощается [22]

$$G_i\left(t^{-1}\vec{x}; g^*\right) = t^{N\Delta_\varphi^*} [t^{\Delta(g^*)}]_{ik} G_k\left(\vec{x}; g^*\right), \tag{4.13}$$

где $\Delta_\varphi^* = \Delta_\varphi + \gamma_\varphi(g^*)$ и $\Delta_{ik}(g^*) = \Delta_i\delta_{ik} + \gamma_{ik}(g^*)$ – полные скейлинговые размерности поля и операторов. Диагонализация матрицы $\Delta_{ik}(g^*)$ дает так называемые мультипликативно ренормируемые операторы и их скейлинговые размерности. Детальный анализ техники перенормировок и соответствующих приложений в квантовой теории поля и статистической физики может быть найден в монографиях [21, 22], мы же приступим к рассмотрению перенормировки класса составных операторов определенного в предыдущем разделе.

Рассмотрим сначала перенормировку оператора состоящего из двух полей (= двухчастичного оператора) $(u\partial)^k\varphi(u\partial)^{\ell-k}\varphi$ в теории φ^4. Вычисляя расходящуюся часть единственной однопетлевой диаграммы, показанной на рис. 1, получаем

$$(u\partial)^k\varphi(u\partial)^{\ell-k}\varphi \to \frac{g}{32\pi^2\epsilon}\,\frac{k!\,(\ell-k)!}{(\ell+1)!}(u\partial)^\ell\varphi^2 = \frac{g}{32\pi^2\epsilon}\frac{1}{\ell+1}\sum_{k=0}^{\ell}(u\partial)^k\varphi(u\partial)^{\ell-k}\varphi.$$

Таким образом, ренормированный оператор имеет вид

$$[(u\partial)^k\varphi(u\partial)^{\ell-k}\varphi]_R = (u\partial)^k\varphi(u\partial)^{\ell-k}\varphi - \frac{g}{32\pi^2\epsilon}\frac{k!(\ell-k)!}{(\ell+1)!}(u\partial)^\ell\varphi^2. \tag{4.14}$$

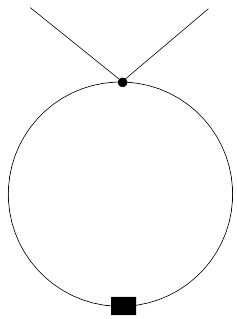

Рис. 1. Однопетлевая диаграмма для теории φ^4.

Во избежание недоразумений отметим, что все формулы понимаются под знаком проектора P или при условии, что $u^2 = 0$. Формулу (4.14) можно переписать при помощи нелокального оператора

$$\mathbb{O}(z_1, z_2) = \sum_{n,m} \frac{z_1^n}{n!} \frac{z_2^m}{m!} (u\partial)^n \varphi (u\partial)^m \varphi = \varphi(z_1 u)\, \varphi(z_2 u)$$

в компактном виде

$$[\mathbb{O}(z_1, z_2)]_R = \mathbb{O}(z_1, z_2) - \frac{g}{32\pi^2\epsilon} [\mathrm{H}_{12}\, \mathbb{O}](z_1, z_2), \tag{4.15}$$

где

$$[\mathrm{H}_{12}\, \mathbb{O}](z_1, z_2) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}\alpha\ \mathbb{O}(z_{12}^\alpha, z_{12}^\alpha) \tag{4.16}$$

и $z_{12}^\alpha = (1-\alpha) z_1 + \alpha z_2$. Для того, чтобы воспроизвести формулу (4.14), достаточно разложить правую и левую части уравнения (4.15) в ряд по степеням z_1 и z_2 и приравнять коэффициенты при мономе $z_1^n z_2^{\ell-n}$. Обобщение на случай n-частичного нелокального оператора очевидно: в однопетлевую диаграмму входят две линии, которые могут соответствовать любым двум полям из n полей φ, поэтому полный ответ представляется в виде суммы по всем вариантам

$$\begin{aligned}[\mathbb{O}_n(z_1, \dots, z_n)]_R \\ = \mathbb{O}_n(z_1, \dots, z_n) - \frac{g}{32\pi^2\epsilon} \sum_{i<k} [\mathrm{H}_{ik} \mathbb{O}_n](z_1, \dots, z_n).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь оператор H_{ik} (двухчастичный гамильтониан) – интегральный оператор, действующий на i-й и k-й аргументы нелокального оператора согласно формуле (4.16). Формула (4.17) содержит всю информацию о перенормировке всех операторов из рассматриваемого нами класса.

Мы получили формулу (4.17), стартовав с рассмотрения перенормировки локальных мономов. Такой переход совсем не обязателен. Все вычисления можно, и гораздо более удобно проводить, работая непосредственно с нелокальными операторами. В качестве примера мы вычислим контрчлен к нелокальному оператору

$$\mathbb{O}_n(z_1, \dots, z_n) = \varphi(z_1 u)\varphi(z_2 u)\dots\varphi(z_n u)$$

в теории φ^3. В однопетлевых диаграммах (см. рис. 2) в вершину нелокального оператора входят только две линии, поэтому достаточно рассмотреть двухчастичный оператор: $\mathbb{O}(z_1, z_2) = \varphi(z_1 u)\varphi(z_2 u)$.

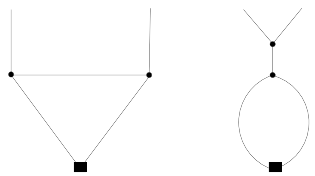

Рис. 2. Однопетлевые диаграммы для теории φ^3.

Левая диаграмма на рис. 2 дается следующим выражением

$$\begin{aligned} &g^2 \int d^d p_1\, \varphi(p_1) \int d^d p_2\, \varphi(p_2) \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{\exp\left[i(u, k+p_1)z_1 + i(u, p_2 - k)z_2\right]}{k^2 (p_1+k)^2 (p_2-k)^2}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

где $\varphi(x) = \int d^d p\, e^{ipx}\, \varphi(p)$. Нам нужен сингулярный по ϵ вклад от внутреннего интеграла, который вычисляется стандартным образом: надо сначала объединить знаменатели, используя фейнмановскую параметризацию

$$k^{-2}(p_1+k)^{-2}(p_2-k)^{-2} = 2\int\limits_0^1 \mathcal{D}\alpha[\alpha_3 k^2 + \alpha_1 (k+p_1)^2 + \alpha_2 (k-p_2)]^{-3},$$

где $\mathcal{D}\alpha = \delta(\sum_{k=1}^{3}\alpha_k - 1)\prod_{k=1}^{3} d\alpha_k$, а затем избавиться от перекрёстных членов в знаменателе, сдвигая переменную интегрирования: $k \to k - \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$. В результате интеграл по k принимает вид

$$A(\alpha, p, z)\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{\exp\{iuk(z_1 - z_2)\}}{[k^2 + m^2(\alpha, p)]^3}.$$

где

$$A(\alpha, p, z) = \exp\left[i(up_1)z_{12}^{\alpha_1} + i(up_2)z_{21}^{\alpha_2}\right], \quad z_{ik}^{\alpha} = (1-\alpha)z_i + \alpha z_k\,,$$

$$m^2(\alpha, p) = \alpha_1(1-\alpha_1)p_1^2 + \alpha_2(1-\alpha_2)p_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2(p_1, p_2). \tag{4.19}$$

Напомним, что всё выражение находится под знаком проектора P, что приводит к уничтожению вкладов, содержащих u^2. Очевидно, что все вклады, возникающие при разложении экспоненты в ряд по $(z_1 - z_2)$, приведут после вычисления импульсного интеграла к выражениям, содержащим u^2. Поэтому под знаком проектора от всей экспоненты замечательным образом остаётся только единица. Сингулярный вклад оставшегося интеграла легко вычисляется при помощи стандартных формул размерной регуляризации

$$\int \frac{d^{6-2\epsilon}k}{(2\pi)^{6-2\epsilon}}\,\frac{1}{[k^2 + m^2(\alpha, p)]} = \frac{1}{2(4\pi)^3\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0).$$

Подставляя полученное выражение в формулу (4.18) получаем, что расходящаяся часть принимает вид

$$\frac{1}{\epsilon}\,\frac{g^2}{(4\pi)^3}\int \mathcal{D}\alpha\,\varphi(z_{12}^{\alpha_1})\,\varphi(z_{21}^{\alpha_2}). \tag{4.20}$$

Вычисление второй диаграммы на рис. 2 совершенно аналогично. В результате получаем следующее выражение для перенормированного оператора

$$[\mathbb{O}(z_1, z_2)]_R = \mathbb{O}(z_1, z_2) - \frac{1}{\epsilon}\,\frac{g^2}{(4\pi)^3}[\mathrm{H}_{12}\mathbb{O}](z_1, z_2), \tag{4.21}$$

где

$$[\mathrm{H}_{12}\mathbb{O}](z_1, z_2) = \int \mathcal{D}\alpha\,\mathbb{O}(z_{12}^{\alpha_1}, z_{21}^{\alpha_2}) - \frac{1}{4}\int_0^1 d\alpha\,\alpha(1-\alpha)\,\mathbb{O}(z_{12}^{\alpha}, z_{12}^{\alpha}). \tag{4.22}$$

Обобщение на n-частичный случай совершенно аналогично случаю теории φ^4

$$[\mathbb{O}_n(z_1,\dots,z_n)]_R = \mathbb{O}_n(z_1,\dots,z_n) - \frac{1}{\epsilon}\frac{g^2}{(4\pi)^3}\sum_{i<k}[\mathrm{H}_{ik}\mathbb{O}_n](z_1,\dots,z_n), \quad (4.23)$$

где H_{ik} парный гамильтониан (4.22) действующий на аргументы z_i и z_k нелокального оператора.

Ренормгрупповое уравнение для нелокального оператора в однопетлевом приближении принимает следующий вид

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - n\gamma_\varphi + c(g)\,\mathbb{H}\right)[\mathbb{O}_n(z_1,\dots,z_n)]_R = 0,$$
$$\mathbb{H} = \sum_{i<k}\mathrm{H}_{ik}, \quad (4.24)$$

где $c(g) = g/(4\pi)^2$ и $c(g) = g^2/(4\pi)^3$ для φ^4 и φ^3 теорий, соответственно, и парные гамильтонианы H_{ik} определены в (4.16), (4.22). Преимущество такой формы записи состоит прежде всего в том, что эта форма, в отличие от уравнения (4.7), не зависит от выбора базисных мономов. Как будет показано далее, оператор $\mathbb{H}$ обладает замечательными свойствами инвариантности, которые крайне сложно увидеть на уровне матрицы смешивания. Не менее важным является то, что в более реалистических теориях, таких как квантовая хромодинамика, техника нелокальных операторов широко используется в приложениях. Многие физические величины, такие как адронные волновые функции, партонные распределения и т.д., определяются как матричные элементы некоторых нелокальных операторов (см. например [8]).

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении мультипликативно ренормируемых операторов O_q, т.е. операторов которые преобразуются сами через себя при изменении масштаба

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_q\right)[\mathrm{O}_q]_R = 0. \quad (4.25)$$

Как уже объяснялось в разделе 3, каждому локальному оператору

можно поставить в соответствие два полинома, ψ_q и $\widehat{\psi}_q$

$$[\mathrm{O}_q]_R = \psi_q(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n})[\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n)]_R\Big|_{z_i=0}, \tag{4.26}$$

$$[\mathbb{O}(z_1, \dots, z_n)]_R = \sum_q \widehat{\psi}_q(z_1, \dots, z_n)\,[\mathrm{O}_q]_R, \tag{4.27}$$

где сумма берется по всем мультипликативно ренормируемым операторам. Подставляя разложение (4.27) в (4.24) и принимая во внимание (4.25) мы получаем, что функция $\widehat{\psi}_q$, соответствующая мультипликативно реномируемому оператору O_q, является собственной функцией оператора $\mathbb{H}$,

$$[\mathbb{H}\widehat{\psi}_q](z_1, \dots, z_n) = \lambda_q\,\widehat{\psi}_q(z_1, \dots, z_n), \tag{4.28}$$

а аномальная размерность γ_q дается следующим выражением

$$\gamma_q = c(g)\lambda_q - n\gamma_\varphi. \tag{4.29}$$

Соответственно, функции ψ_q диагонализуют оператор $\mathbb{H}^*$, сопряженный к $\mathbb{H}$ относительно билинейной формы (3.8)

$$(\psi, \mathbb{H}\,\widehat{\psi}) = (\mathbb{H}^*\,\psi, \widehat{\psi}). \tag{4.30}$$

Явный вид оператора $\mathbb{H}^*$ может быть легко восстановлен. А именно, двухчастичный оператор H^*_{12} принимает вид

$$[\mathrm{H}^*_{12}\psi](z_1, z_2) = \int\limits_0^1 d\alpha\,\psi(\overline{\alpha}z_1 + \alpha z_2, \overline{\alpha}_2 z_2 + \alpha z_1) \tag{4.31}$$

для теории φ^4 и

$$\begin{aligned}[\mathrm{H}^*_{12}\psi](z_1, z_2) = &\int \mathcal{D}\alpha\,\psi(\overline{\alpha}_1 z_1 + \alpha_2 z_2, \overline{\alpha}_2 z_2 + \alpha_1 z_1)\\ &- \frac{1}{4}\int\limits_0^1 d\alpha\,\alpha\overline{\alpha}\,\psi(\overline{\alpha}z_1 + \alpha z_2, \overline{\alpha}z_2 + \alpha z_1)\end{aligned} \tag{4.32}$$

для теории φ^3. Спектральные задачи для операторов $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$ полностью эквивалентны, однако технически оказывается более удобным работать с оператором $\mathbb{H}$. Тем не менее, чтобы полностью исключить один из гамильтонианов из рассмотрения надо найти в явном виде отображение $\widehat{\psi}_q \mapsto \psi_q$.

5. Алгебра симметрии

В логарифмической размерности действие (2.1) инвариантно относительно группы конформных преобразований. Размерная регуляризация нарушает эту инвариантность, приводя к так называемым масштабной и конформной аномалиям в тождествах Уорда для перенормированных функций Грина (полей φ и составных операторов)[2]. Тем не менее, хорошо известно, что однопетлевые контрчлены наследуют симметрии классического действия. Простое доказательство этого утверждения может быть найдено в Приложении B.

Инвариантность однопетлевых контрчленов означает, что гамильтониан $\mathbb{H}$ коммутирует с генераторами группы конформных преобразований. Поскольку мы рассматриваем специальный класс операторов, нам необходимо рассмотреть только те преобразования из конформной группы, которые не выводят из этого класса. Нелокальный оператор $\mathbb{O}$ дается произведением полей с аргументами на прямой, задаваемой "светоподобным" вектором u, $u^2 = 0$. Очевидно, что подгруппа преобразований, отражающих эту прямую на себя и есть нужная нам подгруппа. Если мы введем в рассмотрение второй "светоподобный" вектор v, $v^2 = 0$, $(uv) \neq 0$, то нетрудно проверить, что нужные нам преобразования – это трансляции (uP) вдоль вектора u, специальные конформные преобразования (vK) вдоль вектора v и разность масштабного преобразования D и вращения M_{vu} в плоскости u, v. Два последних преобразования сохраняют прямую $a \cdot u$ по отдельности, однако для рассматриваемого класса действие генератора $M_{vu} + D$ тривиально: $(M_{vu} + D)\varphi = \Delta\varphi$, где Δ – каноническая размерность поля φ. По той же причине можно не рассматривать вращения в плоскости ортогональной к u и v. Действие трех нетривиальных генераторов на поле $\varphi(zu)$ задается дифференциальными операторами

$$S_- = -\partial_z, \quad S_+ = z^2\partial_z + 2jz, \quad S_0 = z\partial_z + j. \tag{5.1}$$

где спин $j = \Delta/2$ ($j = 1/2$ для φ^4 теории и $j = 1$ для φ^3 теории). Генераторы $S_\pm$, S_0 удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли $sl(2)$

$$[S_+, S_-] = 2S_0, \quad [S_0, S_\pm] = S_\pm. \tag{5.2}$$

[2]Подробный анализ и соответствующие ссылки может быть найден в [21, 22].

Генераторы алгебры симметрии гамильтониана $\mathbb{H}$ даются суммой одночастичных генераторов

$$[\mathbb{H}, S_\alpha] = 0, \quad S_\alpha = S_\alpha^{(1)} + \cdots + S_\alpha^{(n)}, \quad \alpha = \pm, 0. \tag{5.3}$$

Формулы (5.1) и (5.3) задают действие $sl(2)$ генераторов на пространстве $\widehat{\psi}$-функций. Определяя генераторы L_α, сопряженные к S_α относительно билинейной формы (3.8)

$$(\psi, S_\pm \widehat{\psi}) = -(L_\mp \psi, \widehat{\psi}), \quad (\psi, S_0 \widehat{\psi}) = (L_0 \psi, \widehat{\psi}), \tag{5.4}$$

получаем следующую (нестандартную) реализацию $sl(2)$ генераторов на дуальном пространстве ψ-функций

$$L_+ = z, \quad L_- = -\left(z\partial_z^2 + 2j\partial_z\right), \quad L_0 = z\partial_z + j. \tag{5.5}$$

Наличие двух генераторов симметрии L_+ и L_0 вполне ожидаемо. Действительно, действие генератора L_+ на коэффициентную функцию локального оператора: $L_+\psi_q = (z_1 + \ldots + z_n)\psi_q$ соответствует взятию полной производной от оператора: $\mathrm{O}_q \to (u\partial)\,\mathrm{O}_q$, тогда как генератор L_0 считает каноническую размерность оператора O_q. В то же время известно, что в безмассовой теории могут смешиваться только операторы одинаковой канонической размерности и взятие полной производной от оператора не меняет его аномальной размерности.

Из вышесказанного следует, что для решения задачи достаточно найти аномальные размерности и явный вид операторов, которые не являются (не могут быть представлены) в виде полной производной от другого оператора. Каждый такой оператор, O_q задает бесконечную цепочку ("башню") операторов $\mathrm{O}_q, (u\partial)\mathrm{O}_q, (u\partial)^2\mathrm{O}_q, \ldots$ имеющих одинаковые аномальные размерности. Полезно переписать разложение (3.7) явно выделяя вклады от каждой "башни"

$$[\mathbb{O}(z_1, \ldots, z_n)]_R = \sum_q \sum_{N=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{N,q}(z_1, \ldots, z_n)\,(u\partial)^N [\mathrm{O}_q]_R. \tag{5.6}$$

Так как нас интересуют в основном операторы O_q, то хотелось бы узнать что-нибудь о свойствах функций $\psi_{0,q} \equiv \psi_q$ и $\widehat{\psi}_{0,q} \equiv \widehat{\psi}_q$, соответствующих таким операторам. Довольно легко показать, что полином $\widehat{\psi}_q$ инвариантен относительно сдвигов. Для этого представим

полную производную от нелокального оператора (5.6) $(\partial_{z_1} + \cdots + \partial_{z_n})[\mathbb{O}(z_1, \ldots, z_n)]_R$ в двух разных видах

$$\sum_q \sum_{N=0}^{\infty} (\partial_{z_1} + \cdots + \partial_{z_n}) \widehat{\psi}_{N,q}(z_1, \ldots, z_n)\, (u\partial)^N [\mathrm{O}_q]_R$$
$$= \sum_q \sum_{N=0}^{\infty} \widehat{\psi}_{N,q}(z_1, \ldots, z_n)\, (u\partial)^{N+1} [\mathrm{O}_q]_R.$$

В сумме в правой части отсутствует вклад операторов без полной производной, поэтому коэффициенты разложения при соответствующих операторах в левой части должны исчезать, то есть

$$(\partial_{z_1} + \ldots + \partial_{z_n}) \widehat{\psi}_{0,q}(z_1, \ldots, z_n) \equiv -S_- \widehat{\psi}_q = 0. \tag{5.7}$$

Функции $\widehat{\psi}_{N,q}$, $N > 0$ имеют вид $\widehat{\psi}_{N,q} \sim S_+^N \widehat{\psi}_q$, образуя бесконечномерное представление $sl(2)$ алгебры с младшим весом $\widehat{\psi}_q$, $S_- \widehat{\psi}_q = 0$. Таким образом, формула (5.6) может быть представлена в виде

$$[\mathbb{O}(z_1, \ldots, z_n)]_R = \sum_q \sum_{N=0}^{\infty} c_{N,q}\, S_+^N \widehat{\psi}_q(z_1, \ldots, z_n)\, (u\partial)^N [\mathrm{O}_q]_R, \tag{5.8}$$

где

$$c_{N,q} = \frac{\Gamma(\Delta_q)}{2^N N! \Gamma(N + \Delta_q)}, \quad S_0 \widehat{\psi}_q = \Delta_q \psi_q. \tag{5.9}$$

Для того, чтобы получить уравнение на полином ψ_q, заметим, что он по определению ортогонален всем векторам вида $S_+ \widehat{\psi}$ для произвольного $\widehat{\psi}$

$$(\psi_q, S_+ \widehat{\psi}) = 0 \Longrightarrow -(L_- \psi_q, \widehat{\psi}) = 0, \tag{5.10}$$

откуда следует, что

$$L_- \psi_q = -\sum_{i=1}^{n} \left(z_i \frac{\partial^2}{\partial {z_i}^2} + 2j \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \psi_q(z_1, \ldots, z_n) = 0. \tag{5.11}$$

Заметим, что уравнения (5.7), (5.11) полностью фиксируют функции ψ_q, $\widehat{\psi}_q$ в двухчастичном случае [23]

$$\begin{aligned} &\widehat{\psi}_n(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^n, \\ &\psi_n(z_1, z_2) = (z_1 + z_2)^n\, C_n^{\Delta - 1/2} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right), \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $C_n^{\Delta-1/2}$ – полином Гегенбауэра.

Парные гамильтонианы H_{ik} коммутируют со всеми двухчастичными генераторами $S_\alpha^{(ik)} = S_\alpha^{(i)} + S_\alpha^{(k)}$ и, как следствие, с двухчастичным оператором Казимира

$$\mathbb{C}_{ik}^2 = S_+^{(ik)} S_-^{(ik)} + S_0^{(ik)}(S_0^{(ik)} - 1) = J_{ik}(J_{ik} - 1), \tag{5.13}$$

где J_{ik} – так называемый двухчастичный оператор конформного спина. Сравнивая собственные значения операторов H_{ik} и $\mathbb{C}_{ik}^2$, можно представить оператор H_{ik} в инвариантном виде как функцию оператора конформного спина J_{ik}

$$\mathrm{H}_{ik} = h(J_{ik}). \tag{5.14}$$

Используя явный вид генераторов (5.1), получаем для оператора Казимира на пространстве $\widehat{\psi}$

$$\mathbb{C}_{ik}^2 = -\partial_i \partial_k (z_i - z_k)^2, \qquad \text{для } \varphi^3\text{-теории} \tag{5.15}$$

$$\mathbb{C}_{ik}^2 = -(z_i - z_k)\partial_i \partial_k (z_i - z_k), \qquad \text{для } \varphi^4\text{-теории.} \tag{5.16}$$

Вычисляя собственные значения гамильтонианов (4.15), (4.22) и операторов Казимира на векторах $\widehat{\psi}_n(z_i, z_k) = (z_i - z_k)^n$, находим

$$\mathrm{H}_{ik} = \frac{1}{J_{ik}(J_{ik} - 1)} - \frac{1}{24}\delta_{J_{ik},2}, \qquad \text{для } \varphi^3\text{-теории} \tag{5.17a}$$

$$\mathrm{H}_{ik} = \delta_{J_{ik},1}, \qquad \text{для } \varphi^4\text{-теории.} \tag{5.17b}$$

Такая инвариантная форма записи уже не несет никаких следов конкретной реализации генераторов симметрии и поэтому верна в любом представлении.

6. Инвариантное скалярное произведение

Инвариантная форма гамильтониана (5.17) гарантирует его самосопряженность относительно $sl(2)$ инвариантного скалярного произведения, которое задается условиями сопряженности для генераторов

$$S_+^{(k)} = -(S_-^{(k)})^\dagger, \quad S_0^{(k)} = (S_0^{(k)})^\dagger. \tag{6.1}$$

Из этих соотношений следует $J_{ik}^{\dagger} = J_{ik}$ и, следовательно, $\mathrm{H}_{ik}^{\dagger} = \mathrm{H}_{ik}$ и $\mathbb{H}^{\dagger} = \mathbb{H}$.

Соотношения (6.1) для генераторов (5.1) приводят к следующему скалярному произведению (на пространстве $\widehat{\psi}$)

$$(z^n, z^k)_{\mathrm{inv}} = \delta_{nk} \frac{k!\,\Gamma(\Delta)}{\Gamma(k+\Delta)} \tag{6.2}$$

или же [24]

$$(\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2)_{\mathrm{inv}} = \frac{\Delta - 1}{\pi} \int\limits_{|z|<1} d^2 z (1 - |z|^2)^{\Delta - 2} \left(\widehat{\psi}_1(z)\right)^* \widehat{\psi}_2(z). \tag{6.3}$$

В тоже время, для нестандартной реализации генераторов (5.5) (пространство ψ функций)

$$(z^n, z^k)_{\mathrm{inv}} = \delta_{nk} \frac{\Gamma(k+\Delta)}{\Gamma(\Delta)}, \tag{6.4}$$

что приводит к следующему выражению в случае двух произвольных полиномов

$$(\psi_1, \psi_2)_{\mathrm{inv}} = (\psi_1(\partial_z))^* \; \psi_2(\partial_z) \, (1 - z\overline{z})^{-\Delta} \Big|_{z=0}. \tag{6.5}$$

На n-частичный случай формулы (6.3), (6.5) обобщаются естественным образом

$$(\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2)_{\mathrm{inv}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Delta - 1}{\pi} \int\limits_{|z_k|<1} d^2 z_k (1 - |z_k|^2)^{\Delta - 2} \times \left(\widehat{\psi}_1(z_1, \dots, z_n)\right)^* \widehat{\psi}_2(z_1, \dots, z_n) \tag{6.6}$$

и

$$\begin{aligned}(\psi_1, \psi_2)_{\mathrm{inv}} &= (\psi_1(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n}))^* \; \psi_2(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n}) \prod_{k=1}^{n} (1 - z_k \overline{z}_k)^{-\Delta}|_{z_k=0} \\ &= (\psi_1(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n}))^* \; \widehat{\psi}_2(z_1, \dots, z_n)|_{z_k=0}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Гамильтонианы $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$ самосопряжены относительно скалярных произведений (6.6) и (6.7), соответственно. Предполагая, что волновые функции ψ_q, $\widehat{\psi}_q$ нормированы на единицу

$$(\psi_q, \psi_{q'})_{\rm inv} = \delta_{qq'} = (\widehat{\psi}_q, \widehat{\psi}_{q'})_{\rm inv} \tag{6.8}$$

и сравнивая, например, формулы (3.8) и (6.7) получаем, что

$$\widehat{\psi}_q(w_1, \dots, w_n) = \psi_q(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_n}) \prod_{k=1}^{n} (1 - z_k w_k)^{-\Delta}|_{z_k=0}, \tag{6.9}$$

где мы приняли во внимание, что собственные функции могут быть выбраны вещественными, $(\psi_q(z))^* = \psi_q(\overline{z})$. Вводя обозначение $E_w(z) = \exp\{\sum_{k=1}^n z_k \overline{w}_k\}$, получаем, что функции ψ_q и $\widehat{\psi}_q$ связаны друг с другом "преобразованием Фурье"

$$\widehat{\psi}_q(w) = (E_w, \psi_q)_{\rm inv}, \quad \psi_q(w) = (E_w, \widehat{\psi}_q)_{\rm inv}. \tag{6.10}$$

Используя свойства сопряженности (6.1) для генераторов, легко проверить, что отображение $T : \psi_q \mapsto \widehat{\psi}_q$, задаваемое формулой (6.10), сплетает генераторы в стандартном и нестандартном представлениях алгебры $sl(2)$

$$T\, L_\alpha = S_\alpha\, T. \tag{6.11}$$

Действие преобразования T на базисные мономы z^k сводится к умножению на фактор $\Gamma(\Delta)/\Gamma(k+\Delta)$ [25]

$$T z^k = z^k \Gamma(\Delta)/\Gamma(k+\Delta). \tag{6.12}$$

Таким образом, в однопетлевом приближении задача нахождения мультипликативно ренормируемых операторов и их аномальных размерностей может быть представлена в виде стандартной квантово-механической задачи: нахождения энергии и волновых функций системы из N частиц с парным взаимодействием.

Завершая этот раздел, мы хотим продемонстрировать, как $sl(2)$ инвариантное скалярное возникает из общих свойств конформной теории поля (КТП). В КТП важную роль играют так называемые конформные операторы. В отличие от всех остальных операторов,

последние преобразуются через себя при преобразовании инверсии, $x \to x' = x/x^2$, а именно

$$\mathrm{O}'_{i_1\ldots i_n}(x') = (x^2)^{\Delta_\mathrm{O}} g_{i_1}{}^{k_1}(x)\ldots g_{i_n}{}^{k_n}(x)\,\mathrm{O}_{k_1\ldots k_n}(x), \tag{6.13}$$

где Δ_O – скейлинговая размерность оператора O и конформный тензор $g_{ik}(x)$ имеет вид

$$g_{ik}(x) = \delta_{ik} - \frac{2x_i x_k}{x^2}. \tag{6.14}$$

При инфинитезимальных преобразованиях (2.7) конформный оператор преобразуется следующим образом

$$\delta_\alpha \mathrm{O}_{i_1\ldots i_l} = \left[\alpha\partial + \frac{\Delta_\mathrm{O}}{d}\partial\alpha\right]\mathrm{O}_{i_1\ldots i_l} + \sum_{k=1}^{l}\partial_{i_k}\alpha_s \mathrm{O}_{i_1\ldots s\ldots i_l}. \tag{6.15}$$

Нетрудно показать, что коэффициентная функция ψ_q симметричного бесследового конформного оператора удовлетворяет уравнению (5.11).

Двухточечный коррелятор двух конформных операторов полностью фиксируется (с точностью до множителя) конформной симметрией и отличен от нуля только при условии, что скейлинговые размерности операторов совпадают [26],

$$\langle \mathrm{O}_1(x)\mathrm{O}_2(y)\rangle \sim \frac{\delta_{\Delta_1\Delta_2}}{|x-y|^{\Delta_1+\Delta_2}}. \tag{6.16}$$

Таким образом, (6.16) задает условие “ортогональности” для конформных операторов [26]. Вычисляя коррелятор (6.16) для операторов вида (3.4) в древесном приближении, получаем

$$\begin{aligned}\langle O_{n,l}(x,u)O_{n',l'}(y,v)\rangle &= \delta_{nn'}\psi_{nl}(\partial_{z_1}\ldots\partial_{z_n})\psi_{n'l'}(\partial_{w_1}\ldots\partial_{w_{n'}})\\ &\times\prod_{k=1}^{n}\langle\varphi(x+z_iu)\varphi(y+w_iu)\rangle\\ &\sim \delta_{nn'}\delta_{ll'}\left(\frac{1}{(x-y)^2}\right)^{n\Delta+l}(\psi_{nl},\psi_{n'l'})_{\mathrm{inv}},\end{aligned} \tag{6.17}$$

где $\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle \sim (x-y)^{2\Delta}$ ($\Delta = 1$ ($\Delta = 2$) для модели φ^4 (φ^3)) и, чтобы упростить выражение, мы положили $(u, x-y) = (v, x-y) = 0$. Таким образом, $sl(2)$ – инвариантное скалярное произведение (6.6), (6.7)

является “тенью” фундаментального свойства (6.16), которое может служить отправной точкой для построения инвариантного скалярного произведения в более сложных ситуациях.

Отметим, что скалярное произведение для двух конформных операторов может быть представлено в виде

$$(\psi_{nl}, \psi_{n'l'})_{\mathrm{inv}} = c_{n,l}\left(\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 du_k u_k^{\Delta-1}\right)\delta\left(1-\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\psi^*_{n,l}(u)\,\psi_{n',l'}(u), \quad (6.18)$$

где функции ψ_{nl}, $\psi_{n'l'}$ удовлетворяют уравнению (5.11)

$$c_{n,l} = \frac{\Gamma(2l+n\Delta)}{\Gamma^n(\Delta)}. \quad (6.19)$$

Вывод этой формулы приведен в Приложении C.

7. Точные решения проблемы диагонализации

За исключением двухчастичного случая, спектр гамильтониана H не удается получить в аналитическом виде. Тем не менее, некоторые собственные значения могут быть вычислены точно, а именно, удается найти в явном виде

- в теории φ^3: аномальные размерности всех трехчастичных операторов с нечетным числом производных;
- в теории φ^4: аномальные размерности всех трехчастичных операторов и некоторых n-частичных операторов.

Как было объяснено ранее, вследствие конформной симметрии достаточно найти аномальные размерности конформных операторов. Функции $\widehat{\psi}_q$, соответствующие конформным операторам, являются трансляционно-инвариантными однородными симметрическими полиномами, $\widehat{\psi}_q \in \widehat{C}_n(l)$,

$$\begin{aligned} &S_-\widehat{\psi}_q(z_1,\dots,z_n) = 0,\\ &S_0\widehat{\psi}_q(z_1,\dots,z_n) = (l+nj)\,\psi_q(z_1,\dots,z_n), \end{aligned} \quad (7.1)$$

($j=\Delta/2$). В дальнейшем нам понадобится формула для размерности пространства $\widehat{C}_n(l)$, $\widehat{D}_{n,l} = \dim\widehat{C}_n(l)$. Базис в пространстве $\widehat{C}_n(l)$ порождается произведениями

$$p_2^{m_2}(z)p_3^{m_3}(z)\dots p_n^{m_n}(z), \quad (7.2)$$

где $2m_2+3m_3+\ldots+nm_n=\ell$ и $m_i\geq 0$ и трансляционно-инвариантные симметрические полиномы $p_i(z_1,\ldots,z_n)$ определяются стандартным образом

$$\prod_{m=1}^{n}(z_m-\frac{s_1}{n}+t)=\sum_{m=1}^{n}t^{n-m}p_m(z_1,\ldots,z_n),\quad s_1=z_1+\ldots+z_n. \tag{7.3}$$

Соответственно, производящая функция $\widehat{D}(n,x)$ для размерностей рассматриваемых пространств $\widehat{D}_{n,l}$ имеет вид

$$\widehat{D}(n,x)\equiv\sum_{l=0}^{\infty}x^l\,\widehat{D}_{n,l}=\prod_{p=2}^{n}(1-x^p)^{-1}. \tag{7.4}$$

Точные решения в теории φ^3. Парный гамильтониан H_{ik} в случае φ^3 теории дается суммой двух операторов (4.22)

$$[\mathrm{H}_{12}^{(a)}\widehat{\psi}](z_1,z_2)=\int\mathcal{D}\alpha\,\widehat{\psi}(z_{12}^{\alpha_1},z_{21}^{\alpha_2})=\frac{1}{2z_{12}^2}\int\limits_{z_2}^{z_1}ds\int\limits_{z_2}^{z_1}dt\,\widehat{\psi}(s,t), \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{H}_{12}^{(b)}\widehat{\psi}](z_1,z_2)&=-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}d\alpha\alpha\overline{\alpha}\,\widehat{\psi}(z_{12}^{\alpha},z_{12}^{\alpha})\\&=-\frac{1}{4z_{12}^3}\int\limits_{z_2}^{z_1}ds\,(z_1-s)(s-z_2)\,\widehat{\psi}(s,s),\end{aligned} \tag{7.6}$$

где $z_{12}=z_1-z_2$. Для того, чтобы найти спектр оператора $\mathbb{H}$ в подсекторе $n=3$, $l=2L+1$ (см. (7.1)), найдем сначала спектр оператора $\mathbb{H}^{(a)}=\mathrm{H}_{12}^{(a)}+\mathrm{H}_{23}^{(a)}+\mathrm{H}_{31}^{(a)}$, а потом учтем эффект вносимый вторым оператором $\mathbb{H}^{(b)}$.

Прежде всего заметим, что уравнение на собственные значения

$$[\mathbb{H}^{(a)}\widehat{\psi}](z_1,z_2,z_3)=\lambda\,\widehat{\psi}(z_1,z_2,z_3) \tag{7.7}$$

может быть переписано в форме дифференциального уравнения. Действительно, после подстановки

$$\widehat{\psi}(z_1,z_2,z_3)=\partial_1\partial_2\partial_3\Phi(z_1,z_2,z_3), \tag{7.8}$$

где $\Phi(z_1, z_2, z_3)$ симметрический полином степени однородности $2L+4$[3] уравнение (7.7) принимает вид

$$\lambda\partial_1\partial_2\partial_3\Phi = -z_{23}^{-2}\partial_1\Phi - z_{13}^{-2}\partial_2\Phi - z_{12}^{-2}\partial_3\Phi. \tag{7.9}$$

Это уравнение может быть представлено в замечательном виде

$$\nabla_1(\mu)\nabla_2(\mu)\nabla_3(\mu)\,\Phi(z_1, z_2, z_3) = 0, \tag{7.10}$$

где операторы $\nabla_i(\mu)$ – операторы Данкла [27]

$$\nabla_i(\mu) = \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{k\neq i}\frac{\mu}{z_{ik}}\mathrm{P}_{ik}, \tag{7.11}$$

μ – новый спектральный параметр, связанный со старым соотношением $\mu(\mu+1) = 1/\lambda$ и P_{ik} оператор перестановки: $\mathrm{P}_{ik}f(z_i, z_k) = f(z_k, z_i)$. Операторы Данкла коммутируют между собой $[\nabla_k(\mu), \nabla_i(\mu)] = 0$ и, что может быть легко проверено, при четных s

$$\nabla_i(-s)(V(z_1, z_2, z_3))^s = 0,$$

где $V(z_1, z_2, z_3)$, определитель Ван-дер-Монда: $V(z_1, z_2, z_3) = z_{12}z_{13}z_{23}$. Таким образом, если степень полинома Φ кратна трем, $2L+4 = 3M$, то $\Phi = V^M$ есть решение уравнения (7.10), при $\mu = -M$. Естественно попытаться искать общее решение в виде ($z \equiv \{z_1, z_2, z_3\}$)

$$\Phi_p(z) = V^{2p}(z)\,f_p(z), \tag{7.12}$$

где $f_p(z_1, z_2, z_3)$ – симметрический полином степени $N_p = 2L+4-6p$. Подставляя $\Phi_p(z)$ в уравнение (7.10) и выбирая $\mu = -2p$ получаем следующее уравнение на функцию f_p,

$$\mathcal{M}\,f_p(z) = 0, \tag{7.13}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= z_{12}z_{23}z_{31}\partial_1\partial_2\partial_3 - 8p^3[z_{23}\partial_1 + z_{31}\partial_2 + z_{12}\partial_3] \\ &= -2p\,[z_{23}z_{31}(\partial_1-\partial_2)\partial_3 + z_{12}z_{23}(\partial_3-\partial_1)\partial_2 + z_{12}z_{31}(\partial_2-\partial_3)\partial_1].\end{aligned} \tag{7.14}$$

[3]Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $\Phi(z_1, z_2, z_3)$ зануляется, когда два аргумента совпадают, $\Phi(z_1, z_2, z_2) = 0$. Принимая во внимание, что полином Φ симметричен при перестановках аргументов, получаем $\Phi(z_1, z_2, z_2) = (z_{12}z_{23}z_{31})^2 f(z_1, z_2, z_3)$.

Для того, чтобы показать, что уравнение (7.13) имеет решение, заметим что оператор $\mathcal{M}$ переводит симметричную функцию в антисимметричную:

$$\mathcal{M}\, f_p(z_1, z_2, z_3) = z_{12} z_{23} z_{31} \phi_p(z_1, z_2, z_3),$$

где $f_p \in \widehat{C}_3(N_p)$ и $\phi_p \in \widehat{C}_3(N_p - 3)$. Поэтому, если $\dim \widehat{C}_3(N_p) > \dim \widehat{C}_3(N_p - 3)$, то оператор $\mathcal{M}$ обладает нетривиальным ядром при любом p. Так как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\widehat{D}_{3,l+3} - \widehat{D}_{3,l} \right) x^l = x(1 - x^2)^{-1} \tag{7.15}$$

мы получаем, что $\dim \widehat{C}_3(N_p) - \dim \widehat{C}_3(N_p - 3) = 1$. Таким образом, для каждого $p = 1, 2, 3 \ldots \big[(L+3)/3\big]$ существует по крайней мере одно решение уравнения (7.13) и, как следствие, по крайней мере одна собственная функция гамильтониана $\mathbb{H}^{(a)}$ с собственным значением

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\,(2p-1)}. \tag{7.16}$$

Поскольку $\dim \widehat{C}_3(2L+1) = \big[(L+3)/3\big]$ мы заключаем, что найдены все собственные вектора оператора $\mathbb{H}^{(a)}$ и что они не вырождены.

Нам осталось включить в рассмотрение оператор $\mathbb{H}^{(b)}$. Заметим, что собственные функции, ψ_p, при $p > 1$ обращаются в ноль при совпадении двух аргументов

$$\psi_p(z_1, z_2, z_3) = \partial_1 \partial_2 \partial_3 \Phi_p(z_1, z_2, z_3) = z_{12} z_{23} z_{31} \Psi_p(z_1, z_2, z_3)$$

и вследствие этого, $\mathbb{H}^{(b)} \psi_p = 0$ при $p > 1$. Таким образом, добавление гамильтониана $\mathbb{H}^{(b)}$ изменяет только лишь собственную функцию и собственное значение при $p = 1$. Собственная функция полного гамильтониана имеет вид

$$\psi = f_0 + \sum_{p=2}^{[L/3+1]} c_p \psi_p, \tag{7.17}$$

где

$$f_0(z_1, z_2, z_3) = z_{12}^{2L}(z_{13} + z_{23}) + \text{перестановки}.$$

Собственное значение может быть легко найдено

$$\lambda_1 = \frac{11}{24} + \frac{1}{4(L+2)(2L+3)}. \tag{7.18}$$

Остальные собственные значения имеют вид (7.16), $p = 2, \ldots, [L/3+1]$.

Точные решения в теории φ^4. Проблема диагонализация матрицы смешивания в теории φ^4 рассматривалась в работах [12, 13, 18, 19]. В отличие от φ^3 модели, n-частичные операторы с рациональными собственными значениями могут быть найдены для произвольного n. Такое отличие объясняется простотой двухчастичного гамильтониана (см. (4.15), (5.17))

$$[\mathrm{H}_{ik}\widehat{\psi}](z) = \frac{1}{z_i - z_k}\int\limits_{z_k}^{z_i} ds\ \widehat{\psi}(z_1, \dots, s, \dots, s, \dots, z_n), \tag{7.19}$$

который, действуя на функцию, "склеивает" два её аргумента. Из этого немедленно следует, что любая функция, обращающаяся в ноль при совпадении двух аргументов, принадлежит ядру оператора $\mathbb{H}$. Такие функции имеют вид $\widehat{\psi}_0(z) = \left(\prod_{i<j} z_{ij}^2\right) f(z)$. Для размерности данного подпространства, $\widehat{C}_n^{(0)}(l)$, где l – степень однородности симметрического трансляционного инвариантного полинома $\widehat{\psi}_0(z)$, получаем $\dim \widehat{C}_n^{(0)}(l) = \dim \widehat{C}_n(l - n(n-1))$.

Собственные вектора, которые не принадлежат $\widehat{C}_n^{(0)}(l)$, будем называть ненулевыми.

- При $n = 2$ существует единственный ненулевой собственный вектор $\widehat{\psi} = const$ с собственным значением $\lambda = 1$.
- При $n = 3$, $\dim \widehat{C}_3(l) - \dim \widehat{C}_3^{(0)}(l) = 1$, для каждого l существует лишь один ненулевой собственный вектор с собственным значением $\lambda_l = 1 + \frac{2(-1)^l}{l+1}$, $l = 0, 2, 3 \dots$.

Хотя для $n > 3$ не удается найти все ненулевые собственные вектора в явном виде, оператор H имеет бесконечное число инвариантных подпространств, для которых спектральная проблема может быть решена точно. Подчеркнем, что это не полное решение проблемы, а только описание семейства собственных векторов с рациональными собственными значениями.

Обозначим через $\widehat{\psi}_{ik}(s, z)$ редуцированную функцию,

$$\widehat{\psi}_{ik}(s, z) = \widehat{\psi}(z_1, \dots, z_n)\Big|_{z_i = z_k = s} \tag{7.20}$$

и представим уравнение на собственные значения в виде

$$\lambda\widehat{\psi}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i<k} \frac{1}{z_i - z_k}\int\limits_{z_k}^{z_i} ds\ \widehat{\psi}_{ik}(s, z). \tag{7.21}$$

Это уравнение показывает, что при ненулевом λ полная волновая функция $\widehat{\psi}(z)$ может быть восстановлена по редуцированной.

Положим в уравнение (7.21) $z_1 = z_2$ и сделаем подстановку

$$\widehat{\psi}(z_1, z_1, z_3, \dots, z_n) = \partial_1 F(z_1, z_3, \dots, z_n). \tag{7.22}$$

Функция F может быть выбрана трансляционно-инвариантной и симметричной относительно $z_3, \dots, z_n$. Предположим дополнительно, что полином $F(z_1, z_3, \dots, z_n)$ обращается в ноль при совпадении любых двух аргументов. Далее мы докажем, что решение с такими свойствами действительно существует. Уравнение (7.21) в терминах новой функции F переписывается следующим образом

$$(\lambda - 1)\partial_1 F(z_1, z_2, \dots, z_N) - 2\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{z_1 - z_k} P_{1k} F(z_1, \dots, z_N) = 0, \tag{7.23}$$

где мы, для удобства, перенумеровали переменные $\{z_1, z_3, \dots, z_n\} \to z \equiv \{z_1, z_2 \dots, z_N\}$, $(N = n - 1)$. При $\lambda \neq 1$ уравнение (7.23) может быть записано в виде

$$\nabla_1(\mu)\, F(z_1, \dots, z_N) = 0, \tag{7.24}$$

где $\mu = 2/(\lambda - 1)$, а $\nabla_1(\mu)$ оператор Данкла (7.11). При $\mu_s = (-1)^{s+1} s$, $s = 1, 2, \dots, \left[\dfrac{2(l+1)}{N(N-1)}\right]$, уравнение (7.24) имеет нетривиальные решения вида

$$F_s(z) = V^s(z) f_s(z), \tag{7.25}$$

где $V(z)$ определитель Ван-дер-Монда $V(z) = \prod_{i<k}(z_i - z_k)$. Доказательство примерно такое же, как в случае теории φ^3. Так как $\nabla_1(\mu_s) V^s(z) = 0$, получаем следующее уравнение на функцию f_s

$$L f_s(z) = \partial_1 f_s(z) + \sum_{k \neq 1} \frac{s}{z_{1k}} (\mathrm{P}_{1k} - 1) f_s(z) = 0. \tag{7.26}$$

При четных $s = 2p$, функция $f_s(z)$ является трансляционно-инвариантным полином степени $l_p^+ = l + 1 - pN(N-1)$, симметричным по переменным $z_2, \dots, z_N$. Каждый такой полином однозначно связан с симметрическим полиномом той же степени, зависящим от меньшего

$(N-1)$ числа переменных: $f_s(z) = f_s(0, z_2 - z_1, \dots, z_N - z_1)$. Оператор L отображает пространство полиномов $f_s(z)$ в пространство полиномов степени $l_p^+ - 1$ с такими же свойствами. Таким образом, число нетривиальных решений уравнения не меньше, чем разность размерностей этих пространств:

$$\dim C_{N-1}(l_p^+) - \dim C_{N-1}(l_p^+ - 1) = \dim \widehat{C}_{N-1}(l_p^+),$$

то есть равно числу трансляционно инвариантных полиномов от $N-1$ переменной степени l_p^+. Заметим, что решение с $p = 1$ соответствует собственному числу $\lambda = 0$ и должно быть исключено из спектра, т.к. не соответствует симметричной волновой функции.

При нечетных $s = 2p + 1$, полином $f_s(z)$ антисимметричен относительно перестановок $z_2, \dots, z_N$ и может быть представлен в виде $f_s(z) = \Big(\prod\limits_{2 \le i < k < N} z_{ik}\Big)\overline{f}_s(z)$, где степень полинома $\overline{f}_s(z)$ равна $l_p^- = l + 1 - (N-1)(N(p-1)+1)$. Соответственно, число независимых решений уравнения (7.24) при нечетных s, равно $\dim \widehat{C}_{N-1}(l_p^-)$.

Таким образом для данного l мы нашли собственные вектора со следующими собственными значениями

$$\lambda_m = 1 + \frac{2(-1)^m}{m+1}, \quad m = 0, 2, 3, \dots \left[\frac{2(l+1)}{N(N-1)}\right] - 1. \tag{7.27}$$

Заметим, что приведённая конструкция описывает все точные результаты для $n = 2, 3, 4$, полученные в [12, 18, 19].

Приложения

А. Проектор на бесследовую часть. Оператор P_l, проектирующий тензор ранга l на его бесследовую часть

$$\begin{aligned} &\Psi_l(x,u) \to \mathrm{P}_l(u, \partial_v)\Psi_l(x,v)\big|_{v=0}, \\ &\Psi_l(x,u) = \Psi_{i_1 \dots i_l}(x) u^{i_1} \dots u^{i_l} \end{aligned} \tag{A.1}$$

определяется следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_l(u, \partial_v)\mathrm{P}_l(v,w)\Big|_{v=0} &= \mathrm{P}_l(u,w), \\ \partial_u^2 \mathrm{P}_l(u,v) = \partial_v^2 \mathrm{P}(u,v) &= 0. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Первое соотношение – это свойство любого проектора $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. Второе уравнение есть следствие уравнения $\mathrm{P}_l\, u^2 F(u) = 0$, которое эквивалентно требованию вычитания следов. Уравнения (A2) однозначно фиксируют вид проектора P_l

$$\mathrm{P}_l(u,v) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2^l\,\Gamma(\lambda+l)} \cdot \left(u^2v^2\right)^{\frac{l}{2}} \cdot C_l^{\lambda}\left(\frac{(uv)}{\sqrt{u^2v^2}}\right), \tag{A.3}$$

где $\lambda = d/2 - 1$, и C_l^{λ} – полином Гегенбауэра.

Ответ для суммы всех проекторов $\mathrm{P} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l$ может быть записан в компактной форме в виде контурного интеграла

$$\mathrm{P}(u,v) = \Gamma(\lambda) \int\limits_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{(4z)^{\lambda} e^{-z}}{\left[u^2v^2 - 4zuv + 4z^2\right]^{\lambda}}, \tag{A.4}$$

где контур интегрирования идет по часовой стрелке из $-\infty$ в $-\infty$ и охватывает все точки ветвления подинтегрального выражения: $z = \{0, uv \pm \sqrt{(uv)^2 - u^2v^2}\}$.

B. Инвариантность однопетлевых контрчленов. Действие (2.1) в нецелой размерности $d = 4(6) - 2\epsilon$ более не инвариантно относительно масштабных и конформных преобразований. Однако, нетрудно показать, что эти симметрии выживают на уровне однопетлевых контрчленов и, таким образом, являются симметриями оператора $\mathbb{H}$. Для полноты картины мы приведем здесь простое доказательство этого утверждения.

Обозначим через $\Delta\mathrm{O}$ однопетлевой контрчлен к составному оператору O. Это означает, что все функции Грина с вставкой оператора $\mathrm{O} + \Delta\mathrm{O}$ конечны в одной петле или же, что функционал

$$G_O(J) = \int D\varphi\, e^{-\mathrm{S}_R(\varphi) + J\varphi} (\mathrm{O}(\varphi) + \Delta\mathrm{O}(\varphi)) \tag{B.1}$$

конечен в одной петле. Далее, обозначим через $\delta_\alpha \mathrm{O} = (\delta\mathrm{O}/\delta\varphi)\,\delta_\alpha\varphi$ и $\Delta(\delta_\alpha \mathrm{O})$ преобразованный оператор и контрчлен к нему. Утверждение об инвариантности однопетлевых контрчленов означает, что

$$\Delta(\delta_\alpha \mathrm{O}) = \delta_\alpha(\Delta\mathrm{O}). \tag{B.2}$$

Для того, чтобы доказать (B.2), сделаем замену переменных $\varphi \to \varphi' = \varphi + \delta_\alpha \varphi$ в функциональном интеграле (B.1). Удерживая вклады, линейные по α, получаем следующее тождество

$$\begin{aligned} &\int D\varphi\, e^{-\mathrm{S}_R(\varphi)+J\varphi}\,(\delta_\alpha \mathrm{O}(\varphi) + \delta_\alpha \Delta \mathrm{O}(\varphi)) \\ &= \int D\varphi\, e^{-\mathrm{S}_R(\varphi)+J\varphi}\,(\delta_\alpha \mathrm{S}_R - J\delta_\alpha\varphi) \times (\mathrm{O}(\varphi) + \Delta \mathrm{O}(\varphi)). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Нам необходимо показать, что левая часть уравнения (B. 3) конечна в пределе $\epsilon \to 0$. Этого можно достигнуть, доказав, что конечна правая часть. Прежде всего заметим, что, поскольку $\delta_\alpha \varphi = K_\alpha \varphi$, где K линейный дифференциальный оператор, член, пропорциональный J в правой части уравнения (B.3), может быть представлен в виде

$$-\int d^d x J(x) K_\alpha \frac{\delta}{\delta J(x)} G_O(J)$$

и поэтому конечен в одной петле.

Рассмотрим теперь вклад пропорциональный $\delta_\alpha \mathrm{S}_R$. Прежде всего заметим, что, как было показано ранее, кинетический член действия, T, ($\mathrm{S} = T + V$) инвариантен относительно конформных преобразований в произвольной размерности d. Таким образом, получаем[4]

$$\delta_\alpha \mathrm{S} = \delta_\alpha V = \epsilon g \mu^{k\epsilon} \int d^d x c_\alpha(x)\, \varphi^p(x) = \epsilon g \mu^{k\epsilon} \int d^d x V_{\mathrm{eff}}(x), \tag{B.4}$$

где $k = 1$ для φ^3 теории и $k = 2$ для φ^4 теории, $c_\alpha(x)$ линейная функция x зависящая от параметров преобразования. Заметим, что вариация действия пропорциональна константе связи g и параметру ϵ (при $\epsilon = 0$ действие инвариантно).

Функциональный интеграл

$$\epsilon g \mu^{k\epsilon} \int D\varphi\, e^{-S(\varphi)+J\varphi} \left(\int d^d x V_{\mathrm{eff}}(x) \right) \mathrm{O}(\varphi), \tag{B.5}$$

в интересующем нас порядке по константе связи, дается суммой однопетлевых диаграмм показанных на рис. 1 [φ^4] и рис. 2 [φ^3], где одна

[4]Контрчлены к действию и к оператору приводят к вкладам более высокого порядка по константе связи, поэтому ими можно пренебречь.

из вершин взаимодействия заменена на V_{eff}. Эти диаграммы имеют самое большее простой полюс по ϵ. Принимая во внимание, что вся диаграмма умножается на ϵ (см. (B.4)) получаем, что правая часть уравнения (B.3) и, следовательно, его левая часть, конечны при $\epsilon \to 0$. Это означает, что оператор $\delta_\alpha \Delta \mathrm{O}(\varphi)$ есть ничто иное, как контрчлен к оператору $\delta_\alpha \mathrm{O}(\varphi)$ и, таким образом, $\Delta(\delta_\alpha \mathrm{O}) = \delta_\alpha(\Delta \mathrm{O})$.

Не вдаваясь в детали, отметим, что приведенное доказательство (и само свойство инвариантности) справедливо только для "физических" операторов, т.е. тех, которые не обращаются в ноль при учёте уравнений движения. Это связано с тем, что только для таких операторов мы можем исключить диаграммы с переходами $\varphi\varphi \to \partial^2\varphi$ с помощью уравнений движения.

C. Скалярное произведение для конформных операторов. Для того, чтобы доказать формулу (6.18), прежде всего покажем, что для конформных операторов скалярное произведение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}&(\psi_{nl}, \psi_{n'l'})_{\text{inv}}\\ &\quad = \psi^*_{nl}(\partial_x)\psi_{n'l'}(\partial_y) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{[1-\beta x_i - \alpha y_i - (1-\alpha\beta)x_i y_i]^\Delta}\bigg|_{x,y=0}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

где α, β – произвольные числа. Напомним, что коэффициентные функции конформных операторов ψ_{nl}, $\psi_{n'l'}$ удовлетворяют уравнению (5.11), а функции $\widehat{\psi}_{nl}$, $\widehat{\psi}_{n'l'}$ трансляционно инвариантны. Тогда, стартовав с представления (6.6), получаем

$$\begin{aligned}\psi^*_{nl}(\partial_x)\widehat{\psi}_{n'l'}(x) &= \psi^*_{nl}(\partial_x)\widehat{\psi}_{n'l'}(x+\alpha)\\ &= \psi^*_{nl}(\partial_x)\prod_{i=1}^{n}[1-(x_i+\alpha)y_i]^{-\Delta}\\ &= \psi_{n'l'}(\partial_y)\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha y_i)^{-\Delta}\,\widehat{\psi}^*_{nl}\left(\frac{y}{1-\alpha y}\right)\\ &= \psi_{n'l'}(\partial_y)\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha y_i)^{-\Delta}\,\widehat{\psi}^*_{nl}\left(\frac{y}{1-\alpha y}+\beta\right)\\ &= \psi^*_{nl}(\partial_x)\psi_{n'l'}(\partial_y)\prod_{i=1}^{n}\left[1-x_i\Big(\frac{y_i}{1-\alpha y_i}+\beta\Big)\right]^{\Delta}(1-\alpha y_i)^{-\Delta},\end{aligned} \tag{C.2}$$

что приводит к формуле (C.1) после перемножения факторов. Выбрав $\alpha = \beta = 1$ и представив $[1 - x_i - y_i]^{-\Delta}$ в виде

$$[1 - x_i - y_i]^{-\Delta} = \Gamma^{-1}(\Delta) \int\limits_0^\infty dt_i e^{-t(1-x_i-y_i)}$$

можно явно выполнить все дифференцирования по x_i, y_i. Тогда, сделав замену переменных $T = \sum_i t_i$, $t_i = u_i T$ и учтя, что ψ_{nl}, $\psi_{n'l'}$ однородные полиномы, немедленно получим формулу (6.18).

Литература

1. V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, and V. I. Yudson, — Phys. Lett. A **134** (1989), 245.
2. F. Wegner, — Z. Phys. **B78** (1990), 33.
3. G. E. Castilla, S. Chakravarty, — Nucl. Phys. **B485** (1997), 613.
4. E. Brezin, S. Hikami, *Fancy and facts in the* $(d-2)$ *expansion of nonlinear sigma models.* `arXiv:cond-mat/9612016`.
5. S. E. Derkachov and A. N. Manashov, — Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 1423.
6. A. P. Bukhvostov, G. V. Frolov, L. N. Lipatov, E. A. Kuraev, — Nucl. Phys. **B258** (1985), 601.
7. I. I. Balitsky and V. M. Braun, — Nucl. Phys. B **311** (1989), 541.
8. V. M. Braun, G. P. Korchemsky, and D. Mueller, — Prog. Part. Nucl. Phys. **51** (2003), 311.
9. V. M. Braun, S. E. Derkachov, and A. N. Manashov, — Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 2020.
10. J. M. Maldacena, — Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 231; Int. J. Theor. Phys. **38** (1999), 1113.
11. N. Beisert, — Nucl. Phys. B **676** (2004), 3.
12. S. E. Derkachov and A. N. Manashov, — Nucl. Phys. B **455** (1995), 685.
13. S. E. Derkachov and A. N. Manashov, — J. Phys. A **29** (1996), 8011.
14. S. E. Derkachov, S. K. Kehrein, and A. N. Manashov, – Nucl. Phys. B **493** (1997), 660.
15. V. M. Braun, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, — Nucl. Phys. B **553** (1999), 355.
16. V. M. Braun, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, — Nucl. Phys. B **603** (2001), 69.
17. A. V. Belitsky, S. E. Derkachov, G. P. Korchemsky, and A. N. Manashov, — Phys. Lett. B **594** (2004), 385.
18. S. K. Kehrein, F. J. Wegner, and Y. M. Pis'mak, — Nucl. Phys. **B402** (1993), 669.
19. S. K. Kehrein, F. J. Wegner, — Nucl. Phys. **B424** (1994), 521.
20. S. K. Kehrein, — Nucl. Phys. **B453** (1995), 777.
21. D. C. Collins, *Renormalization.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

22. А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критичесского поведения и стохастической динамике.* Изд-во ПИЯФ, Санкт-Петербург, 1998.
23. Yu. M. Makeenko, — Sov. J. Nucl. Phys. **33** (1981), 440; Yad. Fiz. **33** (1981), 842.
24. I. M. Gelfand, M. I. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions.* Vol. 5 Integral geometry and representation theory, New York, NY Academic Press, 1966.
25. T. Ohrndorf, — Nucl. Phys. B **198** (1982), 26.
26. A. M. Polyakov, — JETP Lett. **12** (1970), 381; Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **12** (1970), 538; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **66** (1974), 23.
27. C. F. Dunkl, — Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 167.

Derkachov S. E., Manashov A.N. On the spectrum of anomalous dimensions of composite operators in the scalar field theory.

In the one-loop approximation the problem of the diagonalization of the mixing matrix is equivalent some quantum mechanical eigenvalue problem. For the illustration of this technik we consider two simplest examples of the scalar field theories.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет
Ульяновская ул. 3, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 10 февраля 2010 г.