Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

П. А. Валиневич

ФАКТОРИЗАЦИЯ $\mathcal{R}$–МАТРИЦЫ ДЛЯ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(s\ell_n)$

Введение

В работе рассматривается задача построения универсальной R-матрицы для спиновой цепочки с алгеброй симметрии $U_q(s\ell_n)$, удовлетворяющей RLL-соотношению [1–4]

$$R(u-v)L^{(1)}(u)L^{(2)}(v) = L^{(2)}(v)L^{(1)}(u)R(u-v), \tag{1}$$

где $L(u)$ – матрица Лакса (L-оператор). Чтобы получить ответ для произвольного (не обязательно конечномерного) представления алгебры, L-оператор строится по рекуррентной процедуре, предложенной в [5]. Согласно этой работе, генераторы в произвольном представлении алгебры $U_q(s\ell_n)$ с помощью метода индуцированных представлений [6, 7] составлены из $(n-1)$ "элементарных" представлений Йордана–Швингера [8], каждое из которых действует на пространстве функций k переменных, $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$. Как результат, генераторы алгебры в представлении общего положения являются операторами, действующими на пространстве функций $n(n-1)/2$ переменных.

Такой способ построения представлений для недеформированного случая давно известен (см., например, [9, 6], а также [10]), а для $U_q(s\ell_n)$ применялся в работах [11–13]. Однако с вычислительной точки зрения для данной работы более удобной является рекуррентная процедура, предложенная в [5], поскольку она позволяет представить L-оператор для $U_q(s\ell_n)$ как произведение двух матриц, одна из которых является L-оператором в представлении Йордана–Швингера, а другая содержит только генераторы $U_q(s\ell_{n-1})$. Такая форма записи удобна тем, что L-оператор в представлении Йордана–Швингера содержит только один из параметров представления, тогда как все остальные входят во вторую матрицу.

Ключевые слова : уравнение Янга-Бакстера, R-матрица, интегрируемые спиновые цепочки.

Полный L-оператор зависит как от спектрального параметра, так и от параметров, характеризующих представление $l_1, \ldots, l_n$ (при этом для $U_q(s\ell_n)$ выполняется условие $\sum\limits_{i=1}^{n} l_i = 0$). Но при данном способе построения $L-$оператора они будут встречаться только в комбинациях $u_i = u - l_i - n + i$, и поэтому можно считать $L = L(u_1, \ldots, u_n)$.

Далее, универсальная R-матрица, удовлетворяющая (1), как и для недеформированного случая, рассмотренного в [10], строится из “элементарных блоков” R_i, каждый из которых производит перестановку i-го и $(i+1)$-го параметров в уравнении Янга–Бакстера (1):

$$\begin{aligned} &R_n L^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) L^{(2)}(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) \\ &= L^{(1)}(v_1, \ldots, v_{n-1}, u_1) L^{(2)}(v_n, u_2, \ldots u_n) R_n \end{aligned} \tag{2}$$

$$R_i L^{(k)}(u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n) = L^{(k)}(u_1, \ldots, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_n) R_i, \ i \neq n. \tag{3}$$

Для недеформированного случая было показано [10], что R_i зависит только от разности $u_{i+1} - u_i$, и не зависит от остальных параметров. В разделе 3 будет доказано, что это остается верно и для деформированного случая.

Можно проследить, что все полученные ниже выражения для R_i имеют конечный предел при $q \to 1$ и совпадают с результатами [10] для недеформированного случая.

В разделе 2 приводятся явные выражения для L-оператора и его матричных элементов, а операторы R_i строятся в разделе 3.

2. L-ОПЕРАТОР

Спиновая цепочка $U_q(s\ell_n)$ задается $n \times n$ L-оператором, впервые построенным в работе [14]:

$$\begin{gathered} L_{ij}(u) = q^{-\left(u-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(E_{ii}+E_{jj})} E_{ji}, \quad i > j, \\ L_{ij}(u) = q^{+\left(u-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(E_{ii}+E_{jj})} E_{ji}, \quad i < j, \\ L_{ii}(u) = [u + E_{ii}]\,. \end{gathered}$$

Здесь использовано обозначение q-числа $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$, а E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ – генераторы алгебры. Коммутационные соотношения алгебры получаются из RLL-соотношения [1, 2]:

$$R_{12}(u-v) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) R_{12}(u-v) \tag{4}$$

с фундаментальной R-матрицей, действующией в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$

$$R_{12} = q^u R - q^{-u} \mathcal{P} R^{-1} \mathcal{P} \tag{5}$$

$$(R)^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \left(1 + (q-1)\delta^{i_1 i_2}\right) + (q - q^{-1}) \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \Theta_{i_1 i_2}; \tag{6}$$

$$\Theta_{i_1 i_2} = \{1 \quad \text{если} \quad i > j; 0 \ \ \text{если} \ \ i < j\}. \tag{7}$$

Задача настоящей работы состоит в нахождении универсальной R-матрицы, которая удовлетворяет RLL соотношению

$$R(u-v) L^{(1)}(u) L^{(2)}(v) = L^{(2)}(v) L^{(1)}(u) R(u-v), \tag{8}$$

где операторы $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ действуют в разных представлениях алгебры $U_q(s\ell_n)$. При этом универсальная R-матрица $R(u-v)$ будет действовать в тензорном произведении двух представлений алгебры $U_q(s\ell_n)$.

Мы хотим получить ответ для произвольных представлений алгебры (как конечномерных, так и бесконечномерных), поэтому используется реализация алгебры на пространстве функций нескольких переменных, при этом генераторы алгебры будут являться разностными операторами. Такие представления строились, например, в работах [11–15]. Но для удобства вычислений гораздо полезнее использовать результаты [5], где рекуррентным образом строятся не каждый из генераторов по отдельности (как в упомянутых работах), а весь L-оператор целиком.

Для этого используется простейшее представление генераторов в виде разностных операторов - представление Йордана–Швингера. Оно имеет вид:

$$E^J_{ij} = \frac{z_i}{z_j} [N_j], \quad i, j = 1, \dots, n \tag{9}$$

$$E^J_{ii} = N_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

где z_i, $i = 1, \dots, n$ – переменные; $N_i = z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$; эти генераторы действуют на пространстве функций $f(z_1, \dots z_n)$. На эти функции можно наложить дополнительное условие

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i \partial_i\right) f(z_1, \dots, z_n) = 2l f(z_1, \dots, z_n), \tag{11}$$

где l – произвольная константа. Тогда можно будет исключить одну из переменных из генераторов, полагая ее константой и выражая соответствующую производную по (11).

Если исключить переменную z_n (такой вариант представления Йордана-Швингера нам понадобится в дальнейшем), то матричные элементы получившегося L-оператора $L^{(2)}_{JS}$ (4) примут вид:

$$\left(L^{(2)}_{JS}(v)\right)_{in} = q^{v+l_n-\frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{i-1} N^y_k+\frac{1}{2}\sum\limits_{i+1}^{n-1} N^y_k} \frac{1}{y_i}[N^y_i], \tag{12}$$

$$\left(L^{(2)}_{JS}(v)\right)_{ni} = q^{-v-l_n+\frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{i-1} N^y_k-\frac{1}{2}\sum\limits_{i+1}^{n-1} N^y_k} y_i[l_n-\sum_{1}^{n-1} N^y_k], \tag{13}$$

$$\left(L^{(2)}_{JS}(v)\right)_{ij} = (q^{\pm 1})^{\left(v-\frac{1}{2}+(\sum\limits_{k=min(i,j)}^{max(i,j)} N_k)+\frac{1}{2}N_i+\frac{1}{2}N_j\right)} \frac{y_j}{y_i}\,[N^y_i]\,, i \leqslant j, \tag{14}$$

$$\left(L^{(2)}_{JS}(v)\right)_{ii} = [v+N^y_i], \tag{15}$$

$$\left(L^{(2)}_{JS}(v)\right)_{nn} = [v+l_n-\sum_{k=1}^{n-1} N^y_k], \tag{16}$$

где во всех равенствах $i,j = 1,\dots,(n-1)$. Мы заменили обозначение переменных на y, чтобы отличать их от введенных ранее, и отметили это явным образом в обозначении N_i: $N^y_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Параметр фиксирующий представление обозначен l_n. При таком выборе исключаемой переменной индексы представления имеют вид $(0,0,\dots,l_n)$.

Аналогичным образом можно исключить переменную z_1. Такой L-оператор мы обозначим $L^{(1)}_{JS}$, и входящие в него переменные – $x_2,\dots x_n$; при этом мы получим представление алгебры с индексами $(l_1,0,\dots,0)$.

В работе [5] было показано, что L-оператор $L^{(2)}$, отвечающий произвольному представлению алгебры $U_q(s\ell_n)$, можно получить рекуррентным образом по формуле

$$L^{(2)}(v) = \frac{1}{[v-1]} L^{(2)}_{JS}(v) L^{(2)}_{n-1}(v-1), \tag{17}$$

где второй сомножитель $L^{(2)}_{n-1}$ является редуцированным L-оператором, построенным из генераторов алгебры $U_q(s\ell_{n-1})$, которые обозначены $\mathcal{E}^y_{ij}$:

$$L^{(2)}_{n-1}(v) = \begin{pmatrix} \left[v+\mathcal{E}^y_{11}\right] & q^{v+\sigma^y_{21}}\mathcal{E}^y_{21} & \dots & q^{v+\sigma^y_{n-1,1}}\mathcal{E}^y_{n-1,1} & 0 \\ q^{-v-\sigma^y_{12}}\mathcal{E}^y_{12} & \left[v+\mathcal{E}^y_{2}\right] & \dots & q^{v+\sigma^y_{n-1,2}}\mathcal{E}^y_{n-1,2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{-v-\sigma^y_{1,n-1}}\mathcal{E}^y_{1,n-1} & q^{-v-\sigma^y_{2,n-1}}\mathcal{E}^y_{2,n-1} & \dots & \left[v+\mathcal{E}^y_{n-1}\right] & 0 \\ q^{-v}\mathcal{A}_1 & q^{-v}\mathcal{A}_2 & \dots & q^{-v}\mathcal{A}_{n-1} & \end{pmatrix},$$

где $\sigma^y_{ij} = \left(\mathcal{E}^y_{ii} - \mathcal{E}^y_{jj} - 1\right)/2$, и

$$\mathcal{A}_i = -\sum_{k=1}^{i-1} q^{-N^y_{nk}+\sigma^y_{ik}-1}\frac{y_k}{y_n}\mathcal{E}^y_{ik} - q^{-N^y_{ni}-1}\frac{y_i}{y_n}\left[\mathcal{E}^y_{ii}\right] - \sum_{k=i+1}^{n-1} q^{-N^y_{nk}-\sigma^y_{ki}-1}\frac{y_k}{y_n}\mathcal{E}^y_{ik}. \tag{19}$$

Генераторы $\mathcal{E}^y_{ij}$ в свою очередь также могут быть получены по этой рекуррентной процедуре и т.д. Таким образом, матричные элементы $L^{(2)}_{ij}$ являются операторами, действующими на пространстве функций $n(n-1)/2$ переменных. Мы будем обозначать их y_{lk}, где индекс k означает номер шага, на котором появляется данная переменная, а l - ее порядковый номер; $l < k$. Например, генераторы алгебры $U_q(s\ell_3)$ действуют на функции трех переменных y_{12}, y_{13}, y_{23}, где переменные y_{13}, y_{23} появляются в формуле (17) на шаге построения генераторов $U_q(s\ell_3)$ в терминах генераторов $U_q(s\ell_2)$, а переменная y_{12} – при построении генераторов $U_q(sl_2)$.

Таким образом, (17) дает возможность рекуррентным образом построить элементы L-оператора $L^{(2)}_{ij}$ алгебры $U_q(s\ell_n)$ из генераторов

$\mathcal{E}^y_{ij}$ алгебры $U_q(s\ell_{n-1})$. Например,

$$
\begin{aligned}
L^{(2)}_{kk} &= [u + \mathcal{E}^y_{kk} + N^y_{kn}]\,,\\
L^{(2)}_{nn} &= \left[u_n - \sum_{s=1}^{n-1} N^y_{sn}\right],\\
L^{(2)}_{kn} &= q^{u_n - \frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{k-1} N^y_{sn} + \frac{1}{2}\sum\limits_{s=k+1}^{n-1} N^y_{sn}} \frac{1}{y_{kn}} [N^y_{kn}],\\
L^{(2)}_{k+1,k} &= q^{-u-\mathcal{E}^y_{kk} - \frac{1}{2}N^y_{k+1,n} - \frac{1}{2}N^y_{kn} + \frac{1}{2}} \frac{y_{kn}}{y_{k+1,n}} \left[N^y_{k+1,n}\right] + q^{-N^y_{k+1,n}} L^{(n-1)}_{k+1,k},\\
L^{(2)}_{k,k+1} &= q^{u+\mathcal{E}^y_{k+1,k+1} + \frac{1}{2}N^y_{k+1,n} + \frac{1}{2}N^y_{kn} - \frac{1}{2}} \frac{y_{k+1,n}}{y_{kn}} [N^y_{kn}] + q^{N^y_{kn}} L^{(n-1)}_{k,k+1},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{(2)}_{nk} = &-\sum_{s=1}^{k-1} q^{-1-2u_n + \frac{3}{2}\sum\limits_{r=1}^{s-1} N^y_{rn} + N^y_{sn} + \frac{1}{2}\sum\limits_{r=s+1}^{n-1} N^y_{rn}} y_{sn} L^{(n-1)}_{sk}\\
&+ q^{-u_n + \frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{k-1} N^y_{rn} - \frac{1}{2}\sum\limits_{r=k+1}^{n-1} N^y_{rn}} y_{kn} \left[u_n - \sum_{k=1}^{n-1} N^y_{kn} - u - \mathcal{E}^y_{kk}\right]\\
&- \sum_{s=k+1}^{n-1} q^{1-\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{s-1} N^y_{rn} - N^y_{sn} - \frac{3}{2}\sum\limits_{r=s+1}^{n-1} N^y_{rn}} y_{sn} L^{(n-1)}_{sk},
\end{aligned}
$$

где $L^{(n-1)}_{ij}$ – генераторы алгебры $U_q(s\ell_{n-1})$, которые строятся по (4) из генераторов $\mathcal{E}^y_{ij}$. Можно проверить, что соотношение (4) выполняется, если учесть коммутационные соотношения между $\mathcal{E}^y_{ij}$.

Существует и другое представление L-оператора, которое мы обозначим $L^{(1)}$. Оно отличается от $L^{(2)}$ тем, что L-оператор построенный из генераторов в представлении Йордана–Швингера, стоит в нем на последнем месте:

$$
L^{(1)}(u) = \frac{1}{[-u]} L^{(1)}_{n-1}(u) L^{(1)}_{JS}(u),
\tag{21}
$$

где $L^{(1)}_{JS}$ был введен выше, а $L^{(1)}_{n-1}$ – матрица, составленная из генераторов $\mathcal{E}^x_{ij}$ алгебры $U_q(s\ell_{n-1})$:

$$L_{n-1}^{(1)}(u) =$$

$$\begin{pmatrix} [u] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q^{-u}\mathcal{B}_1 & [u+\mathcal{E}_{11}^x] & \dots & q^{u+\sigma_{n-2,1}^x}\mathcal{E}_{n-2,1}^x & q^{u+\sigma_{n-1,1}^x}\mathcal{E}_{n-1,1}^x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q^{-u}\mathcal{B}_2 & q^{-u-\sigma_{1,n-2}^x}\mathcal{E}_{1,n-2}^x & \dots & [u+\mathcal{E}_{n-2,n-2}^x] & q^{u+\sigma_{n-1,n-2}^x}\mathcal{E}_{n-1,n-2}^x \\ q^{-u}\mathcal{B}_{n-1} & q^{-u-\sigma_{1,n-1}^x}\mathcal{E}_{1,n-1}^x & \dots & q^{-u-\sigma_{n-2,n-1}^x}\mathcal{E}_{n-2,n-1}^x & [u+\mathcal{E}_{n-1,n-1}^x] \end{pmatrix} \tag{22}$$

где $\sigma_{ij}^x = (\mathcal{E}_{ii}^x - \mathcal{E}_{jj}^x - 1)/2$, а

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i = &- \sum_{s=1}^{i-2} q^{-\sigma_{s,i-1}^x - N_{s+1,i}^x}\mathcal{E}_{s,i-1}^x \frac{x_{s+1}}{x_1} q^{N_{1i}^x} - \left[\mathcal{E}_{i-1,i-1}^x\right] \frac{x_i}{x_1} q^{N_{1i}^x} \\ &- \sum_{s=i}^{n-1} q^{+\sigma_{s,i-1}^x + N_{s+1,i}^x}\mathcal{E}_{s,i-1}^x \frac{x_{s+1}}{x_1} q^{N_{1i}^x}. \end{aligned} \tag{23}$$

И оператор $L^{(1)}$, и оператор $L^{(2)}$ зависят от n произвольных параметров, являющихся параметрами представления, а также от спектрального параметра u. Несмотря на то, что в (21) и (17) эти параметры входят по отдельности, в выражениях для матричных элементов $L^{(1,2)}$ они встречаются только в виде комбинации $u - l_i$. Поэтому удобно ввести

$$u_i = u - l_i - n + i, \tag{24}$$

и считать $L^{(1,2)} = L^{(1,2)}(u_1, u_2, \dots u_n)$.

3. Факторизованное представление для $R-$матрицы

Наша задача состоит в нахождении универсальной R-матрицы, действующей в тензорном произведении двух произвольных представлений $U_q(s\ell_n)$ и удовлетворяющей RLL-соотношению

$$RL^{(1)}(u_1, \dots, u_n)L^{(2)}(v_1, \dots, v_n) = L^{(2)}(v_1, \dots, v_n)L^{(1)}(u_1, \dots u_n)R. \tag{25}$$

В этом выражении генераторы алгебры, входящие в $L^{(1)}$, находятся в представлении общего положения, характеризуемом индексами $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, а генераторы, входящие в $L^{(2)}$ – в представлении $(m_1, m_2, \dots m_n)$. Параметры u_i и l_i связаны соотношением (24), а v_i и m_i – аналогично: $v_i = v - m_i - n + i$.

Для матричных элементов L-операторов мы используем выражения, полученные в предыдущем разделе; поэтому R-матрица будет являться оператором, действующим на пространстве функций переменных, от которых зависят $L^{(1)}$ (переменные x_i) и $L^{(2)}$ (переменные y_i).

Если перейти к $\check{R} = \mathcal{P}R$, где $\mathcal{P}$ – оператор перестановки, то уравнение (26) перейдёт в

$$\check{R}L^{(1)}(u_1,\dots,u_n)L^{(2)}(v_1,\dots,v_n) = L^{(1)}(v_1,\dots,v_n)L^{(2)}(u_1,\dots u_n)\check{R} \tag{26}$$

Из него видно, что $\check{R}$ переставляет набор параметров u_i первого L-оператора с набором параметров v_i, входящими во второй L-оператор. Следуя работе [10], будем строить R-матрицу из "элементарных блоков" R_i, каждый из которых осуществляет перестановку i-го и $(i+1)$-го параметров из набора $u_1, u_2, \dots u_n, v_1, v_2, \dots v_n$:

$$\begin{aligned} &R_n L^{(1)}(u_1,u_2,\dots,u_n)L^{(2)}(v_1,\dots,v_{n-1},v_n) \\ &= L^{(1)}(v_1,\dots,v_{n-1},u_1)L^{(2)}(v_n,u_2,\dots u_n)R_n \qquad (27) \\ &R_i L^{(1)}(u_1,\dots,u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= L^{(1)}(u_1,\dots,u_{i+1},u_i,\dots,u_n)R_i, \quad i<n \qquad (28) \\ &R_i L^{(2)}(v_1,\dots,v_{i-n},v_{i+1-n},\dots,v_n) \\ &= L^{(2)}(v_1,\dots,v_{i-n+1},v_{i-n},\dots,v_n)R_i, \quad i>n \qquad (29) \end{aligned}$$

С помощью R_i универсальная R-матрица $R(u-v)$ строится следующим образом. Рассмотрим сначала операторы $\mathbb{R}_i$, которые переставляют элементы u_i и v_i из набора $(u_1,\dots u_n,v_1,\dots,v_n)$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}_i L^{(1)}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)L^{(2)}(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) \\ &= L^{(1)}(u_1,\dots,v_i,\dots,u_n)L^{(2)}(v_1,\dots,u_i,\dots,v_n)\mathbb{R}_i. \end{aligned} \tag{30}$$

Эти операторы можно представить в терминах R_i [10]:

$$\mathbb{R}_i = (R_{n+i-1}\dots R_{n+1})(R_i\dots R_{n-1})R_n(R_{n-1}\dots R_i)(R_{n+1}\dots R_{n-i+1}). \tag{31}$$

В правильности этой формулы можно убедиться прослеживая, какие преобразования производятся с начальным набором параметров $(u_1,\dots u_n,v_1,\dots,v_n)$:

$$
\begin{aligned}
&(\cdots u_i, u_{i+1} \cdots u_n | v_1 \cdots v_i, v_{i+1} \cdots) \\
&\xrightarrow{R_{n+1} \dots R_{n-i+1}} (\cdots u_i, u_{i+1} \cdots u_n | v_i, v_1 \cdots v_{i+1} \cdots) \\
&\xrightarrow{R_{n-1} \dots R_i} (\cdots u_{i+1} \cdots u_n, u_i | v_i, v_1 \cdots v_{i+1} \cdots) \\
&\xrightarrow{R_n} (\cdots u_{i+1} \cdots u_n, v_i | u_i, v_1 \cdots v_{i+1} \cdots) \\
&\xrightarrow{R_i \dots R_{n-1}} (\cdots v_i, u_{i+1} \cdots u_n | u_i, v_1 \cdots v_{i+1} \cdots) \\
&\xrightarrow{R_{n+i-1} \dots R_{n+1}} (\cdots v_i, u_{i+1} \cdots u_n | v_1 \cdots v_{i+1}, u_i \cdots).
\end{aligned}
\tag{(32)}
$$

А из $\mathbb{R}_i$ R-матрица строится следующим образом:

$$\check{R} = \mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2 \dots \mathbb{R}_n. \tag{33}$$

С технической точки зрения задача нахождения R_i является более простой, чем вычисление самого R из уравнения (26).

Нами получены явные выражения для R_i, результаты и некоторые детали вычислений приводятся ниже. Как и для недеформированной алгебры (см. [10]), R_i зависят только от разности $(u_i - u_{i+1})$ и не зависят от других u_k.

Существенно различными являются случаи, когда $i \neq n$ и $i = n$. В первом случае определяющее уравнение для R_i (29) содержит только один L-оператор, в отличие от (27), и является значительно более простым.

3.1. Оператор R_i при $i \neq n$. Уравнение (29) на R_i является условием сплетения двух $L-$операторов с разным набором параметров (т.е. соответствующих двум разным представлениям алгебры). Таким образом, R_i может интерпретироваться как сплетающий оператор для двух эквивалентных представлений алгебры $U_q(s\ell_n)$. Такие операторы строились, например, в работе [15], но для генераторов алгебры, полученных с помощью другой рекуррентной процедуры.

Решим уравнение (29) для $L^{(2)}$. Предположим, что искомый оператор R_i коммутирует с генераторами $\mathcal{E}_{ij}^y$ алгебры рангом ниже и зависит только от переменных y_{in}, $i = 1, \dots, n-1$.

Тогда, если получено выражение для R_{k-1} для $U_q(s\ell_k)$, оно останется таким же и для $U_q(s\ell_{k+1})$, поскольку наш оператор будет коммутировать с новыми переменными $y_{l,k+1}$. Это означает, что необходимо найти только R_{n-1}, все остальные R_i, $i < n-1$ наследуются из предыдущих шагов рекуррентной процедуры.

Перейдём к вычислению R_{n-1}. Для этого удобно ввести переменные

$$\bar{X}_{in} = q^{\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{2}^{i-1} N^x_{kn} - \sum\limits_{i+1}^{n} N^x_{kn}\right)} x_{in}; \quad X_{in} = q^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{2}^{i-1} N^x_{kn} - \sum\limits_{i+1}^{n} N^x_{kn}\right)} x_{in}; \tag{34}$$

$$\bar{Y}_{in} = q^{\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{1}^{i-1} N^y_{kn} - \sum\limits_{i+1}^{n-1} N^y_{kn}\right)} y_{in}; \quad Y_{in} = q^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{1}^{i-1} N^y_{kn} - \sum\limits_{i+1}^{n-1} N^y_{kn}\right)} y_{in}. \tag{35}$$

коммутационные соотношения между которыми имеют вид

$$\begin{aligned} \left[X_{in}, \bar{X}_{jn}\right] &= 0; \\ X_{in}X_{jn} &= q^{\pm 1} X_{jn}X_{in}, \quad i \lesseqgtr j; \\ \bar{X}_{in}\bar{X}_{jn} &= q^{\mp 1} \bar{X}_{jn}\bar{X}_{in}, \quad i \lesseqgtr j; \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \left[Y_{in}, \bar{Y}_{jn}\right] &= 0; \\ Y_{in}Y_{jn} &= q^{\pm 1} Y_{jn}Y_{in}, \quad i \lesseqgtr j; \\ \bar{Y}_{in}\bar{Y}_{jn} &= q^{\mp 1} \bar{Y}_{jn}\bar{Y}_{in}, \quad i \lesseqgtr j; \end{aligned} \tag{37}$$

$$[X_{in}, Y_{jn}] = [X_{in}, \bar{Y}_{jn}] = [\bar{X}_{in}, Y_{jn}] = [\bar{X}_{in}, \bar{Y}_{jn}] = 0. \tag{38}$$

Докажем, что оператор

$$\begin{aligned} R_{n-1} = &\left(q^{\sum\limits_{k=1}^{n-1} N_{kn} - \sum\limits_{k=1}^{n-2} N_{k,n-1}} Y^{-1}_{n-1,n} q^{N_{n-1,n}} \right)^{u_n - u_{n-1}} \\ &\times e_{q^2}\left(q^{2(u_n - u_{n-1})} Z\right) e^{-1}_{q^2}\left(Z\right), \end{aligned} \tag{39}$$

$$Z = q^{-2N_{n-1,n}} - \lambda q^{-N_{n-1,n}} \sum_{s=1}^{n-2} Y_{s,n-1} Y_{n-1,n} Y^{-1}_{sn} \left[N_{sn}\right], \tag{40}$$

удовлетворяет

$$R_{n-1} L^{(k)}(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n) = L^{(k)}(u_1, \ldots, u_n, u_{n-1}) R_{n-1}. \tag{41}$$

Здесь $e_q(x)$ – $q-$экспонента (см. [16]):

$$e_q(x) = \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\infty}(1-q^k x)}.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобятся два ее свойства:

$$1) \quad e_q(qx) = (1-x)e_q(x), \tag{42}$$

$$2) \quad e_q(u+v) = e_q(v)e_q(u), \quad \text{если} \quad uv = qvu, \tag{43}$$

Достаточно доказать, что (41) выполнено для матричных элементов L-оператора $L_{ij}^{(2)}$ с индексами $i = j \pm 1$ и $i = j$, так как остальные матричные элементы выражаются через них по соотношениям алгебры (см. (4)). Их явный вид приведен в (20).

Далее равенство (29) проверяется напрямую с каждым из матричных элементов поочередно; при этом используются свойство q-экспоненты (42), а также разложение на произведение q-экспонент, полученное с использованием (43):

$$R_{n-1} = \left(q^{\sum\limits_{k=1}^{n-1} N_{kn} - \sum_{k=1}^{n-2} N_{k,n-1}} Y_{n-1,n}^{-1} q^{N_{n-1,n}} \right)^{u_n - u_{n-1}} \cdot$$
$$\cdot\, e_{q^2}(q^{\xi - 2N_{n-1,n}})\; e_{q^2}(q^{\xi} Z_{n-2}^{+})\; e_{q^2}(q^{\xi} Z_{n-2}^{-}) \cdot \ldots \cdot e_{q^2}(q^{\xi} Z_1^{+})\; e_{q^2}(q^{\xi} Z_1^{-}) \cdot$$
$$\cdot\, e_{q^2}^{-1}(Z_1^{-})\; e_{q^2}^{-1}(Z_1^{+}) \cdot \ldots \cdot e_{q^2}^{-1}(Z_{n-2}^{-})\; e_{q^2}^{-1}(Z_{n-2}^{+})\; e_{q^2}^{-1}(q^{-2N_{n-1,n}}), \tag{44}$$

где $\xi \equiv 2(u_n - u_{n-1})$, а

$$Z_i^{\pm} = -q^{-N_{n-1,n}} Y_{i,n-1} Y_{n-1,n} Y_{in}^{-1} q^{N_{in}}. \tag{45}$$

Например, $L_{ii}^{(2)}$, согласно (20) должен коммутировать с R_{n-1}, поскольку не содержит u_n и u_{n-1}. Это выполнено, поскольку R_{n-1} коммутирует с $E_{kk}^{(n-1)}$ по построению, а $\left[R_{n-1}, q^{N_{kn}^y}\right] = 0$, так как по отдельности $\left[Z_k^{\pm}, q^{N_{kn}^y}\right] = 0$. Для $L_{nn}^{(2)}$ условие сплетения (41) обеспечивается при помощи множителя, стоящего перед $q-$экспонентой в R_i, с Z этот оператор коммутирует.

Остальные равенства из (20) доказываются с использованием представления (44). Оно подставляется в правую часть (41) и каждая и

q-экспонет последовательно переносится слева направо, вызывая при этом изменения матричного элемента L-оператора. Итогом всех этих изменений должна стать замена в нём параметра u_{n-1} параметром u_n.

Итоговое выражения для R_i имеет вид

$$R_i = \left(q^{\sum\limits_{k=1}^{i-1} N_{ki} - \sum_{k=1}^{i-2} N_{k,i-1}} Y_{i-1,i}^{-1} q^{N_{i-1,i}} \right)^{u_i - u_{i-1}} \times e_{q^2}\left(q^{2(u_i-u_{i-1})} Z^{(i)}\right) \, e_{q^2}^{-1}\left(Z^{(i)}\right), \tag{46}$$

$$Z^{(i)} = q^{-2N_{i-1,i}} - \lambda q^{-N_{i-1,i}} \sum_{s=1}^{i-2} Y_{s,i-1} Y_{i-1,i} Y_{si}^{-1} \left[N_{si}\right]. \tag{47}$$

3.2 Оператор R_i, при $i = n$. Для его нахождения подставим в определяющее уравнение (27) факторизованные представления для L-операторов (21) и (17). Полученное уравнение имеет вид

$$R_n L_{n-1}^{(1)} L_{JS}^{(1)} L_{JS}^{(2)} L_{n-1}^{(2)} = \widetilde{L}_{n-1}^{(1)} \widetilde{L}_{JS}^{(1)} \widetilde{L}_{JS}^{(2)} \widetilde{L}_{n-1}^{(2)} R_n, \tag{48}$$

где волна над операторами означает, что в них нужно осуществить замену параметров $u_1 \leftrightarrow v_n$, т.е. параметры представления меняются по правилу

$$\begin{aligned} l_1 &\to \tilde{l}_1 = v - u + l_n + n - 1, \\ l_n &\to \tilde{l}_n = u - v + l_1 - n + 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Так как $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_i$, входящие в матрицы $L_{n-1}^{(2)}$ и $L_{n-1}^{(1)}$ соответственно, имеют следующую зависимость от параметров представления: $\mathcal{A}_i \sim y_j q^{-v_n}$ и $\mathcal{B}_i \sim x_j q^{-u_1}$, то мы можем искать R_n в виде

$$R_n = q^{(u_1 - v_n)\left(\sum\limits_{1}^{n-1} N_k^y + \sum\limits_{2}^{n} N_k^x \right)} \cdot f, \tag{50}$$

Тогда первый сомножитель в формуле (50) будет осуществлять перестановку параметров (49) внутри операторов $L_{n-1}^{(1,2)}$, а пока неизвестный оператор f будет коммутировать с $L_{n-1}^{(1,2)}$ и осуществлять перестановку параметров в операторах $L_{JS}^{(1,2)}$, т.е.

$$[f, \mathcal{E}_{ij}^x] = [f, \mathcal{E}_{ij}^y] = 0;$$

и, следовательно,

$$f\ L^{(1)}_{JS}(u,l_1)L^{(2)}_{JS}(v,l_n) = q^{-(u_1-v_n)\left(\sum\limits_1^{n-1} N^y_k+\sum\limits_2^{n} N^x_k\right)} L^{(1)}_{JS}(u,\tilde{l}_1)L^{(2)}_{JS}(v,\tilde{l}_n) q^{(u_1-v_n)\left(\sum\limits_1^{n-1} N^y_k+\sum\limits_2^{n} N^x_k\right)} f. \tag{51}$$

Именно для такого упрощения задачи и требовались факторизованные представления (21) и (17), так как искомая функция f зависит только от X_{1i} и Y_{jn}, возникающих на последнем шаге факторизации. Решение этих уравнений имеет вид

$$f = Y_1^{u_1-v_n} \frac{e_{q^2}\left(-\Lambda\right)}{e_{q^2}\left(-q^{2(v_n-u_1)}\Lambda\right)}; \tag{52}$$

$$\Lambda = X_{12}Y_{2n}Y^{-1}_{1n}q^{-1} + X_{13}Y_{3n}Y_{1n}q^{-1-2} + \ldots + X_{1,n-1}Y_{n-1,n}Y^{-1}_{1}q^{-1-2(n-3)} + X_{1n}Y^{-1}_{1n}q^{-2(n-2)}. \tag{53}$$

Используя свойство (43) q-экспоненты, его можно представить в виде

$$f = Y_1^{u_1-v_n} e_{q^2}\left(-Z_n\right) e_{q^2}\left(-Z_{n-1}\right) \ldots e_{q^2}\left(-Z_3\right) e_{q^2}\left(-Z_2\right) e^{-1}_{q^2}\left(-q^{2(v_n-u_1)}Z_2\right) e^{-1}_{q^2}\left(-q^{2(v_n-u_1)}Z_3\right) \ldots e^{-1}_{q^2}\left(-q^{2(v_n-u_1)}Z_{n-1}\right) e^{-1}_{q^2}\left(-q^{2(v_n-u_1)}Z_n\right), \tag{54}$$

где

$$Z_i = X_{1i}Y_{in}Y^{-1}_{1n}q^{-1-2(i-2)}, \quad i = 2, \ldots, (n-1)$$
$$Z_n = X_{1n}Y_{1n}q^{-2(n-2)},$$

так как Z_i образуют вейлевские пары: $Z_iZ_j = q^2Z_jZ_i,\ i < j$.

Проверка выполнения равенства (51) требует большого объема вычислений и поэтому не приводится в данной работе. Отметим только, что для упрощения выкладок оказалось полезным использовать разбиение $L-$оператора в представлении Йордана-Швингера на верхне- и нижнетреугольную части с последующей факторизацией каждой из них.

Таким образом формулы (52), (50) и (46) дают ответ для универсальной $R-$матрицы алгебры $U_q(s\ell_n)$. Недостатком полученного выражения следует признать то, что операторы $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$, которые она переставляет, различны. То есть, для получения окончательно ответа, необходимо предъявить преобразование переменных x_i к переменным y_i. Этот недостаток будет устранен в следующих работах.

4. Благодарности

Часть результатов, приведенных в работе, получена совместно с С. Э. Деркачевым, Р. Киршнером и Д. Р. Караханяном. Автор благодарен им за сотрудничество и ценные замечания по тексту статьи. Работа поддержана грантами РФФИ 07-02-92166 и Deutsche Forschungsgemeinshaft KI 623/6-1, а также грантом DAAD.

Литература

1. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model.* Les-Houches Lectures (1995).
2. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи. I.* — ТМФ **40** (1979), 194–220.
3. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Lecture Notes in Physics **151** (1982), 61–119.
4. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *On the solution of the Yang–Baxter equation.* — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **95** (1980), 129.
5. S. E. Derkachov, D. R. Karakhanyan, R. Kirschner, P. A. Valinevich, *Iterative construction of $U_q(s\ell(n+1))$ representations and Lax matrix factorisation.*— Lett. Math. Phys. **85** (2008), 221.
6. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, *Унитарные представления классических групп.* Труды Математического Института им. Стеклова, 1950.
7. A. Borel, A. Weyl, *Representations lineaires et espaces homogenes Kählerians des groupes de Lie compactes.* Sem. Bourbaki, May 1954.
8. P. Jordan, *Der Zusammenhang der symmetrischen und linearen Gruppen und das Mehrkörperproblem.* — Zeitschr. f. Physik **94** (1935), 531.
9. Д. П. Желобенко, А. Н. Штерн, *Представления групп Ли.* Наука, М., 1983.
10. S. Derkachov, A. Manashov, *R-Matrix and Baxter Q-Operators for the Noncompact SL(N,C) Invariant Spin Chain.* — SIGMA **2** (2006) 084.
11. L. Biedenharn, M. Lohe, *An Extension of the Borel–Weyl construction to the quantum group $U_q(n)$.* — Comm. Math. Phys. **146** (1992), 483.
12. V. K. Dobrev, P. Truini, *Polynomial realization of $U_q(sl_3)$ Gel'fand–(Weyl)–Zetlin basis.* — J. Math. Phys. **38** (1997), 3750.
13. L. Biedenharn, M. Lohe, *Quantum group symmetry and q-tensor algebras.* World Scientific, 1995.
14. M. Jimbo, *A q-difference analog of $U(g)$ and the Yang–Baxter equation.* — Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63.
15. V. K. Dobrev, *q-difference intertwining operators for $U_q(sl(n))$: general setting and the case $n = 3$.* — J. Phys. A. **27** (1994), 4841.
16. L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm.* — Mod. Phys. Lett. A **9** (1994), 427.

    A. N. Kirillov, *Dilogarithm identities.* — Progr. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 61.

Valinevich P. A. Factorization of the $R-$matrix for the quantum algebra $U_q(s\ell_n)$.

We propose the method for constructing the general solution of the Yang-Baxter equation with $U_q(s\ell_n)$ algebra symmetry, which is based on the factorization property of the corresponding $L-$operator. We present the closed-form expression for the universal $R-$matrix being the difference operator acting on the space of functions of $n(n-1)$ variables.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pavel-valinevich@yandex.ru

Поступило 2 апреля 2010 г.