Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

А. Г. Быцко

О ПОСТОЯННЫХ $U_q(sl_2)$–ИНВАРИАНТНЫХ R–МАТРИЦАХ

§1. Введение

Напомним, что алгебра $U_q(sl_2)$ порождается генераторами X_+, X_-, q^H, q^{-H} удовлетворяющими следующим соотношениям [9]

$$[X^+, X^-] = \frac{q^{2H} - q^{-2H}}{q - q^{-1}}, \quad q^H X^\pm = q^{\pm 1}\, X^\pm\, q^H, \quad q^{\pm H} q^{\mp H} = 1. \qquad (1)$$

Гомоморфизм Δ, заданный на генераторах следующим образом:

$$\Delta(X^\pm) = X^\pm \otimes q^{-H} + q^H \otimes X^\pm, \quad \Delta(q^{\pm H}) = q^{\pm H} \otimes q^{\pm H}, \qquad (2)$$

превращает $U_q(sl_2)$ в биалгебру (и, более того, в алгебру Хопфа [12].

Мы будем рассматривать стандартное конечномерное представление π_s алгебры $U_q(sl_2)$, в котором генераторы действуют на базисные векторы ω_k модуля V_s ($\dim V_s = (2s{+}1)$, $2s \in \mathbb{N}$) следующим образом

$$\pi_s(X^\pm)\, \omega_k = \sqrt{[s \mp k][s \pm k\, + 1]}\; \omega_{k\pm 1}, \quad \pi_s(q^{\pm H})\, \omega_k = q^{\pm k}\, \omega_k, \qquad (3)$$

где $[t] \equiv (q^t - q^{-t})/(q - q^{-1})$ и $k = -s, -s+1, \ldots, s$.

Универсальные R-матрицы для биалгебры (1)–(2) имеют вид [6]

$$R^\pm = q^{\pm H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\pm \frac{1}{2}(n^2 - n)}}{\prod\limits_{k=1}^{n} [k]_q} \big(\pm (q - q^{-1}) X^\mp \otimes X^\pm\big)^n\, q^{\pm H \otimes H}. \qquad (4)$$

Пусть $\mathbb{P}$ обозначает оператор перестановки тензорных компонент в $U_q(sl_2)^{\otimes 2}$. Тогда оператор $R \equiv \mathbb{P}\, R^+ = (R^-)^{-1}\, \mathbb{P}$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера в форме группы кос:

$$R_{12}\, R_{23}\, R_{12} = R_{23}\, R_{12}\, R_{23}. \qquad (5)$$

Ключевые слова : уравнение Янга–Бакстера, постоянные R-матрицы, спектральное разложение.

Данная работа была поддержана грантами РФФИ 08-01-00638, 09-01-12150, 09-01-93108 и НШ-5931.2010.1 .

Его спектральное разложение в представлении π_s имеет следующий вид [8]

$$\mathsf{R} \equiv \pi_s^{\otimes 2}\,(R) = \sum_{k=0}^{2s}\,\xi_k\,\mathsf{P}^{2s-k}, \tag{6}$$

где P^j есть проектор на неприводимый подмодуль V_j в $V_s^{\otimes 2} = \oplus_{j=0}^{2s} V_j$. Здесь и далее мы используем обозначения

$$\xi_k \equiv (-1)^k\, q^{\rho(2s-k)-2\rho(s)}, \quad \rho(t) \equiv t(t+1). \tag{7}$$

Рассмотрим какое–нибудь $U_q(sl_2)$-инвариантное решение R' уравнения Янга–Бакстера (5). Его спектральное разложение в представлении π_s имеет вид

$$\mathsf{R}' \equiv \pi_s^{\otimes 2}(R') = \sum_{k=0}^{2s} r_k \mathsf{P}^{2s-k}, \tag{8}$$

причем $r_0 \neq 0$ в силу Леммы 6 в [4], которая применима и при $q \neq 1$. Мы докажем следующее утверждение:

Предложение 1. *Если в спектральном разложении* (8) *мы имеем* $r_1 \neq r_0$, *то* R' *совпадает с точностью до нормировки либо с* R *либо с* R^{-1}.

Это утверждение является q-аналогом второй части Предложения 1 в [4], где рассматривались sl_2-инвариантные решения уравнения Янга–Бакстера. Заметим, что предел $q \to 1$ является вырожденным в том смысле, что оба оператора R и R^{-1} переходят в оператор перестановки $\mathbb{P}$.

§2. Редукция на подпространство $W_n^{(s)}$

Напомним метод анализа $U_q(sl_2)$-инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера, развитый в [3]. Пусть $\lfloor t \rfloor$ обозначает целую часть числа t. Подпространство $W_n^{(s)} \subset V_s^{\otimes 3}$ для $n = 0, 1, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$ определяется как линейная оболочка векторов старшего веса $(3s-n)$, т.е.

$$W_n^{(s)} = \{\, \psi \in V_s^{\otimes 3} \quad \big| \quad \mathsf{X}_{123}^{+}\psi = 0, \quad q^{\mathsf{H}_{123}}\psi = q^{3s-n}\psi \,\}. \tag{9}$$

Здесь и далее для $O \in U_q(sl_2)$ мы обозначаем $\mathsf{O}_{123} = \pi_s^{\otimes 3}\big((\Delta \otimes id)\Delta(O)\big)$.

Поскольку $[\mathsf{X}^{\pm}_{123}, \mathsf{R}_{12}] = [\mathsf{X}^{\pm}_{123}, \mathsf{R}_{23}] = 0$, то $W^{(s)}_n$ является инвариантным пространством для R_{12} и R_{23} и можно рассмотреть сужения этих операторов на $W^{(s)}_n$. В $W^{(s)}_n$ можно выбрать базис, в котором оператор $\mathsf{R}_{12}\big|_{W^{(s)}_n}$ задается диагональной матрицей $D^{(n)}_0$ следующего вида:

$$\big(D^{(n)}_0\big)_{kk'} = \delta_{kk'}\,\xi_k, \tag{10}$$

где $0 \le k \le n$ для $0 \le n \le 2s$ и $(n-2s) \le k \le (4s-n)$ для $2s \le n \le \lfloor 3s \rfloor$.

В том же базисе оператор $\mathsf{R}_{23}\big|_{W^{(s)}_n}$ задается матрицей

$$\hat{D}^{(n)}_0 = A^{(s,n)}\; D^{(n)}_0\; A^{(s,n)}, \tag{11}$$

где $A^{(s,n)}$ – матрица, имеющая следующие свойства [3]: она симметрична, ортогональна, совпадает со своей обратной, и самодуальна по q:

$$A^{(s,n)} = \big(A^{(s,n)}\big)^t = \big(A^{(s,n)}\big)^{-1}, \quad A^{(s,n)}_q = A^{(s,n)}_{q^{-1}}. \tag{12}$$

Её элементы выражаются в терминах 6–j символов алгебры $U_q(sl_2)$ следующим образом:

$$A^{(s,n)}_{kk'} = (-1)^{2s-n}\sqrt{[4s-2k+1]_q[4s-2k'+1]_q}\left\{\begin{matrix} s & s & 2s-k \\ s & 3s-n & 2s-k' \end{matrix}\right\}_q. \tag{13}$$

Выполнение уравнения Янга–Бакстера (5) на подпространстве $W^{(s)}_n$ эквивалентно равенству

$$\big(D^{(n)}_0\, A^{(s,n)}\big)^3 = \big(A^{(s,n)}\, D^{(n)}_0\big)^3. \tag{14}$$

В действительности, однако, верно более сильное утверждение: правая и левая части (14) с точностью до константы совпадают с единичным оператором на $W^{(s)}_n$. Это вытекает из следующего утверждения (q-аналога Леммы 3 в [4]):

Лемма 1. *Для всех* $n = 0, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$ *выполняется следующее соотношение*

$$A^{(s,n)}\, D^{(n)}_0\, A^{(s,n)} = \theta_n\, \big(D^{(n)}_0\big)^{-1} A^{(s,n)}\, \big(D^{(n)}_0\big)^{-1}, \tag{15}$$

где $\theta_n \equiv (-1)^n\, q^{\rho(3s-n)-3\rho(s)}$

Доказательство этой и остальных лемм даны в Приложении.

Утверждение Леммы 1 можно записать в следующем виде:

$$\big(\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12}\big)\big|_{W_n^{(s)}} = \big(\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23}\big)\big|_{W_n^{(s)}} = \theta_n\, A^{(s,n)}. \tag{16}$$

При $q=1$ это соотношение переходит в $\big(\mathbb{P}_{13}\big)\big|_{W_n^{(s)}} = (-1)^n A^{(s,n)}$. Из (16) с учетом (12) следует, что

$$\big((\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23})^3\big)\,\big|_{W_n^{(s)}} = \big((\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12})^3\big)\,\big|_{W_n^{(s)}} = q^{2\rho(3s-n)-6\rho(s)}. \tag{17}$$

Заметим, что

$$\big(\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12}\big)^2 = \big(\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23}\big)^2 = \big(\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{R}_{23}\big)^3 = \big(\mathsf{R}_{23}\,\mathsf{R}_{12}\big)^3 \tag{18}$$

$$= \pi_s^{\otimes 3}\Big(\big(R^-_{12}R^-_{13}R^-_{23}\big)^{-1}\big(R^+_{12}R^+_{13}R^+_{23}\big)\Big) = \pi_s^{\otimes 3}\big(\chi_1\chi_2\chi_3\,\Delta^{(2)}(\chi^{-1})\big), \tag{19}$$

где элемент χ строится следующим образом: если R-матрица (4) записана в виде $R^+ = \sum_a r_a^{(1)} \otimes r_a^{(2)}$, и $\mathcal{S}$ обозначает операцию антипода, то $\chi = q^{2H}\big(\sum_a \mathcal{S}(r_a^{(2)})r_a^{(1)}\big)$.

Известно [7], что элемент χ централен, $\pi_s(\chi) = q^{-2\rho(s)}$, и $\chi_1\chi_2\,\Delta(\chi^{-1}) = \big(R^-\big)^{-1}R^+$. Последнее соотношение позволяет установить последнее равенство в (19) (и его обобщение для $\Delta^{(N)}(\chi^{-1})$, см. доказательство Леммы 1 в [5].) Таким образом, соотношение (16) можно рассматривать как определение некоторого квадратного корня из оператора в правой части (19).

§3. Анализ уравнения Янга–Бакстера на $W_n^{(s)}$

Мы докажем Предложение 1 используя следующее утверждение, являющееся q-аналогом Леммы 4 из [4].

Лемма 2. *Пусть* $0 \le \overline{m} \le n \le 2s$, *где* $\overline{m} \equiv (2s-m)$. *Сужения операторов* P^m_{12}, P^m_{23}, *и* $\mathsf{R}^{\pm1}_{12}$, $\mathsf{R}^{\pm1}_{23}$ *на* $W_n^{(s)}$ *удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\begin{gathered}\mathsf{R}_l\,\mathsf{R}_{l'}\,\mathsf{R}_l = \mathsf{R}_{l'}\,\mathsf{R}_l\,\mathsf{R}_{l'},\\ \mathsf{P}^m_l\,\mathsf{P}^m_{l'}\,\mathsf{P}^m_l = \eta^2_{n,\overline{m}}\,\mathsf{P}^m_l,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\mathsf{P}^m_l\,\mathsf{R}^{\pm1}_{l'}\,\mathsf{P}^m_l = (\theta_n\xi^{-2}_{\overline{m}})^{\pm1}\eta_{n,\overline{m}}\,\mathsf{P}^m_l,\\ \mathsf{R}^{\pm1}_l\,\mathsf{P}^m_{l'}\,\mathsf{R}^{\pm1}_l = (\theta_n\xi^{-1}_{\overline{m}})^{\pm2}\,\mathsf{R}^{\mp1}_{l'}\,\mathsf{P}^m_l\,\mathsf{R}^{\mp1}_{l'},\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_l^m\,\mathsf{P}_{l'}^m\,\mathsf{R}_l^{\pm1} &= (\theta_n\xi_{\overline{m}}^{-1})^{\pm1}\eta_{n,\overline{m}}\,\mathsf{P}_l^m\,\mathsf{R}_{l'}^{\mp1},\\ \mathsf{R}_l^{\pm1}\,\mathsf{P}_{l'}^m\,\mathsf{P}_l^m &= (\theta_n\xi_{\overline{m}}^{-1})^{\pm1}\eta_{n,\overline{m}}\,\mathsf{R}_{l'}^{\mp1}\mathsf{P}_{l'}^m, \end{aligned} \tag{22}$$

где $l=\{12\}$, $l'=\{23\}$ *или* $l=\{23\}$, $l'=\{12\}$, *и* $\eta_{n,\overline{m}}=A^{(s,n)}_{\overline{m},\overline{m}}$.

Отметим, что не все соотношения Леммы 2 независимы. Например, второе соотношение в (21) следует из (22), а первое соотношение в (21) и второе соотношение в (20) следуют друг из друга, если использовать (22).

Отметим также, что для $q=1$ операторы $\mathsf{R}^{\pm1}$ совпадают с оператором перестановки $\mathbb{P}$ и соотношения (20)–(22) превращаются в соотношения алгебры Брауэра [2] (с учетом дополнительного соотношения $\mathbb{P}^2=\mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – единичный оператор). Для $q\neq1$ операторы $\mathsf{R}^{\pm1}$ при сужении на $W_1^{(s)}$ представимы линейными комбинациями P^m и единичного оператора $\mathbb{E}$. Вследствие этого соотношения (20)–(22) для $n=1$ можно свести ко второму соотношению в (20), которое является определяющим соотношением для алгебры Темперли–Либа [13]. При $n\geq2$ соотношения (20)–(22) являются соотношениями, которые выполняются в алгебры Бирман–Венцля–Мураками [10, 1]. Однако, в этой алгебре должно выполняться также дополнительное соотношение, которое в нашем случае имеет место только для $n=2$ (при сужении на $W_2^{(s)}$ оператор R^{-1} представим в виде линейной комбинации операторов R, P^m и $\mathbb{E}$).

Возвращаясь к рассмотрению спектрального разложения (8), заметим, что без потери общности можно положить $r_0=\xi_0$. Тогда R' можно представить в следующем виде:

$$\mathsf{R}'=\mathsf{R}+g\,\mathsf{P}^{2s-n}+\dots, \tag{23}$$

где $n\geq1$ и $\dots$ обозначает вклад от проекторов, ранги которых меньше чем ранг P^{2s-n}.

Подставим анзатц (23) в уравнение Янга–Бакстера и рассмотрим его сужение на $W_n^{(s)}$ для $n\leq 2s$. Используя соотношения Леммы 2, можно проверить, что уравнение Янга–Бакстера для $\mathsf{R}'\big|_{W_n^{(s)}}$ эквивалентно следующему матричному уравнению

$$g\,\mathsf{J}+(\theta_n\xi_n^{-2}\eta_{n,n}\,g^2+\eta_{n,n}^2\,g^3)\,\mathsf{G}+(\theta_n\xi_n^{-1}\eta_{n,n}\,g^2)\,\mathsf{H}=0, \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathsf{G} &= \left(\mathsf{P}_{12}^{2s-n} - \mathsf{P}_{23}^{2s-n}\right)\big|_{W_n^{(s)}} = \pi^{(n)} - A^{(s,n)}\pi^{(n)}A^{(s,n)},\\
\mathsf{J} &= \left(\mathsf{R}_{12}\,\mathsf{P}_{23}^{2s-n}\,\mathsf{R}_{12} - \mathsf{R}_{23}\,\mathsf{P}_{12}^{2s-n}\,\mathsf{R}_{23}\right)\big|_{W_n^{(s)}}\\
&= D_0^{(n)}A^{(s,n)}\pi^{(n)}A^{(s,n)}D_0^{(n)} - \theta_n^2\xi_n^{-2}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)}\pi^{(n)}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1},\\
\mathsf{H} &= \left(\mathsf{P}_{12}^{2s-n}\,\mathsf{R}_{23}^{-1} + \mathsf{R}_{23}^{-1}\,\mathsf{P}_{12}^{2s-n} - \mathsf{P}_{23}^{2s-n}\,\mathsf{R}_{12}^{-1} - \mathsf{R}_{12}^{-1}\,\mathsf{P}_{23}^{2s-n}\right)\big|_{W_n^{(s)}}\\
&= \theta_n^{-1}\xi_n\left(\pi^{(n)}A^{(s,n)}D_0^{(n)} + D_0^{(n)}A^{(s,n)}\pi^{(n)}\right)\\
&\quad - A^{(s,n)}\pi^{(n)}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1} - (D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)}\pi^{(n)}A^{(s,n)}.
\end{aligned}$$

Здесь $\pi^{(n)}$ – матрица такая, что $(\pi^{(n)})_{kk'} = \delta_{kn}\delta_{k'n}$.

Лемма 3. i) *При $n = 1$ выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{J} &= (\theta_1^2\xi_0^{-2}\xi_1^{-2} - \xi_0^2)\mathsf{G} = (q^{4s(s-1)} - q^{4s^2})\,\mathsf{G},\\
\mathsf{H} &= 2\xi_0^{-1}\,\mathsf{G} = 2q^{-2s^2}\mathsf{G}.
\end{aligned} \tag{25}$$

ii) *При $n = 2$ матрицы J и G линейно независимы и выполняется следующее соотношение:*

$$\xi_0\xi_1\,\mathsf{H} = (\xi_0 + \xi_1)\,\mathsf{G} + (\xi_0 + \xi_1)^{-1}\,\mathsf{J}. \tag{26}$$

iii) *При $n \geq 3$ матрицы J, G, H линейно независимы и $\mathsf{J} \neq 0$.*

Подставляя соотношения (25) в (24), мы заключаем, что при $n = 1$ коэффициент g должен быть корнем следующего уравнения:

$$\eta_{1,1}^2\,g^3 + \eta_{1,1}\theta_1\xi_1^{-1}(\xi_1^{-1} + 2\xi_0^{-1})\,g^2 + (\theta_1^2\xi_0^{-2}\xi_1^{-2} - \xi_0^2)\,g = 0.$$

Таким образом (с учетом того, что $\eta_{1,1} = -\,(q^{2s} + q^{-2s})^{-1}$), при $n = 1$ коэффициент g может принимать одно из следующих значений: $g = 0$, $g = q^{2s(s-2)}(1 - q^{8s})$, $g = q^{2s(s-2)}(1 + q^{4s})$. В первом случае R' совпадает в двух старших порядках с R, во втором с $q^{4s^2}\mathsf{R}^{-1}$, а в третьем случае мы имеем $r_1 = r_0$.

При $n = 2$, подставим соотношения (26) в (24), исключим H и потребуем, чтобы получающиеся коэффициенты при J и G обращались в ноль. Легко видеть, что это возможно либо если g равен нулю, либо если

$$\eta_{1,1}\,g = -\theta_2\xi_0^{-1}\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}(\xi_0\xi_1\xi_2^{-1} + \xi_0 + \xi_1) = -\theta_2^{-1}\xi_0\xi_1\xi_2(\xi_0 + \xi_1).$$

Однако, это равенство не может выполняться, поскольку $\xi_0^2\xi_1^2\xi_2^2 = \theta_2^2$ (см. (34)).

При $n \geq 3$, коэффициент при J в (24) очевидно равен нулю только если $g = 0$. Таким образом, коэффициент g в (23) должен быть равен нулю, если $n \geq 2$. Следовательно, если R' совпадает с R в двух старших порядках, то $\mathsf{R}' = \mathsf{R}$. Аналогичное утверждение можно получить рассматривая анзатц (23), в котором R заменен на R^{-1}. Тем самым Предложение 1 доказано.

Благодарности. Автор благодарен П. Кулишу за полезные замечания.

Приложение

Доказательство Леммы 1. Для 6-j символов алгебры $U_q(sl_2)$ имеет место q-аналог тождества Рака [8, 11]:

$$\sum_p \left((-1)^p \, [2p+1]_q \begin{Bmatrix} r_1 & r_3 & l \\ r_2 & r_4 & p \end{Bmatrix}_q q^{\rho(p)-\rho(r_1)-\rho(r_4)} \begin{Bmatrix} r_1 & r_2 & l' \\ r_3 & r_4 & p \end{Bmatrix}_q \right)$$
$$= (-1)^{l+l'} \, q^{\rho(r_2)-\rho(l)} \begin{Bmatrix} r_3 & r_1 & l \\ r_2 & r_4 & l' \end{Bmatrix}_q q^{\rho(r_3)-\rho(l')}. \tag{27}$$

(Отметим, что тождество остается верным, если положить $\rho(t) = -t(t+1)$, поскольку 6–j символы самодуальны по отношению к замене $q \to q^{-1}$).

Запишем матричный элемент (kk') равенства (15), используя формулу (10) и учитывая симметричность матрицы $A^{(s,n)}$:

$$\sum_m (-1)^m \, A^{(s,n)}_{km} \, q^{\rho(2s-m)-2\rho(s)} \, A^{(s,n)}_{k'm}$$
$$= (-1)^{n+k+k'} \, q^{\rho(3s-n)+\rho(s)-\rho(2s-k)-\rho(2s-k')} \, A^{(s,n)}_{kk'}. \tag{28}$$

Теперь, принимая во внимание формулу (13), легко видеть, что соотношение (28) сводится к тождеству (27), если положить $r_1 = r_2 = r_3 = s$, $r_4 = 3s - n$, $l = 2s - k$, $l' = 2s - k'$, $p = 2s - m$.

Доказательство Леммы 2. Мы докажем соотношения Леммы 2, содержащие R^{+1} в левых частях. Их аналоги с R^{-1} в левых частях доказываются абсолютно аналогично.

Второе соотношение в (20):

$$\pi^{(\overline{m})}\hat{\pi}^{(\overline{m})}\pi^{(\overline{m})} = \pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})} = (A^{(s,n)}_{\overline{m}\overline{m}})^2\pi^{(\overline{m})}.$$

Здесь и далее мы обозначаем $\hat{\pi}^{(\overline{m})} \equiv A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}$.

Соотношения (21):

$$\begin{aligned}
\pi^{(\overline{m})}\hat{D}_0^{(n)}\pi^{(\overline{m})} &\overset{(11)}{=} \pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}D_0^{(n)}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})} \\
&\overset{(15)}{=} \theta_n\pi^{(\overline{m})}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1}\pi^{(\overline{m})} \\
&\overset{(10)}{=} \theta_n\xi_{\overline{m}}^{-2}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})} = \theta_n\xi_{\overline{m}}^{-2}A^{(s,n)}_{\overline{m}\overline{m}}\pi^{(\overline{m})}, \\
D_0^{(n)}\hat{\pi}^{(\overline{m})}D_0^{(n)} &= D_0^{(n)}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}D_0^{(n)} \\
&\overset{(10)}{=} \xi_{\overline{m}}^{-2}D_0^{(n)}A^{(s,n)}D_0^{(n)}\pi^{(\overline{m})}D_0^{(n)}A^{(s,n)}D_0^{(n)} \\
&\overset{(15)}{=} \theta_n^2\xi_{\overline{m}}^{-2}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)} \\
&\overset{(11)}{=} \theta_n^2\xi_{\overline{m}}^{-2}(\hat{D}_0^{(n)})^{-1}\pi^{(\overline{m})}(\hat{D}_0^{(n)})^{-1}.
\end{aligned}$$

Первое соотношение в (22) (второе доказывается аналогично):

$$\begin{aligned}
\pi^{(\overline{m})}\hat{\pi}^{(\overline{m})}D_0^{(n)} &= \pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}D_0^{(n)} \\
&= A^{(s,n)}_{\overline{m}\overline{m}}\pi^{(\overline{m})}A^{(s,n)}D_0^{(n)}(A^{(s,n)})^2 \\
&\overset{(15)}{=} \theta_n A^{(s,n)}_{\overline{m}\overline{m}}\pi^{(\overline{m})}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)}(D_0^{(n)})^{-1}A^{(s,n)} \\
&\overset{(10)}{=} \theta_n\xi_{\overline{m}}^{-1}A^{(s,n)}_{\overline{m}\overline{m}}\pi^{(\overline{m})}(\hat{D}_0^{(n)})^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство Леммы 3. При $n=1$ матрицы G, H, J имеют размер 2×2 и соотношения (25) легко проверяются непосредственно с использованием явного вида матрицы $A^{(s,1)}$ (см. (73) в [3]).

Чтобы рассмотреть случай $n\geq 2$, выпишем явно элементы матриц G, H и J:

$$\mathsf{G}_{kk'} = \delta_{kn}\,\delta_{k'n} - A^{(s,n)}_{nk}A^{(s,n)}_{nk'}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}_{kk'} &= \theta_n^{-1}\xi_n(\delta_{kn}\,\xi_{k'}A^{(s,n)}_{nk'} + \delta_{k'n}\,\xi_k A^{(s,n)}_{nk}) \\
&\quad - (\xi_k^{-1}+\xi_{k'}^{-1})\,A^{(s,n)}_{nk}A^{(s,n)}_{nk'},
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\mathsf{J}_{kk'} = (\xi_k\xi_{k'} - \theta_n^2\xi_n^{-2}\xi_k^{-1}\xi_{k'}^{-1})\,A^{(s,n)}_{nk}A^{(s,n)}_{nk'}. \tag{31}$$

Напомним, что $k, k' = 0, 1, \ldots, n$.

Рассматривая (31) для $k = 0$ и $k' = 0, 1$, легко проверить, что $\mathsf{J} \neq 0$, (поскольку $\xi_0^2 \neq \xi_1^2$).

Предположим, что выполняется соотношение

$$\alpha \mathsf{G} + \beta \mathsf{J} - \gamma \mathsf{H} = 0, \tag{32}$$

где $\alpha\beta\gamma \neq 0$. Используя формулы (29)–(31), выпишем матричные элементы (32) для $(k, k') = (0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, разделив их на $A_{nk}^{(s,n)} A_{nk'}^{(s,n)}$ (учитывая, что $A_{nk}^{(s,n)} \neq 0$ для всех k, см. формулу (97) в [3]):

$$\begin{aligned}
&-\alpha + (\xi_0^2 - \theta_n^2 \xi_n^{-2} \xi_0^{-2})\beta + 2\xi_0^{-1}\gamma = 0, \\
&-\alpha + (\xi_0\xi_1 - \theta_n^2 \xi_n^{-2} \xi_0^{-1}\xi_1^{-1})\beta + (\xi_0^{-1} + \xi_1^{-1})\gamma = 0, \\
&-\alpha + (\xi_1^2 - \theta_n^2 \xi_n^{-2} \xi_1^{-2})\beta + 2\xi_1^{-1}\gamma = 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Определитель этой системы уравнений есть

$$d = (\xi_0^{-1} - \xi_1^{-1})^3 (\theta_n^2 \xi_n^{-2} - \xi_0^2 \xi_1^2).$$

Поскольку $\xi_0 \neq \xi_1$, то равенство $d = 0$ может иметь место только при условии

$$\theta_n^2 = \xi_0^2 \xi_1^2 \xi_n^2, \tag{34}$$

что эквивалентно условию

$$\rho(3s - n) + 3\rho(s) - \rho(2s) - \rho(2s-1) - \rho(2s-n) = 2s(2-n) = 0.$$

Таким образом, соотношение (32) не может выполняться при $n \geq 3$.

При $n = 2$ решением системы (33) является набор: $\alpha = \beta^{-1} = \xi_0 + \xi_1$, $\gamma = \xi_0\xi_1$. Прямая проверка, использующая явный вид матрицы $A^{(s,2)}$ (см. (74) в [3]), показывает, что соотношение (32) с такими коэффициентами действительно выполняется. Поскольку при $\gamma = 0$ система (33) решений не имеет, то G и J линейно независимы.

Литература

1. J. S. Birman and H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra.* — Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 249–273.
2. R. Brauer, *On algebras which are connected with the semisimple continuous groups.* — Ann. of Math. (2) **38** (1937), 857–872.

3. А. Г. Быцко, *О $U_q(sl_2)$-инвариантных R-матрицах для старших спинов.* — Алгебра и анализ **17**, No. 3 (2005), 24–46.
4. А. Г. Быцко, *Об одном анзатце для sl_2-инвариантных R-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **335** (2006), 100–118.
5. A. G. Bytsko, *Non–Hermitian spin chains with inhomogeneous coupling.* — arXiv:0911.4476.
6. В. Г. Дринфельд, *Квантовые группы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **155** (1986), 18–49.
7. В. Г. Дринфельд, *О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа.* — Алгебра и анализ **1**, No. 2 (1989), 30–46.
8. A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links.* — In: Adv. Series in Math. Phys., v.7, pp. 285–339 (World Scientific, 1989).
9. П. П. Кулиш и Н. Ю. Решетихин, *Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **101** (1981), 101–110.
10. J. Murakami, *The Kauffman polynomial of links and representation theory.* — Osaka J. of Math. **24** (1987), 745–758.
11. M. Nomura, *Yang–Baxter relation in terms of n–j symbols of $su_q(2)$ algerbra.* — J. Phys. Soc. Jap. **58** (1989), 2694–2704.
12. Е. К. Склянин, *Об одной алгебре, порождаемой квадратичными соотношениями.* — Успехи мат. наук **40** (1985), 214.
13. H. N. V. Temperley and E. H. Lieb, *Relations between the percolation and colouring problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem.* — Proc. Roy. Soc. London Ser. A **322** (1971), 251–280.

Bytsko A. G. On constant $U_q(sl_2)$-invariant R-matrices.

The spectral resolution of a $U_q(sl_2)$–invariant solution R of the constant Yang–Baxter equation in the braid group form is considered. It is shown that, if the two highest coefficients in this resolution are not equal, then R is either the Drinfeld R-matrix or its inverse.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: bytsko@pdmi.ras.ru

Поступило 24 февраля 2010 г.