Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

Е. Ш. Гутшабаш

ОБ УРАВНЕНИИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{R}^3$: РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СВОЙСТВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1. Напомним, что уравнение минимальной поверхности (МП) в $\mathbb{R}^3$ возникает в дифференциальной геометрии дважды: как условие обращения в нуль ее средней кривизны и как условие минимума функционала площади [1–2].

Пусть $(u_1,\, u_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, S – некоторая C^2 – регулярная поверхность над областью Ω, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2)$ – радиус-вектор точки, принадлежащей S, и при этом $I(du_1,\, du_2) = Edu_1^2 + 2Fdu_1du_2 + Gdu_2^2$, $II(du_1,\, du_2) = Ldu_1^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2^2$ – ее первая и вторая квадратичная формы соответственно, где $E = \mathbf{r}_{u_1}^2$, $F = (\mathbf{r}_{u_1}, \mathbf{r}_{u_2})$, $G = \mathbf{r}_{u_2}^2$, $L = (\mathbf{r}_{u_1u_1}, \mathbf{n})$, $M = (\mathbf{r}_{u_1u_2}, \mathbf{n})$, $N = (\mathbf{r}_{u_2u_2}, \mathbf{n})$, $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_{u_1} \times \mathbf{r}_{u_2})/|\mathbf{r}_{u_1} \times \mathbf{r}_{u_2}|$ – единичный вектор нормали к S в данной точке. Предположим, далее, что поверхность S описывается функцией $f = f(x,t)$, $x = u_1$, $t = u_2$, так, что $f(x,t)$ представляет собой "высоту" точки (x,t). Тогда $\mathbf{r}(x,t) = (x, t, f(x,t))$, $E = 1 + f_x^2$, $G = 1 + f_t^2$, $F = f_xf_t$, $\mathbf{n} = (1/\sqrt{1 + f_x^2 + f_t^2})(-f_x,\, f_t,\, 1)$ и

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_t^2}}, \quad M = \frac{f_{xt}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_t^2}}, \quad N = \frac{f_{tt}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_t^2}}.$$

Поскольку, средняя кривизна H поверхности в точке (x,t) равна полусумме главных кривизн k_1, k_2, удовлетворяющих уравнению

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0,$$

то отсюда следует, что

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2},$$

Ключевые слова : уравнение минимальной поверхности в $\mathbb{R}^3$, точные решения, формула Коши–Грина, законы сохранения, уравнение Монжа–Ампера.

и условие $H = 0$ приводит к уравнению на функцию $f(x,t)$:

$$(1+f_t^2)f_{xx} - 2f_{xt}f_xf_t + (1+f_x^2)f_{tt} = 0. \tag{1}$$

С другой стороны, для площади поверхности S имеем:

$$\mathcal{A}_S(f) = \iint\limits_{\Omega}\iint \sqrt{EG-F^2}\,dxdt = \int\limits_{\Omega}\int \sqrt{1+f_x^2+f_t^2}\,dxdt. \tag{2}$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа (критическая точка) для этого функционала приводит к уравнению [2]:

$$\operatorname{div}\left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+\sum_{l=1}^{2}(f_{x_l})^2}}\right) = 0, \quad x_1 = x,\ x_2 = t, \tag{1'}$$

которое, очевидно, представляет собой эквивалентную запись (1), а функция $\mathcal{L} = \sqrt{1+f_x^2+f_t^2}$ имеет смысл лагражевой плотности функционала $\mathcal{A}_S$.

Уравнение (1) ((1′)) – двумерное нелинейное уравнение эллиптического типа – имеет долгую и сложную историю [3], включающую физические эксперименты с мыльными пузырями и пленками. Этому уравнению, а также соответствующей задаче Дирихле для замкнутого контура, известной как проблема Плато, посвящена многочисленная литература, а среди результатов, изложенных в ней, важнейшим является теорема С. Н. Бернштейна [4] : образом МП над всей плоскостью является сама. плоскость[1] Дальнейшие подробности, касающиеся (1), можно найти, в частности, в [5–6]. Кроме того, оно имет важные приложения в теоретической и математической физике и смежных дисциплинах (см., например, работу [7], где оно возникает в качестве редукции модели **n**-поля и [8], в которой система связанных нелинейных уравнений Шредингера сводится в стационарном и бездисперсионном пределе к (1)).

Следует подчеркнуть, что интегральные представления Эннепера–Вейерштрасса [9], а также линеаризация (1) как с помощью преобразования Лежандра [10], так и преобразования годографа (как и в случае с гиперболическим аналогом (1) – уравнением Борна–Инфельда),

[1] Тем самым, эта теорема является своего рода “принципом запрета” для новых решений над всей плоскостью.

дают лишь некоторые параметризации решения или их весьма ограниченный набор.[2] Поэтому подход, развиваемый ниже и основанный на различных представлениях уравнения МП и непосредственном его интегрировании, представляется нам наиболее естественным для задачи получения решений этого уравнения и описании их свойств.

Отметим, также, что из геометрических соображений очевидно, что образ МП инвариантен относительно вращения, сдвига и преобразования подобия (этот факт, конечно, подтверждается исследованием классических симметрий (1) [10]).

2. Ряд известных частных решений (1) можно найти единообразно, если искать искомую функцию в виде $f(x,t) = f(\eta(x,t))$, где $\eta(x,t)$ – некоторая функция. Тогда вместо (1) получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на функцию $v = f_\eta$ ($\triangle$ – двумерный оператор Лапласа):

$$v_\eta(\nabla\eta)^2 + v^3\left[\eta_{xx}\eta_t^2 - 2\eta_x\eta_t\eta_{xt} + \eta_{tt}\eta_x^2)\right] + v\triangle\eta = 0, \tag{3}$$

которое заменой переменной $1/v^2 = \varrho$ приводится к линейному уравнению первого порядка:

$$A_1\varrho_\eta - 2A_3\varrho = 2A_2, \tag{4}$$

где $A_1 = (\nabla\eta)^2$, $A_2 = \eta_{xx}\eta_t^2 - 2\eta_x\eta_t\eta_{xt} + \eta_{tt}\eta_x^2$, $A_3 = \triangle\eta$, и предполагается, что $\varrho_\eta \neq 0$, а отношения A_2/A_1, A_3/A_1 являются функциями переменной η. Интегрируя (4), получим общую форму всех таких решений, зависящих от одного функционального параметра ($f(\eta_0) = f_0$, $f_\eta(\eta_0) = \pm 1/|c_1|$, $c_1 \neq 0$, $f_0 \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные):

$$\begin{gathered} f(\eta(x,y)) = f_0 \pm \int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{Q(\eta')\,d\eta'}{\sqrt{c_1^2 + 2\int\limits_{\eta_0}^{\eta'} \frac{A_2(\eta'')}{A_1(\eta'')} Q^2(\eta'')d\eta''}}, \\ Q(\eta) = e^{-\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{A_3(s)}{A_1(s)} ds}. \end{gathered} \tag{5}$$

[2] К сожалению, также не приводит к цели построения широкого класса решений установленная в [11] связь между уравнением (1) и уравнением sin-Гордон $u_{xt} = \sin u$.

Полагая в (5) $\eta(x,t) = at + bx + c$, будем иметь:

$$f(x,t) = f_0 \pm (1/|c_1|)(\eta - \eta_0),$$

т.е. плоскости в $\mathbb{R}^3$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$ – константы). Аналогично, при $\eta(x,t) = x/t$, после интегрирования в (5) находим:

$$f(x,t) = f_0 \pm (1/|c_1|)(\eta_0^2 + 1)(\arctan\eta - \arctan\eta_0),$$

т.е. геликоиды – единственные решения (1), являющиеся гармоническими функциями. Выбирая $\eta(x,t) = x^2 + y^2$, найдем, что $\cosh^2[f(\eta) - f_0] = \eta$ – решение типа катеноида (здесь $\eta \geq 1$, $\eta_0 = 1$, $c_1 = 0$); соответствующая поверхность образуется при вращениии линии $x = \cosh z$ вокруг оси z.

Наконец, при $\varrho_\eta = 0$, $\varrho = 1$, из (4) имеем: $A_2 + A_3 = 0$; взяв $\eta = \eta_1(x) + \eta_2(t)$ и проинтегрировав это уравнение, найдем:

$$f(x,t) = \eta = (1/a)[\ln\cos(at + v_{20}) - \ln\cos(ax + v_{10})]$$

(a, v_{10}, $v_{20} \in \mathbb{R}$ – произвольные константы, $a \neq 0$) – поверхность Шерка; здесь решение определено на объединении прямоугольников

$$|x| < (-v_{10} + \pi/2(1+4k))/a,$$
$$|t| < (-v_{20} + \pi/2(1+4l))/a, \quad k,\, l \in \mathbb{Z},$$

инвариантно относительно сдвигов на вектора $((2\pi/a)m,\, (2\pi/a)n)$, m, $n \in \mathbb{Z}$ и обращается в плюс или минус бесконечность на их границах.

Еще одно решение уравнения МП нетрудно получить методом разделения переменных. Положим $f(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда из (1) имеем:

$$\frac{T_{tt}}{T} + \frac{X_{xx}}{X} + A(t)X_x^2 + B(x)T_t^2 = 0, \tag{6}$$

где $A(t) = TT_{tt} - T_t^2$, $B(x) = XX_{xx} - X_x^2$. В частности, если $X(x) = x$, то из (6) находим, что $T(t) = \tan t$ и $f(x,t) = x\tan t$ (здесь, и в примерах ниже, мы опускаем константы интегрирования, несущественные в силу упомянутотого выше действия групп преобразований). Это решение также соответствует геликоиду (другим способом – исходя из исследования симметрий уравнения МП – оно было получено, в частности, в [12]). Совершенно аналогично находится еще одно решение типа геликоида: $f(x,t) = t\tan x$.

3. Перейдем в (1) к полярным координатам, полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \in (0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$. Поскольку

$$
\begin{aligned}
f_x &= f_\rho\cos\varphi - f_\varphi\frac{\sin\varphi}{\rho}, \quad f_t = f_\rho\sin\varphi + f_\varphi\frac{\cos\varphi}{\rho},\\
f_{xx} &= \cos^2\varphi f_{\rho\rho} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}f_{\rho\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}f_{\varphi\varphi}\\
&\quad + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}f_\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}f_\rho,\\
f_{tt} &= \sin^2\varphi f_{\rho\rho} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}f_{\rho\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}f_{\varphi\varphi}\\
&\quad - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}f_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\rho}f_\rho,\\
f_{xt} &= \sin\varphi\cos\varphi f_{\rho\rho} + \frac{\cos 2\varphi}{\rho}f_{\rho\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}f_{\varphi\varphi}\\
&\quad - \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}f_\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}f_\rho,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

то получающееся уравнение оказывается чрезвычайно громоздким и малопригодным для анализа. Тем не менее, из выражений (7) и их подстановки в (1) также можно извлечь несколько простейших частных решений. Так, если предположить, что $f_\rho = 0$, то уравнение МП сводится к $f_{\varphi\varphi} = 0$, т.е. имеем $f(\rho,\varphi) = \varphi$ – поверхность геликоида. Аналогично, если $f_\varphi = 0$, то (1) сводится к уравнению на функцию $f_1(\rho) = f_\rho$:

$$
f_{1\rho} + \frac{1}{\rho}f_1 + \frac{1}{\rho}f_1^3 = 0, \tag{8}
$$

которое легко интегрируется, и, в результате, имеем: $\cosh f(\rho,\varphi) = \rho$ – поверхность катеноида[3].

Таким образом, получаем еще одно важное свойство этих поверхностей: геликоид и катеноид являются единственными решениями уравнения МП, зависящими только от угловой и радиальной переменной соответственно. Кроме того, как показано, например, в [13] с

[3]Разумеется, эти результаты элементарным образом получаются и из соответствующих ответов в декартовых переменных – мы лишь хотим здесь обратить внимание на целесообразность рассмотрения различных представлений уравнения МП

использованием представлений Эннепера–Вейерштрасса, эти поверхности являются локально изометричными (т.е. на них соответствующие кривые имеют “в малом” одинаковые длины, сохраняются углы между этими кривыми, а также площади соответствующих областей), однако, в топологическом отношении они различны – геликоид представляет собой вложенную плоскость, а катеноид – цилиндр.

4. Другое интегральное представление для решения уравнения (1) можно найти, если перейти к голоморфным переменным. Пусть $z = x+it$, $\overline{z} = x-it$, $\partial_z = (1/2)(\partial_x - i\partial_t)$, $\partial_{\overline{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_t)$, причем будем предполагать, что $f = f(z,\overline{z}) \in C^2(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma})$, где $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – область, в которой заданы переменные z, $\overline{z}$, и $f(z,\overline{z}) = \overline{f}(z,\overline{z})$. После некоторых вычислений получим уравнение (и комплексно сопряженное ему):

$$f_{zz} f_{\overline{z}}^2 - f_{z\overline{z}}(1 + 2 f_z f_{\overline{z}}) + f_{\overline{z}\overline{z}} f_z^2 = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что условия $f_{\overline{z}} = 0$ и $f_z = 0$ совместны с этим уравнением, т.е. его решениями являются произвольные голоморфные и антиголоморфные функции соответственно. В частности, в первом случае это означает, что если $\Gamma = \mathbb{C}$, то в силу теоремы Лиувилля, $f(z,\overline{z}) = \mathrm{const}$.

Полагая $f_{\overline{z}} = w$, $w = w(z,\overline{z})$, будем иметь два комплексно-сопряженных друг другу уравнения, эквивалентных (1):

$$\begin{aligned} w^2 \overline{w}_z - w_z(1 + 2|w|^2) + \overline{w}^2 w_{\overline{z}} = 0, \\ \overline{w}^2 w_{\overline{z}} - \overline{w}_{\overline{z}}(1 + 2|w|^2) + w^2 \overline{w}_z = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Если, теперь, известно какое-либо частное решение уравнений (10) $\widetilde{w} = \widetilde{w}(z,\overline{z})$, то для функции f имеет место представление Коши–Грина [14] ($\overline{\partial} = \partial_{\overline{\xi}}$):

$$\begin{aligned} f(z,\overline{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Gamma} \frac{\widetilde{w}(\xi,\overline{\xi})}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \int \frac{\overline{\partial}\widetilde{w}}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi}, \\ \widetilde{w}_{|\partial\Gamma} &= w_0(z,\overline{z}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\partial\Gamma$ – граница области Γ, предполагаемая ориентированной в положительном направлении и, вообще говоря, кусочно-гладкой, а функция $w_0(z,\overline{z})$ считается заданной, причем $w_0 \in C^1(\partial\Gamma)$.

Кроме того, в силу уже упомянутого выше “принципа запрета” (теоремы Бернштейна), предельный переход в (11) при $|z| \to \infty$, равномерный по всем направлениям в плоскости $\mathbb{C}$, оказывается бессмысленным, т.к. он не даст новых решений, отличных от плоскости, и

следовательно, область Γ должна быть либо конечной, либо являться полуоткрытой (полуплоскость, четверть плоскости и т.д.).

Соотношение (11) может оказаться полезным при дальнейшем исследовании уравнения (1). Оно дает решение проблемы Плато для плоского контура при условии, что предварительно получено решение уравнений (10).

Пусть $w = \rho_0 \exp(i\theta)$, $\rho_0 = \rho_0(z, \overline{z}) = |w|$, $\theta = \theta(z, \overline{z}) = \arg w$. В этих переменных первое уравнение в (10) перепишется как

$$e^{i\theta}\left[-(1+\rho_0^2)\rho_{0z} - i\rho_0\theta_z(1+3\rho_0^2)\right] + \rho_0^2 e^{-i\theta}(\rho_{0\overline{z}} + i\rho_0\theta_{\overline{z}}) = 0. \qquad (12)$$

Предположим, что $\theta_z = 0$, т.е. θ – антиголоморфная функция. Тогда в терминах функции w это уравнение примет вид “закона сохранения”:

$$(\ln w)_{\overline{z}} = \left[\left(\ln|w| - \frac{1}{2|w|^2}\right)e^{2i\arg w}\right]_z. \qquad (13)$$

Аналогично, при $\theta_{\overline{z}} = 0$, т.е. в случае когда θ – голоморфная функция, из второго уравнения (10) находим:

$$(\ln \overline{w})_z = \left[\left(\ln|w| - \frac{1}{2|w|^2}\right)e^{-2i\arg w}\right]_{\overline{z}}. \qquad (14)$$

Представляет интерес и еще одна эквивалентная форма записи (1). Для этого положим $F_0(x,t) = f_x$, $G_0(x,t) = f_t$. Тогда для этих функций будем иметь систему уравнений:

$$(1+G_0^2)F_{0x} - 2F_0G_0F_{0t} + (1+F_0^2)G_{0t} = 0, \quad F_{0t} = G_{0x}, \qquad (15)$$

причем второе из них имеет вид “закона сохранения” (или связи), а лагранжева плотность, порождающая (15), имеет вид

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + F_0^2 + G_0^2}.$$

Система (15) инвариантна относительно замены $F_0 \to -F_0$, $G_0 \to -G_0$.

5. Уравнение (1) обладает лаксовым представлением [15]:

$$\Psi_x = \frac{1}{\lambda^2+1}\left[\lambda(g^{11}I_0 + g^{12}I_1) - I_1\right]\Psi \equiv U\Psi, \qquad (16a)$$

$$\Psi_t = -\frac{1}{\lambda^2+1}\left[\lambda(g^{21}I_0 + g^{22}I_1) + I_0\right]\Psi \equiv V\Psi, \qquad (16b)$$

где

$$g = \begin{pmatrix} u_{tt} & u_{tx} \\ u_{tx} & u_{xx} \end{pmatrix}, \quad \det g = 1, \quad g = g^T, \quad g^2 \neq I, \quad g^{-1} = \{g^{kl}\}, \tag{17}$$

$$u_{xx} = \frac{1 + f_x^2}{\mathcal{L}}, \quad u_{tt} = \frac{1 + f_t^2}{\mathcal{L}}, \quad u_{xt} = \frac{f_x f_t}{\mathcal{L}}, \tag{18}$$

$I_0 = g^{-1} g_t$, $I_1 = g^{-1} g_x$ – правые токи, причем в силу того, что $g = g(x,t)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой матричнозначной функцией, справедливо тождество:

$$I_{1t} - I_{0x} - [I_1, I_0] = 0; \tag{19}$$

$\Psi = \Psi(x,t,\lambda) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\mathcal{L}$ – лагранжева плотность уравнения (1). Условие унимодулярности матрицы g эквивалентно тому, что функция $u = u(x,t)$ ($u(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$) удовлетворяет нелинейному уравнению эллиптического типа из класса Монжа–Ампера[4]

$$u_{tt} u_{xx} - u_{tx}^2 = 1, \tag{20}$$

а совместность системы (16) приводит к нелинейной сигма-модели вида

$$\partial_\alpha (g^{\alpha\beta} g^{-1} \partial_\beta g) = 0, \tag{21}$$

которая, в свою очередь, эквивалентна уравнению (1).

Из (16) следует, что

$$g = \Psi^{-1}(0), \tag{22}$$

что позволяет восстановить как решение уравнения МП, так и решение уравнения Монжа–Ампера. Так, если $f_x = M_0(x,t)$, $f_t = N_0(x,t)$, где функции M_0 и N_0 должны быть вычислены в результате решения обратной задачи и, таким образом, являться функционалами от матричных элементов матрицы $\Psi(0)$, причем так, что $M_{0t} = N_{0x}$, то

[4]Еще одно любопытное представление этого уравнения приведено в [16]:

$$D_x^2(-\frac{1}{2} f_t^2) + D_x D_t (f_x f_t) + D_t^2(-\frac{1}{2} f_x^2) = 1,$$

где D_x, D_t – операторы полных производных.

решение (1) будет иметь форму криволинейного интеграла, не зависящего от пути интегрирования ($f_0 = f(x_0,\, t_0)$):

$$f(x,t) = f_0 + \int\limits_{(x_0,\, t_0)}^{(x,t)} M_0\, dx + N_0 dt. \tag{23}$$

И аналогично, решение уравнения (20) проще всего выразить через матричный элемент $\Psi_{21}(x,t,0)$:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{t} \Psi_{21}(x',t',0)\; dx'dt'. \tag{24}$$

Лаксова пара (16) позволяет, кроме того, построить отвечающую уравнению МП (и одновременно уравнению Монжа–Ампера) бесконечную серию локальных "законов сохранения" (отметим, что в [10] с помощью нетеровых симметрий были получены пять подобных законов, а в [15] – серия в матричной форме, содержащая нелокальные операторы; ниже мы найдем эти законы в явной форме в терминах исходной переменной).

С этой целью положим $U = \{U_{ij}\}$, $V = \{V_{ij}\}$ и заметим, что имеют место соотношения: $U_{22} = -U_{11} = -V_{12}$, $V_{22} = -V_{11} = U_{21}$, где ($v = u_{xx}$, $w = u_{tt}$, $p = u_{tx}$, $p_x = v_t$, $p_t = w_x$ и $vw - p^2 = 1$)

$$\begin{gathered} U_{11} = \frac{-\lambda p_x + (\frac{v}{p})_t p^2}{\lambda^2+1}, \quad U_{21} = \frac{\lambda p_t + (\frac{w}{p})_x p^2}{\lambda^2+1}, \\ U_{12} = \frac{-\lambda v_x + (\frac{v}{p})_x p^2}{\lambda^2+1}, \quad V_{21} = \frac{\lambda w_t + (\frac{w}{p})_t p^2}{\lambda^2+1}, \end{gathered} \tag{25}$$

так, что

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & -U_{11} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -U_{21} & U_{11} \\ V_{21} & U_{21} \end{pmatrix}.$$

Введем функции $\widehat{G} = \widehat{G}(x,t,\lambda) = (\ln \Psi_{11})_x$, $\widehat{F} = \widehat{F}(x,t,\lambda) = -(\ln \Psi_{11})_t$, где $\Psi = \{\Psi_{ij}\}$, $i = 1,2$, и будем искать искомые законы сохранения в виде $\widehat{G}_t + \widehat{F}_x = 0$. Поскольку с учетом (16a) $\widehat{F} = U_{21} - U_{11}\Psi_{21}/\Psi_{11} = U_{21} - U_{11}(\widehat{G} - U_{11})/U_{12}$, то мы получим:

$$\widehat{G}_t + \left(U_{21} - U_{11}\frac{\widehat{G} - U_{11}}{U_{12}} \right)_x = 0. \tag{26}$$

Найдем теперь эволюцию величины $\widehat{G}$ по x. Так как

$$\widehat{G}_x = U_{11x} + U_{12x}\frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}} + U_{12}\left(\frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}}\right)_x, \tag{27}$$

то после простых преобразований найдем, что $\widehat{G}$ удовлетворяет уравнению Риккати вида:

$$\widehat{G}_x = \left[U_{11x} - U_{11}\frac{U_{12x}}{U_{12}} + U_{21}U_{12} + U_{11}^2\right] + \left(\frac{U_{12x}}{U_{12}}\right)\widehat{G} - \widehat{G}^2. \tag{28}$$

Разложим $\widehat{G}$ в асимптотический ряд при $\lambda = \overline{\lambda}$, $\lambda \to \infty$

$$\widehat{G}(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{G}_n(x,t)}{\lambda^n}, \tag{29}$$

а также, аналогично, элементы U_{11}, U_{12}, U_{21}, так, что

$$\begin{aligned} &U_{11} = \frac{1}{\lambda^2}\Lambda(\lambda)(\widehat{B} - \lambda\widehat{A}), \quad U_{12} = \frac{1}{\lambda^2}\Lambda(\lambda)(\widehat{P} - \lambda\widehat{C}),\\ &U_{21} = \frac{1}{\lambda^2}\Lambda(\lambda)(\widehat{R} + \lambda\widehat{Q}),\\ &\frac{U_{12x}}{U_{12}} = \frac{1}{\lambda\widehat{C}}(\lambda\widehat{C}_x - \widehat{P}_x)\left(1 + \frac{\widehat{P}}{\lambda\widehat{C}} + \frac{\widehat{P}^2}{(\lambda\widehat{C})^2} + \frac{\widehat{P}^3}{(\lambda\widehat{C})^3} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\Lambda(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} + \cdots, \quad \lambda \to \infty,$$

$$\begin{aligned} &\widehat{A} = p_x, && \widehat{B} = \left(\frac{v}{p}\right)_t p^2, && \widehat{C} = v_x,\\ &\widehat{P} = \left(\frac{v}{p}\right)_x p^2, && \widehat{R} = \left(\frac{w}{p}\right)_x p^2, && \widehat{Q} = p_t, \end{aligned}$$

и подставим (29) и (30) в (26). Приравнивая члены при λ^{-1}, получим:

$$\widehat{G}_{1x} = -\widehat{A}_x + (\widehat{C}_x/\widehat{C})\widehat{G}_1 + (\widehat{A}\widehat{C}_x)/\widehat{C}.$$

Откуда следует, что $\widehat{G}_1 = -\widehat{A} = -p_x$. Обратившись к (26), находим: $p_{xt} = p_{tx}$, или $v_t = p_x$, и, таким образом,

$$\left(\frac{1+f_x^2}{\mathcal{L}}\right)_t = \left(\frac{f_x f_t}{\mathcal{L}}\right)_x, \tag{31}$$

что эквивалентно (1). При этом в терминах уравнения Монжа–Ампера, умножая условие $(u_{tx})_t = (u_{tt})_x$ на u_x и прибавляя к обеим частям этого равенства (20), нетрудно получить его "закон сохранения":

$$(u_x u_{xt} - t)_t = (u_x u_{tt})_x, \tag{32}$$

который совпадает с единственным, приведенным для этого уравнения, в [10].

Приведем еще закон, возникающий в следующем порядке ($\sim \lambda^{-2}$). Из уравнения (28) после некоторых упрощений находим:

$$\widehat{G}_{2x} = \widehat{B}_x - \frac{\widehat{B}\widehat{C}_x + \widehat{A}\widehat{P}_x}{\widehat{C}} - \widehat{C}\widehat{Q} - \frac{\widehat{P}_x\widehat{G}_1}{\widehat{C}} + \frac{\widehat{G}_2\widehat{C}_x}{\widehat{C}},$$

откуда после интегрирования получаем:

$$\widehat{G}_2 = v_t p - v p_t - v_x w. \tag{33}$$

Подставляя это выражение в (26), будем иметь:

$$(v_t p - v p_t - v_x w)_t + (w_x p)_x = 0, \tag{34}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1+f_x^2}{\mathcal{L}}\right)_t \frac{f_x f_t}{\mathcal{L}} - \left(\frac{1+f_x^2}{\mathcal{L}}\right)\left(\frac{f_x f_t}{\mathcal{L}}\right)_t - \left(\frac{1+f_x^2}{\mathcal{L}}\right)_x \frac{1+f_t^2}{\mathcal{L}}\right]_t \\ + \left[\left(\frac{1+f_t^2}{\mathcal{L}}\right)_x \frac{f_x f_t}{\mathcal{L}}\right]_x = 0.\end{aligned} \tag{35}$$

В терминах уравнения Монжа–Ампера равенство (34) дает:

$$(u_{xxt}u_{tx} - u_{xx}u_{ttx} - u_{xxx}u_{tt})_t + (u_{ttx}u_{tx})_x = 0, \tag{36}$$

что, как нетрудно видеть, оказывается (с учетом (20)) тривиальным тождеством. Таким образом, несмотря на наличие лаксовой пары это

уравнение имеет, по-видимому, единственный нетривиальный “закон сохранения”.

Ясно, что все функции $\widehat{G}_n$ при всех $n \geqslant 2$ будут удовлетворять линейному дифференциальному уравнению первого порядка, содержащему в качестве неоднородной части функции $\widehat{G}_{n-1}, \dots, \widehat{G}_1$, что и позволяет написать бесконечную серию этих равенств.

Заметим, также, что процедура их вывода проводится без учета граничных условий для уравнения (1). В то же время, если эти условия известны, то, как показано в [18] с применением полной схемы метода обратной задачи рассеяния для оператора ассоциированной линейной системы (16a), величина $\ln a(\lambda)$, где $a(\lambda)$ – данное рассеяния (элемент матрицы перехода), является производящим функционалом “интегралов движения”; для их вывода имеется своя, отличная от вышеприведенной, но также использующая уравнение Риккати, техника.

Соотношения (18) представляют собой преобразование Бьянки, связывающее решения уравнений (1) и (20). Например, из них следует, что функция u удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$u_{xx} + u_{tt} = \mathcal{L} + \frac{1}{\mathcal{L}}, \tag{37}$$

которое, таким образом, должно быть совместным с третьим равенством в (18). И наоборот, если известно решение (20), то используя (37) можно найти соответствующую ему лагражеву плотность $\mathcal{L}$ для уравнения МП.

Перепишем первые две связи (18) в виде:

$$\begin{aligned} u_{xx}^2(1 + f_x^2 + f_t^2) &= f_x^4 + 2f_x^2 + 1, \\ u_{tt}^2(1 + f_x^2 + f_t^2) &= f_t^4 + 2f_t^2 + 1, \end{aligned} \tag{38}$$

и рассмотрим несколько примеров их применения.

(a) Возьмем формальное простейшее решение (20), не ограниченное при $\sqrt{x^2 + t^2} \to \infty$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(x^2 + t^2) + c_1(x + t) + c_2, \tag{39}$$

где c_1, c_2 – произвольные константы. Условия (38) тогда приводят к требованию $f_x = f_t = 0$, т.е. решению $f(x,t)$ соответствует плоскость в $\mathbb{R}^3$.

(b) Решению вида геликоида $f(x,t) = \arctan(x/t)$ соотвествует "деформированное" уравнение Лапласа:

$$u_{xx} + c_{L1}(x,t)u_{tt} = 0, \quad c_{L1}(x,t) = \frac{t^2 + (x^2+t^2)^2}{x^2 + (x^2+t^2)^2}. \tag{40}$$

(c) Пусть геликоид задается как $f(x,t) = x\tan t$. Из (38) тогда получаем "деформированное" уравнение Лапласа вида:

$$u_{xx} + c_{L2}(x,t)u_{tt} = 0, \quad c_{L2}(x,t) = \frac{\cos^2 t}{x^2 + \cos^4 t}. \tag{41}$$

(d) Возьмем решение в виде катеноида $\cosh^2 f = x^2 + t^2$. С учетом (38) имеем снова "деформированное" уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + c_{L3}(x,t)u_{tt} = 0, \\ &c_{L3}(x,t) = \frac{x^2 + (x^2+t^2)[(x^2+t^2)^2 - 1]}{t^2 + (x^2+t^2)[(x^2+t^2)^2 - 1]}. \end{aligned} \tag{42}$$

(e) Пусть $f(x,t)$ описывает поверхность Шерка:

$$f(x,t) = (1/a)[\ln\cos at - \ln\cos ax].$$

В этом случае, полагая $u(x,t) = u_1(x)u_2(t)$, из (38) будем иметь одномерные уравнения Шредингера на функции u_1, u_2 с периодическими (с периодами $T_0 = 2\pi/a$) и сингулярными (с противоположными знаками) потенциалами:

$$u_{1xx} - \frac{\nu}{\cos^2 ax}u_1 = 0, \quad u_{2tt} + \frac{\nu}{\cos^2 at}u_2 = 0, \tag{43}$$

где $\nu = \mathrm{const}$ – параметр разделения переменных.

Эти уравнения вовсе не содержат параметра энергии и при этом очевидно, что достаточно найти решение только, например, первого из них, тогда решение второго получится заменой в нем $x \to t$, $\nu \to -\nu$.

6. В заключение, отметим, что в данной работе затронуты те аспекты и представления уравнения МП, которые, так или иначе, связаны с исследованием его интегрируемости и возможностью построения точных решений. В то же время, мы не касались здесь важного

вопроса – конкретной постановки граничной задачи. Для нелинейных вполне интегрируемых уравнений эллиптического типа такие задачи были поставлены и решены как для всей плоскости [17], так и для полуплоскости [18], а в недавней работе [19] – и для четверти плоскости. Однако, в случае уравнения МП, в силу обсуждавшегося выше принципа запрета, соответствующая граничная задача, как, впрочем, и какая-либо процедура одевания известного решения, оказывается более сложной и требует отдельного рассмотрения. Интересным, также, представляется вопрос о динамике частиц на минимальных поверхностях, в частности, в $\mathbb{R}^3$, т.е. когда уравнение (1) можно интерпретировать как связь. Все эти проблемы мы надеемся обсудить позднее.

Автор признателен П. П. Кулишу за поддержку.

Литература

1. А. В. Погорелов, *Дифференциальная геометрия.* Наука, М., 1969.
2. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия.* Наука, М., 1986.
3. Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, *Минимальные поверхности и проблема Плато.* Наука, М., 1991.
4. С. Н. Бернштейн, *Собр. соч.*. Т. 3. Изд-во АН СССР, М., 1960.
5. П. Оссерман, — УМН **22** (1967), 55.
6. Сб. “Минимальные поверхности”. Физматлит, М., 2003.
7. А. Б. Борисов, — ДАН **389** (2003), 1.
8. A. Moro, `physics.optics/ 1253.v3` (2009).
9. В. Бляшке, *Введение в дифференциальную геометрию.* — Регулярная и хаотическая динамика., М.-Ижевск (2007).
10. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* Физматлит, М., 2005.
11. E. V. Ferapontov, Y. Nutku, `solv.int/ 94090004v1` (1994).
12. А. В. Киселев, *Фундаментальная и прикладная математика.* **12**, No. 7, Издательский дом “Открытые системы”, М., 2006.
13. И. А. Тайманов, *Лекции по дифференциальной геометрии.* Институт компьютерных исследований, М.- Ижевск, 2002.
14. M. Ablowitz, P. A. Clarcson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering.* Cambridge University Press, NY, 1991.
15. M. Gürses, `solv.-int/ 19712018v1` (1997).
    J. C. Brunelli, M. Gürses, K. Jeltukhin, `hepth.th/ 9906233v1` (1999).
16. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Мир, М., 1989.
17. A. B. Borisov, V. V. Kisielev, *Inverse Problems.* **5** (1989), 959.
18. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **180** (1990), 53.
19. B. Pelloni, *Частное сообщение.* Gallipoli, June (2008).

Gutshabash E. Sh. On equation of minimal surface in $\mathbb{R}^3$: different representations, properties of exact solutions, conservation laws.

Various representations of the equation of minimal surface in $\mathbb{R}^3$ are considered. Properties of exact solutions are studied and a procedure to construct the corresponding conservation laws is suggested. Links between the solutions of this equation and those of the elliptic version of the Monge–Ampere equation are found.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

Поступило 12 апреля 2010 г.