Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский

СОСТАВНАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА. I

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача реализации заданного обобщенного осциллятора посредством системы из N обобщенных осцилляторов другого типа. Мы будем рассматривать обобщенный осциллятор [1], связанный с фиксированной системой ортогональных полиномов, которые определяются трехчленным рекуррентным соотношением и соответствующей трехдиагональной матрицей Якоби J. Примеры таких осцилляторов, связанных с классическими ортогональными полиномами и их q-аналогами, обсуждались в предшествующих работах авторов (см. [1, 2] и указанные там работы). В работе [3] обсуждалась задача описания осциллятора двумя обобщенными осцилляторами. На примере обычного квантово-механического осциллятора была построена конструкция [3], связывающая представление алгебры исходного стандартного осциллятора с представлениями двух алгебр обобобщеного осцилятора, связанных в рассматриваемом случае с полиномами Лагерра. В настоящей работе мы обсудим случай $N = 3$. Оказалось, что эта задача допускает решение только в двух случаях. В первом из них матрица Якоби, связанная с заданным "составным" обобщенным осциллятором имеет блочно-диагональный вид и состоит из однотипных блоков размера 3×3. Более интересным представляется второй случай, когда матрица Якоби имеет вид (см. $(*)$).

Будет построена мера, которая дает решение проблемы моментов [4] для этой матрицы в случае $b = 1$, $\epsilon = \sqrt{3}$, определена соответствующая система ортогональных многочленов и выписаны явно первые из них. Эта система полиномов разбивается на три серии, связанные с многочленами Чебышева второго рода. Описание соответствующих обобщенных осцилляторов и связь представлений алгебр этих осцил-

---

Ключевые слова : обобщенный осциллятор, ортогональные многочлены, проблема моментов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 09-01-00504 .

$$J = \begin{pmatrix} i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & -i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \\ 0 & 0 & b & i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & -i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & 0 & 0 & \dots \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & i\epsilon & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -i\epsilon & b & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ \\ \dots & & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ляторов будет дана во второй части этой работы. Отметим также, что полная проверка предположения о структуре множества точек накопления корней многочленов будет приведена в дальнейшем.

2. Постановка задачи

Пусть заданы две числовые последовательности $A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ причем $b_n \in \mathbb{R}\ \forall n \geq 0$. Зададим систему полиномов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентным соотношением

$$x\psi_n(x) = b_n\psi_{n+1}(x) + a_n\psi_n(x) + b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \quad \psi_0(x) = 1,\ (b_{-1} = 0). \tag{1}$$

Обозначим $\mathbb{R}_\alpha$ числовую ось, проходящую через начало координат на комплексной плоскости под углом α к вещественной оси $\mathbb{R}_0$. Обозначим J матрицу Якоби, соответствующую рекуррентному соотношению (1):

$$J = \{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}, \quad a_{i,j} = a_i\delta_{i,j} + b_i\delta_{i+1,j} + b_j\delta_{i-1,j}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что проблема моментов для J имеет решение μ^α на $\mathbb{R}_\alpha$ и что все моменты комплекснозначной борелевской меры [6] μ^α конечны:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\alpha} \mu^\alpha(dx) = e^{i\alpha}, \quad \mu_k^\alpha = \int\limits_{\mathbb{R}_\alpha} x^k\mu^\alpha(dx), \quad |\mu_k^\alpha| < \infty, \quad k = 0, 1, \dots . \tag{3}$$

Заметим, что при такой нормировке $|\mu^\alpha(\mathbb{R}_\alpha)| = 1$. В связи с этим будем называть такую меру "вероятностной". Пусть N – натуральное число и $N \geq 2$. В дальнейшем мы будем рассматривать на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ борелевские меры $\mu^{(\alpha,N)}$, носители которых лежат на объединении лучей

$$\mathbb{R}_\alpha^{(N)} = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathbb{R}_{\alpha+2\pi k/N}, \tag{4}$$

и будем предполагать, что условия (3) выполнены на любом из этих лучей.

Меру $\mu^{(\alpha,N)}$ назовем симметричной относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{N}$, если для любого борелевского множества $B_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$ и для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$ выполняется равенство

$$\mu^{(\alpha,N)}(B_\alpha) = \mu^{(\alpha,N)}(e^{i2\pi k/N} B_\alpha). \tag{5}$$

Меру $\mu = \mu^{(\alpha,N)}$ назовем P-симметричной, если для любого $k \geq 0$

$$\mu_k = \int\limits_{\mathbb{R}_\alpha^{(N)}} x^k \mu(dx) = N\mu_k^\alpha, \quad |\mu_0| = 1. \tag{6}$$

Наша цель – показать, что при некоторых условиях на заданные последовательности A и B обобщенный осциллятор (см.[1])[1], связанный с рекуррентными соотношениями (1) и мерой μ^α на $\mathbb{R}_\alpha$ (и соответственно с мерой $\mu^{(\alpha,N)}$ на $\mathbb{R}_\alpha^{(N)}$) можно описать как систему из N, соответствующим образом подобранных, обобщенных осцилляторов. Случай $N = 2$ обсуждался в работе [3]. А именно, была рассмотрена мера, симметричная относительно поворотов на π. Матрица Якоби в этом случае имеет нулевую диагональ, а соответствующие рекуррентные соотношения отвечают так называемому "симметричному" обобщенному осциллятору (см.[1]).

В настоящей работе будет рассмотрен случай $N = 3$.

[1] Строго говоря, понятие обобщенного осциллятора, связанного с системой ортогональных полиномов, было введено в [1] для случая полиномов ортогональных на вещественной оси. Поэтому в нашем случае это понятие требует дополнительного обсуждения, которое в данной работе мы опускаем.

3. Анализ задачи при $N = 3$

В случае $N = 3$ из (1) нетрудно получить соотношения

$$x^3\psi_n(x) = B_n\psi_{n+3}(x) + C_n\psi_{n+2}(x) + D_n\psi_{n+1}(x) + A_n\psi_n(x) \\ + D_{n-1}\psi_{n-1}(x) + C_{n-2}\psi_{n-2}(x) + B_{n-3}\psi_{n-3}(x), \tag{7}$$

где

$$B_n = b_n b_{n+1} b_{n+2}, \quad C_n = b_n b_{n+1}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}), \\ D_n = b_n\left(b_{n-1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}\right), \\ A_n = b_{n-1}^2\left(2a_n + a_{n-1}\right) + b_n^2\left(2a_n + a_{n+1}\right) + a_n^3. \tag{8}$$

Условия на последовательности A и B получим из требования

$$C_n = 0, \quad D_n = 0, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

Заметим, что если при каком-то значении n коэффициент b_{n-1} обращается в нуль, то из (1) следует, что полином $\psi_n(x)$ не может быть определен из предыдущих полиномов $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$. В этом случае матрица Якоби имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & \widehat{J} \end{pmatrix} \tag{10}$$

где J_n – квадратная матрица Якоби порядка n, а для определения полиномов $\psi_{n+k}(x)$, $k = 1, 2, 3\ldots$ по рекурентному соотношению, соответствующему матрице $\widehat{J}$, следует дополнительно задать полином $\psi_n(x)$.

Рассмотрим первое из условий (9). Из (8) следует, что для того чтобы $C_n = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0; \tag{11a}$$

$$b_n b_{n+1} = 0. \tag{11b}$$

Рассмотрим сначала случай, когда соотношение (11a) справедливо при всех $n \geq 0$. Это требование налагает на коэффициенты a_n условие периодичности

$$a_{n+3} = a_n, \quad \forall n \geq 0. \tag{12}$$

Обозначим

$$a_0 = \alpha_0,\, a_1 = \beta_0,\, a_2 = \gamma_0, \tag{13}$$

так что из (11a) следует

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 0. \tag{14}$$

Вычитая из матрицы Якоби J матрицу $\gamma_0 I$, (что дает сдвиг спектра J на γ_0), можно без ограничения общности считать $\gamma_0 = 0$ и тогда $\alpha_0 = -\beta_0$, т.е. имеем

$$a_0 = \alpha_0,\, a_1 = -\alpha_0, a_2 = 0. \tag{15}$$

Тогда, согласно соотношению (8), для того чтобы $D_n = 0$ достаточно, что бы выполнялось хотя бы одно из условий

$$b_n = 0; \tag{16a}$$

$$\left(b_{n-1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}\right) = 0. \tag{16b}$$

Если $b_0 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, то из (15) и (16b) следует, что

$$\alpha_0 = \epsilon_0 i, \quad \epsilon_0 \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b_2 = 0. \tag{17}$$

Следовательно при $n = 2$ соотношение (16b) может не выполняться и мы получаем $b_3^2 + b_1^2 > 0$. Итак, можно считать, что $b_3 \neq 0$.

Так как при $n = 1$ соотношение (11b) выполнено, то (11a) может не выполняться, что дает $-\alpha_0 + a_3 \neq 0$ и равенство $a_3 = \alpha$ не обязано выполняться. При $n = 2$ имеем $a_3 + a_4 \neq 0$ и, следовательно, $a_4 \neq -a_3$.

Далее при $n = 3$ так как $b_3 \neq 0$, то из (11a) следует

$$a_3 + a_4 + a_5 = 0. \tag{18}$$

Пусть теперь $a_3 = \alpha_1$, $a_4 = \beta_1$, $a_5 = \gamma_1$. В этом случае не удается избавиться от γ_1 с помощью сдвига. Считая $b_3 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$ из (16b) и (18) получаем соотношение $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 = -\epsilon^2$, так что α_1 и β_1 не могут быть вещественными одновременно, и

$$b_5 = 0 \tag{19}$$

Повторяя эти рассуждения, приходим к выводу, что матрица J имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & \dots \\ 0 & J_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \tag{20}$$

с блоками

$$J_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & b_{3k} & 0 \\ b_{3k} & \beta_k & b_{3k+1} \\ 0 & b_{3k+1} & -(\alpha_k + \beta_k) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

причем

$$b_{3k+1}^2 = -b_{3k}^2 + \epsilon_k^2, \quad \epsilon_k^2 = -(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k \beta_k). \tag{22}$$

Отметим, что если (11a) выполняется при всех $n \geq 0$, то (после сдвига $J \to J - \gamma_0 I$) имеем

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = -\alpha, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+3} = a_n, \tag{23}$$

т.е. $J_k = J_0$ при всех $k \geq 0$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть (11a) выполнено для всех n, а условие $D_n = 0$ не выполняется при $n = 0$, т.е.

$$D_0 \neq 0. \tag{24}$$

Если (23) выполнено, то из (24) следует что b_0 и b_1 принимают произвольные ненулевые значения. Из условия $D_1 = 0$ при $\alpha = i\epsilon$ получаем

$$b_2^2 = -\alpha^2 - b_0^2 - b_1^2. \tag{25}$$

Из условия $D_2 = 0$ следует

$$b_3^2 = b_0^2. \tag{26}$$

Наконец из условия $D_3 = 0$ имеем

$$b_4^2 = b_1^2. \tag{27}$$

Далее, из $D_4 = 0$ следует $b_5^2 = b_2^2$. Продолжая рассмотрение, получаем

$$\begin{aligned} &b_0^2;\ b_1^2;\ b_2^2 = \epsilon^2 - b_0^2 - b_1^2;\ b_3^2 = b_0^2;\ b_4^2 = b_1^2; \\ &b_5^2 = b_2^2; \dots, b_{3n+j}^2 = b_j^2; j = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{28}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & J^- & \mathbb{O} & \dots \\ J^+ & J_1 & J^- & \dots \\ \mathbb{O} & J^+ & J_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где

$$J_1 = \begin{pmatrix} i\epsilon & b_0 & 0 \\ b_0 & -i\epsilon & b_1 \\ 0 & b_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

а $\mathbb{O}$ – нулевая 3×3-матрица.

Вычислим спектр матрицы Якоби (20). Обозначим

$$\kappa_k = \alpha_k^3 + b_{3k}^2(2\alpha_k + \beta_k); \quad \rho_k = |\gamma_k|, \quad \phi_k = \arg\gamma_k. \tag{31}$$

Учитывая условия (22), собственные значения матрицы J_k можно записать в виде

$$\lambda_s^{(k)} = \sqrt[3]{\rho_k}\exp(i\frac{\phi_k + 2\pi s}{3}), \quad s = 0, 1, 2. \tag{32}$$

Следовательно, спектр $\left\{\lambda_s^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, матрицы J симметричен относительно поворотов на $2\pi/3$.

Нам представляется, что случай, соответствующий матрице Якоби (29), более интересен, и мы рассмотрим его подробно на конкретном примере, когда

$$b_0 = b_1 = b_2 = 1, \quad \epsilon = \sqrt{3}, \tag{33}$$

т.е. далее мы будем рассматривать матрицу Якоби $\widetilde{J}$ вида

$$\widetilde{J} = \{a_{k,j}\}_{k,j=0}^{\infty}, \quad a_{k,j} = a_k\delta_{k,j} + \delta_{k+1,j} + \delta_{k-1,j},$$

где

$$a_0 = i\sqrt{3}, \quad a_1 = -i\sqrt{3}, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+3} = a_n, \quad n \geq 0. \tag{34}$$

Отметим, что в отличие от первого случая, связанного с матрицей Якоби (20), решение проблемы моментов для матрицы Якоби $\widetilde{J}$ является нетривиальной задачей.

4. Решение проблемы моментов для матрицы Якоби $\widetilde{J}$

Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ задается формулами (34), а последовательность $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ состоит из единиц ($b_n = 1,\ \forall n \geq 0$). Определим систему полиномов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, порождаемую рекуррентным соотношением

$$x\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) + a_n\psi_n(x) + \psi_{n-1}(x), \quad \psi_0(x) = 1. \tag{35}$$

Имеем

$$\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = x - i\sqrt{3},\ \psi_2(x) = x^2 + 2,\ \psi_3(x) = x^3 + x + i\sqrt{3},$$
$$\psi_4(x) = x^4 - i\sqrt{3}x^3 + 1,\ \psi_5(x) = x^5 + 2x^3,$$
$$\psi_n(x) = x^3\psi_{n-3}(x) - \psi_{n-6}(x),\ n \geq 6.$$

Приведем явный вид первых многочленов из этого семейства

$$\begin{aligned}
\psi_6(x) &= x^6 + x^4 + i\sqrt{3}x^3 - 1;\\
\psi_7(x) &= x^7 - i\sqrt{3}x^6 + x^3 - x + i\sqrt{3};\\
\psi_8(x) &= x^8 + 2x^6 - x^2 - 2;\\
\psi_9(x) &= x^9 + x^7 + i\sqrt{3}x^6 - 2x^3 - x - i\sqrt{3};\\
\psi_{10}(x) &= x^{10} - i\sqrt{3}x^9 + x^6 - 2x^4 + 2i\sqrt{3}x^3 - 1;\\
\psi_{11}(x) &= x^{11} + 2x^9 - 2x^5 - 4x^3;\\
\psi_{12}(x) &= x^{12} + x^{10} + i\sqrt{3}x^9 - 3x^6 - 2x^4 - 2i\sqrt{3}x^3 + 1;\\
\psi_{13}(x) &= x^{13} - i\sqrt{3}x^{12} + x^9 - 3x^7 + 3i\sqrt{3}x^6 - 2x^3 + x - i\sqrt{3};\\
\psi_{14}(x) &= x^{14} + 2x^{12} - 3x^8 - 6x^6 + x^2 + 2;\\
\psi_{15}(x) &= x^{15} + x^{13} + i\sqrt{3}x^{12} - 4x^9 - 3x^7 - 3i\sqrt{3}x^6 + 3x^3 + x + i\sqrt{3};
\end{aligned} \tag{36}$$

Соотношение (36) указывает, что эти полиномы целесообразно разбить на три серии

$$a)\,\psi_{3k}(x); \quad b)\,\psi_{3k+1}(x); \quad c)\,\psi_{3k+2}(x); \quad k \geq 0,$$

причем

$$\psi_{3m+k}(x) = \phi_{m-1}(x^3)\psi_{3+k}(x) - \phi_{m-2}(x^3)\psi_k(x) \quad m \geq 2,\ k = 0, 1, 2, \tag{37}$$

где многочлены $\phi_n(t)$ с рекуррентными соотношениями

$$t\phi_n(t) = \phi_{n+1}(t) + \phi_{n-1}(t), \quad \phi_0(t) = 1, \tag{38}$$

суть обычные многочлены Чебышева $\phi_n(t) = U_n(t/2)$ второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нетрудно показать, что все нули полиномов $\psi_{3k+2}(x)$, $k \geq 2$, кроме $x = \pm\sqrt{2}\,i$ лежат в круге $|x| \leq \sqrt[3]{2}$ на лучах $\arg(x) = 0, \pi, \pm\pi/3, \pm 2\pi/3$. Действительно, для любого x, такого что $\psi_{3k+2}(x) = 0$ из соотношения (37) следует, что

$$\psi_{3k+2}(x) = \phi_k(x^3)\psi_3(x) = 0.$$

Корни полинома $\psi_5(x)$ равны $x_{1,2,3} = 0$, $x_{4,5} = \pm\sqrt{2}\,i$. Все остальные корни многочленов $\psi_{3k+2}(x)$ являются корнями полиномов Чебышева $U_{k-1}(\frac{x^3}{2})$. Известно, что все корни полиномов Чебышева вещественны и лежат на промежутке $[-1, 1]$. Тогда $|x| \leq \sqrt[3]{2}$ и так как x^3 – вещественное число при $\arg(x) = \pm\pi/3, \pi$ $(x^3 < 0)$ и $\arg(x) = \pm 2\pi/3, 0\,(x^3 > 0)$, то сформулированное выше утверждение доказано.

Мы будем предполагать, что предельные точки множества нулей всех рассматриваемых полиномов лежат на $\mathbb{R}^{(3)} = \mathbb{R}_0^{(3)} \cup \mathbb{R}_{\pi/2}^{(3)}$ и поэтому носитель меры ортогональности этих полиномов также лежит на $\mathbb{R}^{(3)}$. Он изображен на Рис. 1 ниже. Исследованию асимптотических свойств нулей многочленов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}(x)$ будет посвящена отдельная работа.

Будем решать проблему моментов для матрицы Якоби (34) в пространстве $\widetilde{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^{(3)})$ квадратично суммируемых функций по некоторой комплекснозначной борелевской мере $\mu = \mu_{(0;3)} + \mu_{(\pi/2;3)}$. Будем предполагать, что все моменты этой меры конечны

$$\mu_k = \int\limits_{\mathbb{R}^{(3)}} x^k \mu(dx), \quad |\mu_k| < \infty, \quad k \geq 0, \tag{39}$$

$$\mu_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^{(3)}} \mu(dx) = 1. \tag{40}$$

Будем предполагать также, что носитель меры μ симметричен относительно поворотов на $\frac{2\pi}{3}$ и что меры $\mu_{(0;3)}$ и $\mu_{(\pi/2;3)}$ P-симметричны (и, следовательно мера μ также P-симметрична).

Полиномы $\psi_n(x)$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (35), ортонормированы в $\widetilde{L}^2(\mathbb{R}^{(3)})$ следующим образом

$$(\psi_m(x), \psi_n(x))_{\widetilde{L}^2} = (-1)^n \delta_{m,n}, \tag{41}$$

Из этих соотношений и (39)–(40), единственным образом находим моменты $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Моменты с нечетным номером вычисляются по формуле

$$\mu_{2n+1} = i(-2)^n\sqrt{3}. \tag{42}$$

Моменты с четными номерами вычисляются по более сложной формуле. Для ее вывода приведем первые из них, используя числа Каталана [5] $c_s = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!}$.

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= 1\\
\mu_2 &= -2\\
\mu_4 &= (-2)(-2)+c_1 = 5\\
\mu_6 &= (-2)^3+(-2)c_1 = -10\\
\mu_8 &= (-2)^4+(-2)^2c_1 = 20\\
\mu_{10} &= (-2)^5+(-2)^3c_1+c_2 = -39\\
\mu_{12} &= (-2)^6+(-2)^4c_1+(-2)c_2 = 78\\
\mu_{14} &= (-2)^7+(-2)^5c_1+(-2)^2c_2 = -156\\
\mu_{16} &= (-2)^8+(-2)^6c_1+(-2)^3c_2+c_3 = 314\\
\mu_{18} &= (-2)^9+(-2)^7c_1+(-2)^4c_2+(-2)c_3 = -628\\
\mu_{20} &= (-2)^{10}+(-2)^8c_1+(-2)^5c_2+(-2)^2c_3 = 1256
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что справедливы соотношения

$$\mu_{6k} = (-2)^{3k} + \frac{1}{4}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s, \tag{43}$$

$$\mu_{6k+2} = (-2)^{3k+1} - \frac{1}{2}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s, \tag{44}$$

$$\mu_{6k+4} = (-2)^{3k+2} - (1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k}(-2)^{3s}c_s, \tag{45}$$

так что

$$\mu_{2n} = \mu_{2(3k+j)} = (-2)^n + (-2)^{j-2}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s + c_k\delta_{j,2},$$
$$j = 0, 1, 2,\ k \geq 0. \tag{46}$$

Надо рассмотреть проблему моментов для последовательности моментов μ_n, определяемых формулами (42) и (46). С этой целью представим меру в виде

$$\mu = \mu^{\mathrm{even}} + \mu^{\mathrm{odd}}. \tag{47}$$

Мера μ^{even} определена на $\mathbb{R}^{(3)}$ так, что для любого борелевского множества B_+^α, целиком лежащего на правой полуоси $\mathbb{R}_+^\alpha$ и борелевского множества B_-^α симметричного множеству B_+^α относительно начала координат имеет место равенство

$$\mu^{\mathrm{even}}(B_+^\alpha) = \mu^{\mathrm{even}}(B_-^\alpha), \quad \alpha = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}.$$

Аналогично определим меру μ^{odd} на $\mathbb{R}^{(3)}_{\pi/2}$ так, что для любого борелевского множества B_+^α, целиком лежащего на $\mathbb{R}_+^\alpha$ и борелевского множества B_-^α симметричного множеству B_+^α относительно начала координат имеет место равенство

$$\mu^{\mathrm{odd}}(B_+^\alpha) = -\mu^{\mathrm{odd}}(B_-^\alpha), \qquad \alpha = \frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}, \qquad \mu^{\mathrm{odd}}(0) = 0.$$

Из (46) и (47) для моментов получаем соотношения

$$\mu_k = \mu_k^{\mathrm{even}} + \mu_k^{\mathrm{odd}}, \text{ причем } \mu_{2l+1}^{\mathrm{even}} = 0, \quad \mu_{2l}^{\mathrm{odd}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots .$$

Это означает, что

$$\mu_{2l} = \mu_{2l}^{\mathrm{even}}, \quad \mu_{2l+1} = \mu_{2l+1}^{\mathrm{odd}},$$

так что μ^{even} определяется по моментам с четными номерами, а μ^{odd} по моментам с нечетными номерами.

Построим сначала дискретную P-симметричную меру μ^{odd} с носителем

$$\operatorname{supp}(\mu^{\mathrm{odd}}) = \{z_p\}_{p=0}^5, \quad z_p = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{p\pi}{3}\right)}, \quad p = 0, 1, \dots, 5. \tag{48}$$

Обозначим σ_p нагрузки в точках z_p, которые в силу нечетности меры удовлетворяют условиям

$$\sigma_0 = -\sigma_3, \quad \sigma_1 = -\sigma_4, \quad \sigma_2 = -\sigma_5, \tag{49}$$

и ищутся в виде

$$\sigma_p = \sum_{s=0}^{2} \sigma_p^{(s)}, \quad \sigma_p^{(0)} = C_p^{(0)}, \quad \sigma_p^{(1)} = C_p^{(1)} z_p^{-2}, \quad \sigma_p^{(2)} = C_p^{(2)} z_p^2. \tag{50}$$

Последовательность моментов $\{\mu_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ разобьем на три серии

$$\{\mu_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\mu_{2n+1}^{I}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{II}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{III}\right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{51}$$

где

$$\mu_{2n+1}^{I} = \mu_{6k+1}, \ (n = 3k); \quad \mu_{2n+1}^{II} = \mu_{6k+3}, \ (n = 3k+1);$$
$$\mu_{2n+1}^{III} = \mu_{6k+5}, \ (n = 3k+2).$$

Введем обозначения

$$\mu_{6k+2j+1}^{(s)} = \sum_{p=0}^{5} z_p^{6k+2j+1} \sigma_p^{(s)}, \quad \mu_{6k+2j+1,+}^{(s)} = z_0^{6k+2j+1} \sigma_0^{(s)}. \tag{52}$$

Для P-симметричности меры μ^{odd} достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\mu_{6k+2j+1}^{(s)} = 6\delta_{j,s} \mu_{6k+2j+1,+}^{(s)}, \quad j, s = 0, 1, 2. \tag{53}$$

Для нахождения нагрузок σ_p, определяемых равенствами (49) и (50) достаточно решить систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{2} z_{2m}^{6k+2j+1} \sigma_{2m}^{(s)} = \delta_{j,s} \frac{1(-2)^n \sqrt{3}}{2} i. \tag{54}$$

Подставляя в (54) выражения $\sigma_p^{(s)}$ через $C_p^{(s)}$ по формулам (50) получим систему из девяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_{2m}^{(s)}$, которая распадается на три системы

$$\begin{cases} iC_0^{(0)} + e^{i7\pi/6} C_2^{(0)} + e^{-i\pi/6} C_4^{(0)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} i, \\ C_0^{(0)} + C_2^{(0)} + C_4^{(0)} = 0, \\ iC_0^{(0)} + e^{-i\pi/6} C_2^{(0)} + e^{i7\pi/6} C_4^{(0)} = 0; \end{cases} \tag{55}$$

$$\begin{cases} iC_0^{(1)} + e^{-i\pi/6}C_2^{(1)} + e^{i7\pi/6}C_4^{(1)} = 0, \\ C_0^{(1)} + C_2^{(1)} + C_4^{(1)} = 0, \\ iC_0^{(1)} + e^{i7\pi/6}C_2^{(1)} + e^{-i\pi/6}C_4^{(1)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i; \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} iC_0^{(2)} + e^{-i\pi/6}C_2^{(2)} + e^{i7\pi/6}C_4^{(2)} = 0, \\ C_0^{(2)} + C_2^{(2)} + C_4^{(2)} = 0, \\ iC_0^{(2)} + e^{i7\pi/6}C_2^{(2)} + e^{-i\pi/6}C_4^{(2)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}i; \end{cases} \tag{57}$$

Решая эти системы находим

$$C_0^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad C_2^{(0)} = -e^{i\pi/3}\frac{1}{2\sqrt{6}}, \quad C_4^{(0)} = -e^{i5\pi/3}\frac{1}{2\sqrt{6}}, \tag{58}$$

$$C_0^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad C_2^{(1)} = -e^{-i2\pi/3}\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad C_4^{(1)} = -e^{i2\pi/3}\frac{1}{\sqrt{6}}, \tag{59}$$

$$C_0^{(2)} = -\frac{1}{4\sqrt{6}}, \quad C_2^{(2)} = -e^{i4\pi/3}\frac{1}{4\sqrt{6}}, \quad C_4^{(2)} = -e^{i2\pi/3}\frac{1}{4\sqrt{6}}; \tag{60}$$

Нетрудно проверить что для построенной в результате меры μ^{odd} выполняются соотношения (53), т.е. она является P-симметричной.

Перейдем теперь к построению четной P-симметричной меры μ^{even} с носителем на $\mathbb{R}_0^{(3)}$. Формулу (46) представим в виде

$$\mu_{2n} = \mu_{2(3k+j)} = (-2)^n + (-2)^{j-2}\epsilon_{k,j} \sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1} (-8)^{k-s} c_s. \tag{61}$$

где

$$\epsilon_{k,j} = 1 - \delta_{k,0}(1-\delta_{j,2}) = \begin{cases} 1 & \text{если}\, k \geq 1 \quad \text{или} \quad k=0,\, j=2, \\ 0 & \text{если}\, k=0,\, j=0,1. \end{cases} \tag{62}$$

Нетрудно проверить справедливость интегрального представления чисел Каталана

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 \left(y^n \sqrt{\frac{4-y}{y}} \right) dy. \tag{63}$$

Действительно замена $t = \sqrt{\frac{4-y}{y}}$ превращает интеграл в правой части (63) в

$$2\int\limits_0^\infty 4^{n+1}\frac{t^2}{(t^2+1)^n}\,dt = 2\cdot 4^{n+1}(I_{n+1}-I_{n+2}) \tag{64}$$

где интеграл I_n несложно вычислить, применяя теорию вычетов, что дает

$$I_n = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \tag{65}$$

Подставив (64) и (65) в (63), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^4\left(y^n\sqrt{\frac{4-y}{y}}\right)dy\\
&= 2^{2n+1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right) = 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right)\\
&= 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = 2^n\frac{(2n-1)!!n!}{(n+1)!n!} == \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = c_n,
\end{aligned} \tag{66}$$

что доказывает формулу (63).

Используя доказанную формулу перепишем (61) в виде

$$\mu_{2n} = (-2)^n + \frac{(-2)^{j-2}}{2\pi}\epsilon_{k,j}\int\limits_0^4\sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1}(-8)^k\left(\frac{y}{-8}\right)^s\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy. \tag{67}$$

Напомним, что $n = 3k+j, \quad j = 0,1,2$. Учитывая соотношение

$$\sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1}(-8)^k\left(\frac{y}{-8}\right)^s = \frac{8(-8)^k}{y+8} + (-1)^{1-\delta_{j,2}}\frac{8^{1-\delta_{j,2}}y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8}.$$

перепишем (67) в виде

$$\mu_{2n} = (-2)^n + \frac{(-2)^{j-2}}{2\pi}\epsilon_{k,j}\left[(-2)^{3k}\int_0^4 \frac{8}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy+\right.$$
$$\left.+(-1)^{1-\delta_{j,2}}\int_0^4 \frac{8^{1-\delta_{j,2}}y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy\right]$$
$$= (-2)^n\left(1+\frac{\epsilon_{k,j}}{\pi}\int_0^4 \frac{1}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy\right)$$
$$+\frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi}\epsilon_{k,j}\int_0^4 \frac{y^k}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy$$

Введем следующее обозначение

$$A_{k+1} = \int_0^4 \frac{y^k}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy, \tag{69}$$

так что $A_1 = \pi(\sqrt{3/2}-1)$. Обозначим также

$$\widetilde{\mu}_{2n} = (-2)^n\left(1+\frac{A_1}{\pi}\epsilon_{k,j}\right), \quad \widehat{\mu}_{2n} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi}\epsilon_{k,j}A_{k+1}. \tag{70}$$

В этих обозначениях имеем

$$\mu_{2n} = \widetilde{\mu}_{2n} + \widehat{\mu}_{2n}, \quad n \geq 0. \tag{71}$$

Далее имеем $(n = 3k+j)$

$$\widehat{\mu}_{2n} = \frac{A_1}{\pi}\delta_{n,0} - \frac{2}{\pi}A_1\delta_{n,1} + \mu_{2n}^{\text{cont}}; \quad n \geqslant 0, \tag{72}$$

$$\mu_{2n}^{\text{cont}} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}\,2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi}\,A_{k+1}, \quad n \geqslant 0, \tag{73}$$

$$\widetilde{\mu}_{2n} = -\frac{A_1}{\pi}\delta_{n,0} + \frac{2}{\pi}A_1\delta_{n,1} + \mu_{2n}^{\text{disc}} \quad n \geqslant 0, \tag{74}$$

$$\mu_{2n}^{\text{disc}} = (-2)^n(1+\frac{A_1}{\pi}) = (-2)^n\sqrt{3/2}, \quad n \geqslant 0. \tag{75}$$

В результате имеем

$$\mu_{2n} = \mu_{2n}^{\rm cont} + \mu_{2n}^{\rm disc}. \qquad (76)$$

Перейдем к построению мер, отвечающим трем слагаемым в разложении (76). Начнем с рассмотрения дискретной P-симметричной меры $\mu_{\rm disc}^{\rm even}$, соответствующей моментам $\mu_{2n}^{\rm disc}$. Это построение аналогично приведенному выше построению дискретной меры $\mu^{\rm odd}$. Носитель меры $\mu_{\rm disc}^{\rm even}$ совпадает с носителем меры $\mu^{\rm odd}$ (см. (48)). Нагрузки в точках z_p обозначим σ'_p. В силу четности они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma'_0 = \sigma'_3, \quad \sigma'_1 = \sigma'_4, \quad \sigma'_2 = \sigma'_5, \qquad (77)$$

и ищутся в виде

$$\sigma'^{(s)} = \sum_{p=0}^{2} {\sigma'}_p^{(s)}, \quad (s = 0, 1, 2), \qquad (78)$$

$${\sigma'}_p^{(0)} = D_p^{(0)}, {\sigma'}_p^{(1)} = D_p^{(1)}(z_p)^{-2}, \, {\sigma'}_p^{(2)} = D_p^{(2)}(z_p)^2. \qquad (79)$$

Как и выше, разобьем последовательность моментов $\{\mu_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ на три серии

$$\{\mu_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\mu_{2n}^{I}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n}^{II}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n}^{III}\right\}_{n=0}^{\infty}, \qquad (80)$$

где

$$\mu_{2n}^{I} = \mu_{6k}, \, (n = 3k); \; \mu_{2n}^{II} = \mu_{6k+2}, \, (n = 3k+1);$$
$$\mu_{2n}^{III} = \mu_{6k+4}, \, (n = 3k+2).$$

Введем обозначение

$$\mu_{6k+2j}^{(s)} = \sum_{p=0}^{5} z_p^{6k+2j} {\sigma'}_p^{(s)}, \quad \mu_{6k+2j,+}^{(s)} = z_0^{6k+2j} {\sigma'}_0^{(s)}. \qquad (81)$$

Достаточным условием P-симметричности меры $\mu_{\rm disc}^{\rm even}$ является соотношение

$$\mu_{6k+2j}^{(s)} = 6\delta_{j,s}\mu_{6k+2j,+}^{(s)}, \quad j, s = 0, 1, 2. \qquad (82)$$

Для нахождения нагрузок σ'_p, определяемых равенствами (79) достаточно решить систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{2} z_{2m}^{6k+2j} {\sigma'}_{2m}^{(s)} = \delta_{j,s} \, \frac{1}{2}\sqrt{3/2}(-2)^n; \quad n = 3k + j, \quad j, s = 0, 1, 2. \qquad (83)$$

Подставляя в (83) выражения ${\sigma'}_p^{(s)}$ через $D_p^{(s)}$ по формулам (79) получим систему из девяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $D_{2m}^{(s)}$, которая распадается на три независимые системы для 3-х неизвестных. Эти системы имеют вид

$$\begin{cases} D_0^{(0)} + D_2^{(0)} + D_4^{(0)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ D_0^{(0)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(0)} + e^{i2\pi/3} D_4^{(0)} = 0, \\ D_0^{(0)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(0)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(0)} = 0; \end{cases} \tag{84}$$

$$\begin{cases} D_0^{(1)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(1)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(1)} = 0, \\ D_0^{(1)} + D_2^{(1)} + D_4^{(1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ D_0^{(1)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(1)} + e^{i2\pi/3} D_4^{(1)} = 0; \end{cases} \tag{85}$$

$$\begin{cases} D_0^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(2)} = 0, \\ D_0^{(2)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(2)} = 0, \\ D_0^{(2)} + D_2^{(2)} + D_4^{(2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \end{cases} \tag{86}$$

Решая эти системы находим

$$D_0^{(0)} = D_2^{(0)} = D_4^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \tag{87}$$

$$D_0^{(1)} = D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \tag{88}$$

$$D_0^{(2)} = D_2^{(2)} = D_4^{(2)} = \frac{1}{4\sqrt{6}}; \tag{89}$$

Нетрудно проверить, что для построенной в результате меры $\mu_{\mathrm{disc}}^{\mathrm{even}}$ выполняются соотношения (82), т.е. она является P-симметричной.

Перейдем к построению четной непрерывной P-симметричной меры $\mu_{\mathrm{cont}}^{\mathrm{even}}$, отвечающей моментам μ_{2n}^{cont} (75):

$$\mu_{2n}^{\mathrm{cont}} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}\, 2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi} \int\limits_0^4 \frac{y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8} \sqrt{\frac{4-y}{y}}\, dy, \tag{90}$$

где $n = 3k + j$, $k \geq 0$, $j = 0, 1, 2$. Замена $y = t^6$ преобразует (90) в

$$\mu_{2n}^{\text{cont}} = 6(-2)^{j-\delta_{j,2}-1} 2^{1-2\delta_{j,2}} \int\limits_0^{\sqrt{[3]2}} t^{2n} t^{-2j+6\delta_{j,2}} f(t)\, dt, \tag{91}$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\pi(8+t^6)} \sqrt{\frac{4-t^6}{t^6}} t^5. \tag{92}$$

Введя обозначения

$$b(t) = \sum_{j=0}^{2} b_j(t), \quad b_j(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad j = 0 \\ \dfrac{2}{t^2} & \text{при} \quad j = 1 \\ \dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad j = 2, \end{cases} \tag{93}$$

$$F_+(t) = \sum_{j=0}^{2} F_+^{(j)}(t), \quad F_+^{(j)}(t) = b_j(t) f(t) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}, \tag{94}$$

где $\chi_{[a,b]}$ – характеристическая функция промежутка $[a, b]$, мы можем переписать (92) в виде

$$\mu_{2n}^{\text{cont}} = \int\limits_{\mathbb{R}_0^{(3)}} x^{2n} \mu_{\text{cont}}^{\text{even}}(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}_0^{(3)}} x^{2n} F(x)\, dx = 6 \int\limits_0^{\infty} x^{2n} F_+(x)\, dx. \tag{95}$$

Последовательность моментов $\left\{\mu_{2n+1}^{\text{cont}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ разобьем на три серии

$$\left\{\mu_{2n+1}^{\text{cont}}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\mu_{2n+1}^{cI}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{cII}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{cIII}\right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{96}$$

где

$$\mu_{2n}^{cI} = \mu_{6k},\ (n = 3k); \quad \mu_{2n}^{cII} = \mu_{6k+2},\ (n = 3k+1);$$
$$\mu_{2n}^{cIII} = \mu_{6k+4},\ (n = 3k+2).$$

Введем обозначения

$$\mu_{6k+2j}^{c,(s)} = \int \mathbb{R}_0^{(3)} x^{6k+2j} \mu_{cont(s)}^{\text{even}}(dx), \quad \mu_{6k+2j,+}^{c,(s)} = \int\limits_0^{\infty} x^{6k+2j} F_+^{(s)}(x) dx. \tag{97}$$

Достаточным условием P-симметричности меры $\mu^{\rm even}_{\rm cont}$ является соотношение

$$\mu^{c,(s)}_{6k+2j} = 6\delta_{j,s}\mu^{c,(s)}_{6k+2j,+}, \quad j,s=0,1,2. \tag{98}$$

Следует рассмотреть три случая $s=0,1,2$.

1 $\underline{s=0}$.

С учетом (97) имеем

$$\mu^{c,(0)}_{2n} = I^{(0)}_{0,n} + I^{(0)}_{1,n} + I^{(0)}_{2,n}, \tag{99}$$

где

$$I^{(0)}_{0,n} = \int\limits_{\mathbb{R}_0} x^{2n}\mu^{\rm even}_{{\rm cont}(0)}(dx), \quad I^{(0)}_{1,n} = \int\limits_{\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}} x^{2n}\mu^{\rm even}_{{\rm cont}(0)}(dx),$$
$$I^{(0)}_{2,n} = \int\limits_{\mathbb{R}_{e^{-i2\pi/3}}} x^{2n}\mu^{\rm even}_{{\rm cont}(0)}(dx). \tag{100}$$

Вычислим эти интегралы при $a)\, n=3k$, $\quad b)\, n=3k+1$, $\quad c)\, n=3k+2$.

$\underline{\mathbf{a})\ j=0,\ n=3k}$.

Обозначим $x=ye^{i\alpha}$ на $\mathbb{R}_\alpha$. Учитывая (91)–(94), (97) и четность функции $F^{(0)}(x)$ получаем

$$\begin{aligned} I^{(0)}_{0,3k} &= \int\limits_{\mathbb{R}_0} y^{6k}F^{(0)}(y)dy = 2\int\limits_0^\infty y^{6k}F^{(0)}_+(y)dy \\ &= 2\int\limits_0^\infty y^{6k}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt{[3]2}]}dy = 2\mu^{c,(0)}_{6k,+}. \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned} I^{(0)}_{1,3k} &= \int\limits_{\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}} y^{6k}e^{6(i2\pi/3)}(-1)f(ye^{i2\pi/3})\chi_{[0,\sqrt{[3]2}]}d\left(e^{i2\pi/3}y\right) \\ &= 2\int\limits_0^\infty y^{6k}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt{[3]2}]}dy = 2\mu^{c,(0)}_{6k,+}. \end{aligned} \tag{102}$$

$$I_{2,3k}^{(0)} = \int\limits_{\mathbb{R}_{e^{-i2\pi/3}}} y^{6k} e^{6(-i2\pi/3)}(-1) f(ye^{-i2\pi/3}) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]} d\left(e^{-i2\pi/3} y\right)$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{6k}(-1) f(y) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]} dy = 2\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \tag{103}$$

Итак

$$\mu_{6k}^{c,(0)} = 6\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \tag{104}$$

b) $j = 1$, $n = 3k + 1$.

Аналогично (102)–(103) имеем

$$I_{0,3k+1}^{(0)} = 2\int\limits_0^\infty y^{6k+2}(-1) f(y) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]} dy; \tag{105}$$

$$I_{1,3k+1}^{(0)} = 2\int\limits_0^\infty y^{6k+2} e^{i4\pi/3}(-1) f(y) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]} dy; \tag{106}$$

$$I_{2,3k+1}^{(0)} = 2\int\limits_0^\infty y^{6k+2} e^{-i4\pi/3}(-1) f(y) \chi_{[0,\sqrt[3]{2}]} dy; \tag{107}$$

Учитывая, что $1 + e^{i4\pi/3} + e^{-i4\pi/3} = 0$ и (99) получаем

$$\mu_{6k+2}^{c,(0)} = I_{0,3k+1}^{(0)} + I_{1,3k+1}^{(0)} + I_{2,3k+1}^{(0)} = 0. \tag{108}$$

c) $j = 2$, $n = 3k + 2$.

Точно также, как и выше, получаем

$$\mu_{6k+4}^{c,(0)} = I_{0,3k+2}^{(0)} + I_{1,3k+2}^{(0)} + I_{2,3k+2}^{(0)} = 0. \tag{109}$$

Из формул (104), (108) и (109) следует

$$\mu_{6k+2j}^{c,(0)} = 6\delta_{j,0}\mu_{6k+2j,+}^{c,(0)}. \tag{110}$$

Перейдем к рассмотрению второго случая.

2 $s = 1$.

Для $j = 0$ имеем

$$\mu_{6k}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy + 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}e^{-i4\pi/3}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}e^{i4\pi/3}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy = 0. \qquad (111)$$

Для $j = 1$ имеем

$$\mu_{6k+2}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy + 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy = 6\mu_{6k+2,+}^{c,(1)}. \qquad (112)$$

Наконец, при $j = 2$ имеем

$$\mu_{6k+4}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy + 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}e^{i4\pi/3}F_+^{(1)}(y)dy$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}e^{-i4\pi/3}F_+^{(1)}(y)dy = 0. \qquad (113)$$

Следовательно,

$$\mu_{6k+2j}^{c,(1)} = 6\delta_{j,1}\mu_{6k+2j,+}^{c,(1)}. \qquad (114)$$

Аналогично рассматривается и третий случай.

3 $s = 2$.

Имеем

$$\mu_{6k+2j}^{c,(2)} = 6\delta_{j,2}\mu_{6k+2j,+}^{c,(2)}. \qquad (115)$$

Из полученных соотношений (110), (114) и (115) следует справедливость (98).

Итак, построена четная, непрерывная P-симметричная мера с носителем, лежащим на $\mathbb{R}_0^{(3)}$, которая на луче R_α ($\alpha = 0,\, 2\pi/3,\, -2\pi/3$) имеет вид ($x = e^{i\alpha}y$)

$$
\begin{aligned}
\mu_{\text{cont}}^{\text{even}}(dx) &= F(x)dx = 2\sum_{j=0}^{2} F_+(x)dx = 2\sum_{j=0}^{2} F_+(e^{i\alpha}y)dy \\
&= 2\sum_{j=0}^{2} b_j(e^{i\alpha}y) f(e^{i\alpha}y) \chi_{[0,\sqrt{[3]2}]} e^{i\alpha}dy \\
&= 2\left\{\left(-1 + \frac{2}{y^2}e^{-i2\alpha} + \frac{y^2}{2}e^{i2\alpha}\right) f(y)\chi_{[0,\sqrt{[3]2}]}dy\right\},
\end{aligned}
\tag{116}
$$

где функция f определяется формулой (92).

В результате мы показали, что искомая P-симметричная мера определяемая равенствами (47), (48), (50), (61), (71), (76), (81), сосредоточена на носителе приведенном на Рис.1. (Носитель состоит из точек z_i, расположенных на окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат и отрезков длины $\sqrt[3]{2}$ выходящих из начала координат под углом в $\pi/3$ друг к другу).

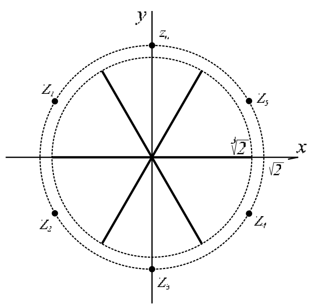

Рис. 1. Носитель меры.

Соответствующие нагрузки равны:

$$\sigma_0 = -\sigma_3 = C_0^{(0)} + C_0^{(1)} z_0^{-2} + C_0^{(2)} z_0^2 = \frac{3}{2\sqrt{6}}; \tag{117}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_5 = C_2^{(0)} + C_2^{(1)} z_2^{-2} + C_2^{(2)} z_2^2 = 0; \tag{118}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = C_4^{(0)} + C_4^{(1)} z_4^{-2} + C_4^{(2)} z_4^2 = 0; \tag{119}$$

$$\sigma_0' = \sigma_3' = D_0^{(0)} + D_0^{(1)} z_0^{-2} + D_0^{(2)} z_0^2 = \frac{-1}{2\sqrt{6}}; \tag{120}$$

$$\sigma_2' = \sigma_5' = D_2^{(0)} + D_2^{(1)} z_2^{-2} + D_2^{(2)} z_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}; \tag{121}$$

$$\sigma_4' = \sigma_1' = D_4^{(0)} + D_4^{(1)} z_4^{-2} + D_4^{(2)} z_4^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}. \tag{122}$$

Итак нагрузки равны:

$$\sigma_0 + \sigma_0' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \sigma_3 + \sigma_3' = \frac{-2}{\sqrt{6}} \tag{123}$$

(в точках z_0, z_3 соответственно),

$$\begin{aligned} &\sigma_5 + \sigma_5' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ &\sigma_2 + \sigma_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{(в точках} \quad z_5,\, z_2 \quad \text{соответственно)}, \end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_4 + \sigma_4' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ &\sigma_1 + \sigma_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{(в точках} \quad z_4,\, z_1 \quad \text{соответственно)}, \end{aligned} \tag{125}$$

Плотность меры на $\mathbb{R}_0^{(3)}$ определяется формулой (116) и равна ($x = e^{i\alpha}y$):

$$\mu_{\text{cont}}^{\text{even}}(dx) = \left(-1 + \frac{2}{y^2} + \frac{y^2}{2}\right) \frac{1}{8+y^6} \sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}\, y^5 \chi_{[-\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{2}]} dy, \tag{126}$$

(на $\mathbb{R}_0$);

$$\begin{aligned} \mu_{\text{cont}}^{\text{even}}(dx) = &\left(-1 + \frac{2}{y^2} e^{-i4\pi/3} + \frac{y^2}{2} e^{i4\pi/3}\right) \\ &\times \frac{1}{8+y^6} \sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}\, y^5 \chi_{[-\sqrt[3]{2},\,\sqrt[3]{2}]} dy, \end{aligned} \tag{127}$$

(на $\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}$);

$$\mu_{\mathrm{cont}}^{\mathrm{even}}(dx)=\left(-1+\frac{2}{y^2}e^{i4\pi/3}+\frac{y^2}{2}e^{-i4\pi/3}\right)\times\frac{1}{8+y^6}\sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}y^5\chi_{[-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}]}dy, \tag{128}$$

(на $\mathbb{R}_{e^{-i2\pi/3}}$);

Литература

1. V. V. Borzov, *Integral Transf. and Special Functions.* — **12**, No. 2 (2001), 115–138.
2. В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *Теор. Матем. Физика*, **155**, No. 1 (2008), 39–46.
3. V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, *Day on Diffraction*, (2009), 49–53.
4. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов*, ФМ (1961).
5. С. К. Ландо, *Лекции по комбинаторике*, МЦНМО (1994).
6. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, т.1, ИЛ (1962).

Borzov V. V., Damaskinsky E. V. Composite model for generalized oscillator. I.

We study a realization of given generalized oscillator by the system of N generalized oscillators of other type. Considered generalized oscillator connected with given system of orthogonal polynomials defined by the three terms recurrent relations and related Jacobi matrix J. The case $N = 2$ was considered in the previous work. In this case measure participated in orthogonality relation for polynomials is symmetric under rotation on the angle π. In present work we discuss the case $N = 3$. We showed that such problem admits the solution only in two cases. The first one is realized when the Jacobi matrix, connected with given ("composite") generalized oscillator has the block-diagonal form and consists from the similar 3×3 blocks. More interesting is the second possible case in which Jacobi matrix has not block-diagonal form. For this Jacobi matrix we construct the related system of orthogonal polynomials. This system of orthogonal polynomials splits into three series, connected with Chebyshev polynomials of the second kind. The solution of the classical moment problem related to this Jacobi matrix is the main result of this work. The related measure is symmetric under rotation on the angle $2\pi/3$.

Поступило 1 марта 2010 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет телекоммуникаций
им. М.А.Бонч-Бруевича,
Наб. реки Мойки 61,
190061 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

Военный инженерный технический институт
Захарьевская 22, 191123 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: evd@pdmi.ras.ru