Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

Г. М. Головачев, А. О. Смирнов

О СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Введение

В последнее время большое внимание к себе привлекают различные функционально-разностные деформации известных интегрируемых моделей [1–4]. Соответственно, встает вопрос о нахождении спектра и собственных функций этих моделей. В настоящей работе обсуждается одна важная особенность спектральной кривой, соответствующей одной из функционально-разностных деформаций уравнения Шредингера [4]

$$v(x)f(x+h,t)+f(x-h,t)=\lambda f(x,t), \tag{1}$$

где h – неотрицательный параметр.

Если мы введем обозначения

$$f(x,t)=\psi_n, \quad f(x\pm h,t)=\psi_{n\pm 1}, \quad v(x)=v_n,$$

то сведем это уравнение к разностному

$$v_n\psi_{n+1}+\psi_{n-1}=\lambda\psi_n. \tag{2}$$

Нетрудно понять, что обратный переход обладает намного большим произволом. В данной работе рассматривается альтернативный вариант разностного уравнения Шредингера (11), который легко сводится к (2), и предлагается метод построения некоторого класса конечнозонных решений этого уравнения. Естественно, этот класс является подмножеством описанного в [5] множества всех конечнозонных решений дискретного уравнения Шредингера (11).

Уже на простых примерах конечнозонных уравнений вида (1) мы можем наблюдать наличие зависимости краев зон соответствующей спектральной кривой от x, что отличает функционально-разностное уравнение Шредингера от дифференциального.

Ключевые слова : конечнозонное решение, разностное уравнение, функционально-разностное уравнение, спектральная кривая.

1. Произведение и определитель Казорати двух решений уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное однородное разностное уравнение второго порядка

$$x_{n+2} + u_n x_{n+1} + v_n x_n = 0. \tag{3}$$

Пусть x'_n, x''_n — его решения. Тогда произведение этих решений $z_n = x'_n x''_n$ будет решением уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} z_{n+3} - \frac{(u_{n+1}u_n - v_{n+1})u_{n+1}}{u_n} z_{n+2} \\ + v_{n+1}(u_{n+1}u_n - v_{n+1}) z_{n+1} - \frac{v_n^2 u_{n+1} v_{n+1}}{u_n} z_n = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим определитель Казорати решений x'_n, x''_n

$$W_n = \begin{vmatrix} x'_n & x''_n \\ x'_{n+1} & x''_{n+1} \end{vmatrix} = x'_n x''_{n+1} - x''_n x'_{n+1}.$$

Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет разностному уравнению первого порядка

$$W_{n+1} = v_n W_n. \tag{5}$$

Деля определитель Казорати двух решений x'_n, x''_n на их произведение и упрощая, получаем

$$\frac{W_n}{z_n} = \frac{x'_n x''_{n+1} - x''_n x'_{n+1}}{x'_n x''_n} = \frac{x''_{n+1}}{x''_n} - \frac{x'_{n+1}}{x'_n} = g_n - f_n,$$

где

$$x'_{n+1} = f_n x'_n, \quad x''_{n+1} = g_n x''_n. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что в этих обозначениях выполняется равенство

$$z_{n+1} = f_n g_n z_n,$$

т.е. функции f_n и g_n удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} g_n - f_n = \dfrac{W_n}{z_n}, \\ g_n f_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}, \end{cases}$$

решая которую, имеем

$$f_n = \frac{S_n - W_n}{2z_n}, \quad g_n = \frac{S_n + W_n}{2z_n}, \quad S_n = \pm\sqrt{W_n^2 + 4z_n z_{n+1}}. \tag{7}$$

При этом выполняются равенства

$$u_n = \frac{S_{n+1} + v_n S_n}{2z_{n+1}}, \tag{8}$$

$$S_n^2 - W_n^2 = 4z_n z_{n+1}. \tag{9}$$

Поскольку из уравнений (6) следует, что

$$x_n = A\prod_{k=0}^{n-1} f_k + B\prod_{k=0}^{n-1} g_k, \tag{10}$$

то знание произведения двух решений уравнения (3) и их определителя Казорати позволяет нам решить это уравнение.

2. Дискретное уравнение Шредингера

Одной из дискретизаций уравнения Шредингера является уравнение

$$c_{n+1}x_{n+2} + c_n x_n = \lambda x_{n+1}. \tag{11}$$

В этом случае $v_n = \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$, $u_n = -\dfrac{\lambda}{c_{n+1}}$, $c_n W_n = c_0 W_0 = C$,

$$c_{n+1}S_{n+1} + c_n S_n = -2\lambda z_{n+1}, \tag{12}$$

а уравнение (4) принимает вид

$$c_{n+2}^2 z_{n+3} + (c_{n+1}^2 - \lambda^2)z_{n+2} - (c_{n+1}^2 - \lambda^2)z_{n+1} - c_n^2 z_n = 0.$$

Вводя обозначение $\alpha_n = c_n^2$, последнее уравнение можно записать иначе:

$$z_{n+3}\alpha_{n+2} + (z_{n+2} - z_{n+1})\alpha_{n+1} - z_n\alpha_n = \lambda^2(z_{n+2} - z_{n+1}). \tag{13}$$

Из уравнения (9) следует, что

$$(c_n S_n)^2 = (c_n W_n)^2 + 4\alpha_n z_n z_{n+1} = C^2 + 4\alpha_n z_n z_{n+1} \tag{14}$$

и что

$$(c_{n+1}S_{n+1})^2 - (c_nS_n)^2 = 4\alpha_{n+1}z_{n+1}z_{n+2} - 4\alpha_n z_n z_{n+1}.$$

То есть

$$(c_{n+1}S_{n+1} + c_nS_n)\,(c_{n+1}S_{n+1} - c_nS_n) = 4z_{n+1}(z_{n+2}\alpha_{n+1} - z_n\alpha_n)$$

или, с учетом равенства (12),

$$c_{n+1}S_{n+1} - c_nS_n = -\frac{2}{\lambda}(z_{n+2}\alpha_{n+1} - z_n\alpha_n). \tag{15}$$

Комбинируя (12) и (15), получаем два уравнения

$$c_nS_n = \frac{1}{\lambda}(\alpha_{n+1}z_{n+2} - \alpha_n z_n) - \lambda z_{n+1}, \tag{16a}$$

$$c_{n+1}S_{n+1} = -\frac{1}{\lambda}(\alpha_{n+1}z_{n+2} - \alpha_n z_n) - \lambda z_{n+1}, \tag{16b}$$

совместность которых вновь приводит нас к уравнению (13).

Подставляя выражение для c_nS_n в равенство (14) находим C^2:

$$\begin{aligned} C^2 &= (c_nS_n)^2 - 4\alpha_n z_n z_{n+1} \\ &= \frac{1}{\lambda^2}(\alpha_{n+1}z_{n+2} - \alpha_n z_n)^2 - 2(\alpha_{n+1}z_{n+2}z_{n+1} + \alpha_n z_{n+1}z_n) + \lambda^2 z_{n+1}^2. \end{aligned} \tag{17}$$

С учетом того, что α_n не зависят от λ, будем искать произведение решений z_n в виде разложения по степеням λ^{-2}:

$$z_n = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{n,j}\lambda^{-2j}, \tag{18}$$

где $\zeta_{n,j}$ не зависят от λ.

Подставляя (18) в (13) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \zeta_{n+2,0} &= \zeta_{n+1,0}, \\ \zeta_{n+2,1} - \zeta_{n+1,1} &= \zeta_{n+3,0}\alpha_{n+2} - \zeta_{n,0}\alpha_n, \\ \zeta_{n+2,j} - \zeta_{n+1,j} &= \zeta_{n+3,j-1}\alpha_{n+2} + (\zeta_{n+2,j-1} - \zeta_{n+1,j-1})\alpha_{n+1} \\ &\quad - \zeta_{n,j-1}\alpha_n, \quad j > 1. \end{aligned}$$

Из первого из этих соотношений следует, что $\zeta_{n,0} = \mathrm{const}$ и что, не теряя общности, можно положить $\zeta_{n,0} = 1$:

$$z_n = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{n,j} \lambda^{-2j}. \tag{18'}$$

В этом случае второе соотношение становится линейным разностным уравнением первого порядка:

$$\zeta_{n+2,1} - \zeta_{n+1,1} = \alpha_{n+2} - \alpha_n,$$

решая которое, получаем, что (C_1 – некоторая постоянная)

$$\zeta_{n,1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} - 2C_1. \tag{19}$$

Для упрощения последнего соотношения введем обозначение

$$\gamma_{n+1,j} = \zeta_{n+2,j-1}\alpha_{n+1} - \zeta_{n,j-1}\alpha_n, \quad j > 1.$$

В этих обозначениях оно принимает вид

$$\zeta_{n+2,j} - \zeta_{n+1,j} = \gamma_{n+2,j} + \gamma_{n+1,j}, \quad j > 1$$

и имеет решение

$$\zeta_{n,j} = \gamma_{n,j} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{k,j} + \mathrm{const}\,.$$

Нетрудно понять, что $\gamma_{n,j}$ и $\zeta_{n,j}$ являются некоторыми многочленами от α_k степени j. В частности, при $j = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1,2} &= (\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} - 2C_1)\alpha_{n+1} - (\alpha_n + \alpha_{n-1} - 2C_1)\alpha_n \\ &= \alpha_{n+2}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2 - \alpha_n\alpha_{n-1} - 2C_1(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\zeta_{n+2,2} - \zeta_{n+1,2} = {} & (\alpha_{n+3} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} - 2C_1)\alpha_{n+2} \\ & - (\alpha_{n+1} + \alpha_n + \alpha_{n-1} - 2C_1)\alpha_n.\end{aligned}$$

С помощью обозначения $\beta_n = (\alpha_{n+1} + \alpha_n + \alpha_{n-1} - 2C_1)\alpha_n$ сводим последнее уравнение к

$$\zeta_{n+2,2} - \zeta_{n+1,2} = \beta_{n+2} - \beta_n,$$

решая которое, имеем

$$\zeta_{n,2} = \beta_n + \beta_{n-1} - 2C_2 \tag{20}$$

или

$$\zeta_{n,2} = (\alpha_{n+1}\alpha_n + \alpha_n^2 + 2\alpha_n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}) \\ - 2C_1(\alpha_n + \alpha_{n-1}) - 2C_2.$$

Предположим теперь, что для некоторого набора α_n существует m такое, что выполняется условие $\zeta_{n,m} \equiv 0$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$\gamma_{n,m+1} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \zeta_{n,m+1} = \text{const}\,.$$

Следовательно, в этом случае существуют решения дискретного уравнения Шредингера (const = 0), для которых ряд (18′) обрывается и произведение решений имеет вид

$$z_n = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \zeta_{n,k}\lambda^{-2k}. \tag{21}$$

При этом (см. равенство (17)) будут выполняться соотношения

$$C = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^{2m-1}}, \quad f_n = \frac{c_n S_n \lambda^{2m-1} - \nu(\lambda)}{2\lambda^{2m-1} c_n z_n}, \\ g_n = \frac{c_n S_n \lambda^{2m-1} + \nu(\lambda)}{2\lambda^{2m-1} c_n z_n}, \tag{22}$$

где

$$\nu^2(\lambda) = \prod_{k=1}^{2m} (\lambda^2 - \lambda_k^2), \tag{23}$$

указывающие на то, что дискретное уравнение Шредингера является конечнозонным, а спектральный параметр соответствующего решения находится на гиперэллиптической кривой рода $2m - 1$. В случае совпадения краев зон род спектральной кривой и степень λ в знаменателе могут понизиться.

3. Однозонное функционально-разностное уравнение Шредингера

Пусть $m = 1$, т.е. $z_n \equiv 1$. Тогда из уравнения (19) при $\zeta_{n,1} = 0$ следует, что

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n, \quad c_{n+2} = \pm c_n.$$

Выберем c_n в виде $c_n = F\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right)$, где $F(x)$ – произвольная вещественная функция, квадрат которой имеет период, равный T.

В этих обозначениях уравнение (11) принимает вид

$$F\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{2}\right)\phi_{n+2} + F\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right)\phi_n = \lambda\phi_{n+1}. \tag{24}$$

Подставляя c_n, α_n и z_n в уравнения (16a) и (17), получаем

$$S_n = \frac{F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{2}\right) - F^2\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right) - \lambda^2}{\lambda F\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right)},$$

$$W_n = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda F\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right)},$$

где

$$\begin{aligned} \nu^2(\lambda) &= \prod_{j=1}^{4}(\lambda - \lambda_j), \\ \lambda_1 &= F(\theta_0) + F(\theta_0 + T/2), \\ \lambda_2 &= F(\theta_0) - F(\theta_0 + T/2), \\ \lambda_3 &= -F(\theta_0) + F(\theta_0 + T/2), \\ \lambda_4 &= -F(\theta_0) - F(\theta_0 + T/2). \end{aligned} \tag{25}$$

Соответственно, общее решение однозонного уравнения (24) имеет

вид

$$\phi_n = A\prod_{k=0}^{n-1}\frac{F^2\left(\theta_0+(n+1)\dfrac{T}{2}\right)-F^2\left(\theta_0+n\dfrac{T}{2}\right)-\lambda^2-\nu(\lambda)}{2\lambda F\left(\theta_0+n\dfrac{T}{2}\right)}$$
$$+B\prod_{k=0}^{n-1}\frac{F^2\left(\theta_0+(n+1)\dfrac{T}{2}\right)-F^2\left(\theta_0+n\dfrac{T}{2}\right)-\lambda^2+\nu(\lambda)}{2\lambda F\left(\theta_0+n\dfrac{T}{2}\right)},$$

где A и B – произвольные постоянные.

Предположим теперь, что функция $F^2(x)$ является непрерывной на периоде. Тогда она достигает на периоде своего наибольшего ($F^2(x_1) = M$) и наименьшего ($F^2(x_2) = m$) значений. Для непостоянной функции $F^2(x)$ выполняется условие $M > m$. Поскольку $F^2(x_1)-F^2(x_1+T/2) = M-F^2(x_1+T/2) > 0$, а $F^2(x_2)-F^2(x_2+T/2) = m - F^2(x_2+T/2) < 0$, то на периоде существуют точки, в которых выполняется равенство

$$F^2(x) = F^2(x+T/2) \tag{26}$$

и, таким образом, существуют значения θ_0, при которых кривая (25) вырождается. Нетрудно видеть, что равенство (26) выполняется, по крайней мере, в двух точках на периоде: некоторой точке x_0 и парной точке $x_0 + T/2$. На рис. 1 и 2 приведены примеры зависимости положения краев зон кривой (25) для периодической и антипериодической функций $F(x)$, соответственно.

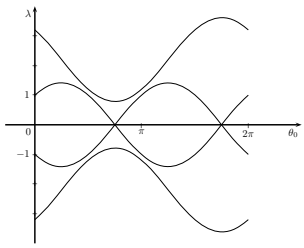

Рис. 1. Зависимость положения краев зон λ_j кривой (15) от $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ для $F(x) = 1.1 + \cos x$.

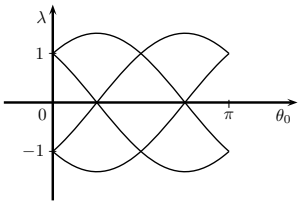

Рис. 2. Зависимость положения краев зон λ_j кривой (25) от $\theta_0 \in [0;\pi]$ для $F(x) = \cos x$.

Для перехода от разностного уравнения к функционально-разностному сделаем в уравнении (24) следующие замены:

$$x = nh + \delta, \quad n = \frac{x-\delta}{h}, \quad \theta_1 = \theta_0 + \frac{(h-\delta)T}{2h},$$

$$\phi_n = r(x)Y(x-h), \quad \phi_{n+1} = r(x+h)Y(x), \quad \phi_{n+2} = r(x+2h)Y(x+h),$$

где $0 \leqslant \delta < h$,

$$\frac{r(x+h)}{r(x)} = F\left(\theta_1 + \frac{(x-h)T}{2h}\right).$$

Нетрудно видеть, что в результате соответствующего преобразования получается уравнение

$$F^2\left(\theta_1 + \frac{xT}{2h}\right)Y(x+h) + Y(x-h) = \lambda Y(x). \tag{27}$$

Соответственно, однозонное решение функционально-разностной деформации уравнения Шредингера (27) может быть найдено из решения уравнения (24) обратными заменами ($\lfloor x \rfloor$ – целая часть x, $x \geqslant 0$):

$$n = \lfloor x/h \rfloor, \quad \delta = x - nh, \quad \theta_0 = \theta_1 - \frac{(h-\delta)T}{2h}.$$

При этом линейно независимые решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ уравнения (27) будут удовлетворять функционально-разностным уравнениям первого порядка

$$\frac{Y_1(x+h)}{Y_1(x)} = \frac{F^2\left(\theta_0 + n\frac{T}{2}\right) - F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{2}\right) - \lambda^2 - \nu(\lambda)}{2\lambda F^2\left(\theta_0 + (n+1)\dfrac{T}{2}\right)}, \tag{28a}$$

$$\frac{Y_2(x+h)}{Y_2(x)} = \frac{F^2\left(\theta_0 + n\dfrac{T}{2}\right) - F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{2}\right) - \lambda^2 + \nu(\lambda)}{2\lambda F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{2}\right)}, \quad (28b)$$

где $\nu(\lambda)$ задается равенствами (25).

Следовательно, для построения общего решения уравнения (27) при $x \geqslant h$ необходимо задать на интервале $\delta \in [0; h)$ две начальных функции $Y_1^0(\delta)$ и $Y_2^0(\delta)$ и воспользоваться формулой

$$Y(x) = Y_1^0(\delta) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F^2\left(\theta_0 + k\dfrac{T}{2}\right) - F^2\left(\theta_0 + (k+1)\dfrac{T}{2}\right) - \lambda^2 - \nu(\lambda)}{2\lambda F^2\left(\theta_0 + (n+1)\dfrac{T}{2}\right)}$$
$$+ Y_2^0(\delta) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{F^2\left(\theta_0 + k\dfrac{T}{2}\right) - F^2\left(\theta_0 + (n+1)\dfrac{T}{2}\right) - \lambda^2 + \nu(\lambda)}{2\lambda F^2\left(\theta_0 + (k+1)\dfrac{T}{2}\right)}.$$

Уже на таком простом примере мы видим важное отличие функционально-разностного конечнозонного уравнения от разностного: спектральная кривая (25) зависит не только от параметров потенциала (F, θ_1), но и от x (через $\theta_0(\delta)$). Причем для некоторых значений x однозонная кривая вырождается в нульзонную. Таким образом, и для других конечнозонных реализаций функционально-разностного уравнения (1) следует ожидать зависимость положения краев зон соответствующей спектральной кривой от переменной x, что до сих пор не учитывалось при поиске спектральной кривых функционально-разностных аналогов уравнений Ламе и Дарбу–Трейбича–Вердье.

4. Двухзонное уравнение

Пусть $m = 2$, т.е. $z_n = 1 + \zeta_{n,1}\lambda^{-2}$. Не рассматривая все возможные варианты, остановимся на случае

$$\alpha_{n+3} = \alpha_n, \quad \alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} = 2C_1, \quad \beta_n = 0, \quad 2C_2 = 0.$$

Из уравнения (19) следует, что $\zeta_{n,1} = -\alpha_{n+1}$.

Выбирая c_n в виде $c_n = F\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right)$, мы получаем следующие соотношения:

$$z_n = 1 - F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{3}\right)\lambda^{-2},$$

$$S_n = \frac{F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{3}\right) + F^2\left(\theta_0 + (n+2)\frac{T}{3}\right) - F^2\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right) - \lambda^2}{\lambda F\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right)},$$

$$W_n = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^2 F\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right)}.$$

Спектральная кривая соответствующего разностного уравнения Шредингера задается равенствами

$$\nu^2(\lambda) = (\lambda^3 - A\lambda + B)(\lambda^3 - A\lambda - B), \tag{29}$$

$$A = F^2\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right) + F^2\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{3}\right) + F^2\left(\theta_0 + (n+2)\frac{T}{3}\right),$$

$$B = 2F\left(\theta_0 + (n+2)\frac{T}{3}\right)F\left(\theta_0 + n\frac{T}{3}\right)F\left(\theta_0 + (n+1)\frac{T}{3}\right).$$

Дискриминанты обоих кубических многочленов в разложении (29) равны

$$D = 4A^3 - 27B^2$$

и всегда неотрицательны ($D \geqslant 0$), поскольку среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. То есть спектральная кривая (29) имеет шесть действительных корней, которые могут совпадать при обращении в ноль дискриминантов D или при обращении в ноль любой из функций $F\left(\theta_0 + k\frac{T}{3}\right)$.

В общем случае края зон спектральной кривой (29) описываются следующими равенствами:

$$\lambda_j = 2\sqrt{\frac{A}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-B}{2\sqrt{A^3/27}}\right) + \frac{\pi j}{3}\right), \quad j = 1, \dots, 6.$$

Примеры зависимости положения краев зон кривой (29) от параметра θ_0 изображены на рис. 3 и 4.

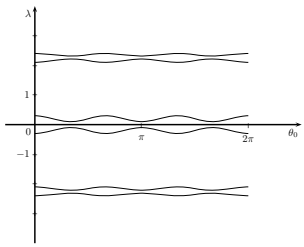

Рис. 3. Зависимость положения краев зон λ_j кривой (29) от $\theta_0 \in [0; 2\pi]$ для $F(x) = 1.1 + \cos x$.

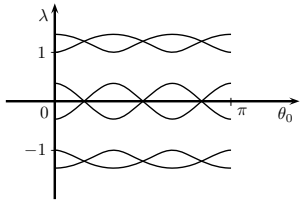

Рис. 4. Зависимость положения краев зон λ_j кривой (29) от $\theta_0 \in [0; \pi]$ для $F(x) = \cos x$.

5. Трехзонное уравнение

В этом разделе также рассмотрим случай $z_n = 1 + \zeta_{n,1}\lambda^{-2}$, но с другим условием на коэффициенты уравнения (11):

$$c_n = F\left(\theta_0 + n\frac{T}{4}\right),$$

$$\alpha_{n+4} = \alpha_n, \quad \alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} = 2C_1,$$
$$\beta_n = -\alpha_n\alpha_{n+2}, \quad 2C_2 = -\alpha_n\alpha_{n+2} - \alpha_{n-1}\alpha_{n+1}.$$

Из уравнения (19) следует, что

$$z_n = 1 - (c_{n+1}^2 + c_{n+2}^2)\lambda^{-2}.$$

Подставляя z_n в (16а) и (17), получаем

$$S_n = \frac{s_0 + s_1\lambda^2 - \lambda^4}{\lambda^3 c_n}, \quad W_n = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^3 c_n}.$$

Здесь

$$s_0 = (c_n c_{n+2} - c_{n+1} c_{n+3})(c_n c_{n+2} + c_{n+1} c_{n+3}),$$
$$s_1 = c_{n+1}^2 + c_{n+2}^2 + c_{n+3}^2 - c_n^2.$$

Соответствующая спектральная кривая задается равенствами

$$\nu^2(\lambda) = (\lambda^4 - A\lambda^2 + B_1)(\lambda^4 - A\lambda^2 + B_2), \tag{30}$$
$$A = c_n^2 + c_{n+1}^2 + c_{n+2}^2 + c_{n+3}^2,$$
$$B_1 = (c_n c_{n+2} - c_{n+1} c_{n+3})^2,$$
$$B_2 = (c_n c_{n+2} + c_{n+1} c_{n+3})^2.$$

Дискриминанты обоих биквадратных многочленов в разложении (30), если рассматривать их как квадратные, равны

$$D_1 = ((c_n - c_{n+2})^2 + (c_{n+1} + c_{n+3})^2)((c_n + c_{n+2})^2 + (c_{n+1} - c_{n+3})^2),$$
$$D_2 = ((c_n - c_{n+2})^2 + (c_{n+1} - c_{n+3})^2)((c_n + c_{n+2})^2 + (c_{n+1} + c_{n+3})^2),$$

соответственно. Воспользовавшись тем, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, можно доказать, что $\sqrt{D_i} \leqslant A$, т.е., что кривая (30) имеет только действительные точки ветвления.

Заключительные замечания

В данной работе мы попробовали применить к разностному и функционально-разностному уравнениям подход, предложенный одним из авторов в работах [6, 7]. В них по Вронскиану и произведению двух решений уравнений Гойна и Фукса строились конечнозонные решения этих уравнений и находились соответствующие спектральные кривые. Как можно видеть, данный метод можно успешно применять и к разностным уравнениям, и он дает результаты, согласованные с общей теорией одномерной абелевой периодической цепочки Тода [5].

Существенное отличие настоящей работы от предыдущих работ, посвященных конечнозонным решениям дискретного уравнения Шредингера, заключается в отправной точке. Обычно по фиксированной спектральной кривой находятся коэффициенты c_n. В нашей работе, напротив, по коэффициентам c_n, зависящим от дополнительного параметра x, строится спектральная кривая и находится зависимость ее краев зон от этого дополнительного параметра.

Авторы благодарят проф. В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. J. F. van Diejen, *Integrability of difference Calogero-Moser systems.* — J. Math. Phys. **35** (1994), n. 6, 2983–3004.
2. P. Gaillard, *A new family of deformations of Darboux–Pöschl–Teller potentials.* — Lett. Math. Phys. **68** (2004), 77–90.
3. V. B. Matveev, *Functional-difference deformations of Darboux–Pöshl–Teller potentials.* — In: Bilinear Integrable Systems: From Classical to Quantum, Continuos to Discrete, NATO Science Series, L. Faddeev, P. van Moerbeke, F. Lambert (Eds.), Springer (2006), pp. 191-208.
4. P. Gailard, V. B. Matveev, *New formulas for the eigenfuntions of the two-particle difference Calogero–Moser system.* Preprint (2009), 1–15.
5. И. М. Кричевер, *Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.* — УМН. **33** (1978), вып. 4, 215–216.
6. A. O. Smirnov, *Elliptic solitons and Heun equation*, CRM Proc. Lect. Notes. **32** (2002), 287–305.
7. A. O. Smirnov, *Finite-gap solutions of the Fuchsian equation.* Lett. Math. Phys. **76** (2006), nos. 2–3. 297–316.

Golovachev G. M., Smirnov A. O. On spectral curve for functional-difference Shrödinger equation.

The method of construction some set of finite-gap solutions of functional-difference deformation Shrödinger equation $v(x)f(x+2h)+f(x)=\lambda f(x+h)$ is offered. It is shown that edges of gaps of corresponding spectral curve depend on x. Examples are given.

С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул. 67, 190000 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ggolovachev@yandex.ru
alsmir@guap.ru

Поступило 9 марта 2010 г.