Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

П. Н. Бибиков, П. П. Кулиш

ТРЕХМАГНОННАЯ ПРОБЛЕМА И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДИМЕРИЗОВАННЫХ СПИНОВЫХ ЛЕСТНИЦ

1. Введение

Нахождение новых интегрируемых спиновых моделей является одним из активно развивающихся направлений квантового метода обратной задачи [1–5]. В связи с этим встает вопрос о конструктивном методе выявления интегрируемых моделей среди большого числа неинтегрируемых. Имеется несколько способов решения этого вопроса для спиновых цепочек. Во-первых можно проверить выполняются ли для плотности гамильтониана условия интегрируемости [3] (уравнение (64) настоящей работы), следующие из уравнения Янга–Бакстера. Выполнение этих условий фактически эквивалентно [6–8] существованию R-матрицы и возможности погружения данной модели в формализм квантового метода обратной задачи (алгебраическоко анзаца Бете). Другой способ состоит в изучении алгебры симметрии, соответствующей данной модели [9]. В работе [10] был предложен еще один подход, основанный на разрешимости трехмагнонной задачи в рамках координатного анзаца Бете. Было показано, что для модели димеризованной спиновой лестницы эта разрешимость имеет место только в тех случаях, для которых существует R-матрица [11]. Физические свойства некоторых интегрируемых моделей этого типа уже подробно изучались (см. [12] и цитированную там литературу).

Большинство выкладок работы [10] было выполнено с помощью системы компьютерной алгебры MAPLE. В настоящей работе мы воспроизводим результаты [10], сводя в формализме координатного анзаца Бете разрешимость трехмагнонной задачи к уравнению Янга–Бакстера для двухмагнонной S-матрицы.

Ключевые слова : анзац Бете, спиновые цепочки, димеризация, уравнения Янга–Бакстера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, No. 08-01-00638 и НШ-5931.2010.1 .

2. Описание модели

Алгебра операторов спиновой лестницы порождена парами триплетов $S = 1/2$ спиновых операторов $\mathbf{S}_{j,n}$ $(j = 1, 2)$, каждая из которых ассоциируется с перекладиной (ребром) лестницы и нумеруется индексом n. Полное (несепарабельное) гильбертово пространство соответствующее (бесконечной) спиновой лестнице является тензорным произведением

$$\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} = \prod_n \otimes \eta_n, \tag{1}$$

где, в свою очередь, $\eta_n = \eta_n^1 \otimes \eta_n^2$, где каждый сомножитель $\eta_n^j = \mathbb{C}^2$ $(j = 1, 2)$ является пространством представления для соответствующего триплета $\mathbf{S}_{j,n}$.

Каждое ребро удобнее трактовать как узел комбинированной спиновой цепочки, используя при этом для каждого η_n синглет-триплетное разложение

$$\eta_n = \eta_n^s \oplus \eta_n^t, \quad \dim \eta_n^s = 1, \quad \dim \eta_n^t = 3. \tag{2}$$

Подпространства η_n^s и η_n^t представляют собой синглетный и триплетный сектора для полного спина ребра с номером n.

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{1,n} + \mathbf{S}_{2,n}. \tag{3}$$

Именно, для оператора

$$Q_n = \frac{1}{2}\mathbf{S}_n^2, \tag{4}$$

выполнено соотношение

$$Q_n|_{\eta_n^s} = 0, \quad Q_n|_{\eta_n^t} = 1. \tag{5}$$

Два операторных su(2)-триплета

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_n &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{1,n} - \mathbf{S}_{2,n}) - i[\mathbf{S}_{1,n} \times \mathbf{S}_{2,n}], \\ \overline{\mathbf{\Psi}}_n &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{1,n} - \mathbf{S}_{2,n}) + i[\mathbf{S}_{1,n} \times \mathbf{S}_{2,n}], \end{aligned} \tag{6}$$

помимо

$$[\mathbf{S}_n^a, \mathbf{\Psi}_n^b] = i\varepsilon_{abc}\mathbf{\Psi}_n^c, \quad [\mathbf{S}_n^a, \overline{\mathbf{\Psi}}_n^b] = i\varepsilon_{abc}\overline{\mathbf{\Psi}}_n^c, \tag{7}$$

$(a,b,c=1,2,3)$ удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\mathbf{S}_n\mathbf{\Psi}_n=0,\quad \overline{\mathbf{\Psi}}_n\mathbf{S}_n=0. \tag{8}$$

В соответствии с (4), (7) и (8)

$$[Q_n,\overline{\mathbf{\Psi}}_n]=\overline{\mathbf{\Psi}}_n,\quad [Q_n,\mathbf{\Psi}_n]=-\mathbf{\Psi}_n. \tag{9}$$

Следовательно $\overline{\mathbf{\Psi}}_n$ и $\mathbf{\Psi}_n$ могут рассматриваться как (ни Бозе и ни Ферми) операторы рождения и уничтожения для реберных триплетов.

В настоящей работе разбираются только полностью димеризованные спиновые лестницы, для которых

$$[\widehat{H},\widehat{Q}]=0, \tag{10}$$

где

$$\widehat{Q}=\sum_n Q_n \tag{11}$$

является в соответствии с (5) оператором числа реберных триплетов. Гамильтониан

$$\widehat{H}=\sum_n H_{n,n+1}, \tag{12}$$

в самом общем случае задается плотностью

$$\begin{aligned} H_{n,n+1}&=J_1(Q_n+Q_{n+1})+J_2(\mathbf{\Psi}_n\cdot\overline{\mathbf{\Psi}}_{n+1}+\overline{\mathbf{\Psi}}_n\cdot\mathbf{\Psi}_{n+1})\\ &+J_3Q_nQ_{n+1}+J_4\mathbf{S}_n\cdot\mathbf{S}_{n+1}+J_5(\mathbf{S}_n\cdot\mathbf{S}_{n+1})^2. \end{aligned} \tag{13}$$

В соответствии с (5) и (9) вектор

$$|0\rangle=\prod_n|0\rangle_n,\quad |0\rangle_n\in\eta_n^s, \tag{14}$$

является нулевым собственным вектором для $\widehat{H}$. В физической литературе принято считать, что при достаточно большом $J_1>0$ спиновая лестница находится в так называемой полностью димеризованной фазе, для которой формула (14) дает основное состояние (все остальные собственные значения $\widehat{H}$ строго положительны). В дальнейшем это положение не будет использовано в тексте. Однако мы упомянули его для того, чтобы подчеркнуть значение состояния (14), равно как и возбуждений над ним. Имея в виду физические приложения, мы возьмем в качестве физического (сепарабельного) гильбертова пространства бесконечную сумму m-магнонных секторов

$$\mathcal{H}_{\rm phys} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^m, \quad \widehat{Q}|_{\mathcal{H}^m} = m. \tag{15}$$

в надежде, что детальный анализ соответствующего спектра будет полезен и для вычисления границ полностью димеризованной фазы.

Исследуем детально плотность гамильтониана (13). Ее три последних члена нетривиально действуют только в подпространстве $\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t$, в котором выполнено соотношение

$$\mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1}|_{\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t} = \left[\frac{1}{2}\Big(\mathbf{S}_n + \mathbf{S}_{n+1}\Big)^2 - 2\right]\Bigg|_{\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t}. \tag{16}$$

Для $j = 0, 1, 2$ пусть $P_{n,n+1}^{(j)} \in \mathrm{End}(\eta_n \otimes \eta_{n+1})$ являются проекторами на спин-j подсектора, удовлетворяя стандартным соотношениям

$$P^{(j)} P^{(l)} = \delta_{jl} P^{(j)}, \quad P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = 1. \tag{17}$$

Тогда в соответствии с (16)

$$\mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1}\big|_{\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t} = -2P_{n,n+1}^{(0)} - P_{n,n+1}^{(1)} + P_{n,n+1}^{(2)}, \tag{18}$$

и значит

$$(\mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1})^2\big|_{\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t} = 4P_{n,n+1}^{(0)} + P_{n,n+1}^{(1)} + P_{n,n+1}^{(2)}. \tag{19}$$

В соответствии с (5)

$$Q_n Q_{n+1}\big|_{\eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^t} = P_{n,n+1}^{(0)} + P_{n,n+1}^{(1)} + P_{n,n+1}^{(2)}. \tag{20}$$

Выберем в пространстве η_n^t следующий базис

$$|1\rangle_n^j = \overline{\mathbf{\Psi}}_n^j |0\rangle_n. \tag{21}$$

Эрмитово сопряжение дает

$$\mathbf{\Psi}_n^j|1\rangle_n^l = \delta_{jl}|0\rangle_n. \tag{22}$$

Пусть $\mathcal{P}_{n,n+1}$ оператор перестановки в пространстве $\eta_n^s \otimes \eta_{n+1}^t \oplus \eta_n^t \otimes \eta_{n+1}^s$. Именно

$$\mathcal{P}_{n,n+1}\xi_n\zeta_{n+1} = \zeta_n\xi_{n+1}. \tag{23}$$

Используя (18)–(22) можно получить локальные формулы

$$\begin{aligned} H_{n,n+1}|_{\eta_n^s\otimes\eta_{n+1}^s} &= 0, \\ H_{n,n+1}|_{\eta_n^s\otimes\eta_{n+1}^t\oplus\eta_n^t\otimes\eta_{n+1}^s} &= J_1 + J_2\mathcal{P}_{n,n+1}, \\ H_{n,n+1}|_{\eta_n^t\otimes\eta_{n+1}^t} &= 2\Big(J_1 + J_2\sum_{j=0}^{2}\Delta_j P_{n,n+1}^{(j)}\Big), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta_0 = \frac{J_3 - 2J_4 + 4J_5}{2J_2}, \quad \Delta_1 = \frac{J_3 - J_4 + J_5}{2J_2}, \\ &\Delta_2 = \frac{J_3 + J_4 + J_5}{2J_2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь плотность гамильтониана (13) получает ясную физическую интерпретацию. Ее первый член соответствует химпотенциалу отдельного возбужденного ребра. Второй является кинетической энергией или “хоппингом”. Будем считать, что

$$J_2 \neq 0. \tag{26}$$

Последние три члена описывают взаимодействие спинов между двумя соседними реберными триплетами.

Сектор $\mathcal{H}^1$ порожден всеми одномагнонными состояниями

$$|1,k\rangle = \sum_n e^{ikn}\Big(\prod_{m=-\infty}^{n-1}\otimes|0\rangle_m\Big)\otimes|1\rangle_n\otimes\Big(\prod_{m=n+1}^{\infty}\otimes|0\rangle_m\Big), \tag{27}$$

энергия которых

$$E_{\mathrm{magn}}(k) = 2(J_1 + J_2\cos k), \tag{28}$$

легко выводится из (24) и не зависит от поляризации.

3. Двухмагнонные состояния

Ранее двухмагнонная проблема изучалась раздельно для каждого сектора полного спина ($S = 0, 1, 2$) [10]. Здесь же мы рассмотрим ее с единой точки зрения, беря в качестве общего двух-магнонного состояния

$$|\psi, 2-\mathrm{magn}\rangle = \sum_{m<n} a_{j_1,j_2}(m,n)\dots|1\rangle_m^{j_1}\dots|1\rangle_n^{j_2}\dots, \tag{29}$$

и подразумевая

$$\sup_{m,n,j_1,j_2} a_{j_1,j_2}(m,n) < \infty. \tag{30}$$

В соответствии с (24) уравнение Шредингера дает (мы опускаем индексы j_1 и j_2 рассматривая $a(m,n)$ как девятикомпонентный вектор)

$$\Bigl(E - 4J_1\Bigr)a(m,n) = J_2\Bigl[a(m-1,n) + a(m+1,n) + a(m,n-1) + a(m,n+1)\Bigr], \tag{31}$$

для $n - m > 1$ и

$$\Bigl(E - 4J_1\Bigr)a(m,m+1) = J_2\Bigl[a(m-1,m+1) + a(m,m+2) + 2\sum_{j=0}^{2}\Delta_j P^{(j)}a(m,m+1)\Bigr], \tag{32}$$

для $n - m = 1$. Последнее уравнение может быть приведено к форме (31) расширением волновой функции в нефизическую область $m = n$ и постулированием следующуей системы условий Бете

$$a(m,m) + a(m+1,m+1) = 2\sum_{j=0}^{2}\Delta_j P^{(j)}a(m,m+1). \tag{33}$$

Двухпараметрический Бете анзац

$$a(m,n;k_1,k_2) = A(k_1,k_2)\,\mathrm{e}^{i(k_1m+k_2n)} - \widetilde{A}(k_1,k_2)\,\mathrm{e}^{i(k_2m+k_1n)}, \tag{34}$$

где подразумевается

$$A(k_1,k_2) \neq 0, \tag{35}$$

решает уравнение (31) и дает следующую дисперсию

$$E_{\mathrm{scatt}}(k_1,k_2)=E_{\mathrm{magn}}(k_1)+E_{\mathrm{magn}}(k_2). \tag{36}$$

Подстановка (34) в (33) дает

$$G(k_1,k_2)\widetilde{A}(k_1,k_2)=G(k_2,k_1)A(k_1,k_2), \tag{37}$$

где

$$G(k_1,k_2)=\sum_{j=0}^{2}\Big(\cos\frac{k_1+k_2}{2}-\Delta_j \mathrm{e}^{i(k_1-k_2)/2}\Big)P^{(j)}. \tag{38}$$

При $\det G(k_1,k_2)\neq 0$ уравнение (37) имеет единственное решение

$$\widetilde{A}(k_1,k_2)=S(k_1,k_2)A(k_1,k_2), \tag{39}$$

где

$$S(k_1,k_2)\equiv G^{-1}(k_1,k_2)G(k_2,k_1)=\sum_{j=0}^{2}S_j(k_1,k_2)P^{(j)}. \tag{40}$$

и

$$S_j(k_1,k_2)\equiv\frac{\cos{(k_1+k_2)/2}-\Delta_j \mathrm{e}^{i(k_2-k_1)/2}}{\cos{(k_1+k_2)/2}-\Delta_j \mathrm{e}^{i(k_1-k_2)/2}}. \tag{41}$$

В соответствии с (34) и (39) $-S(k_1,k_2)$ является двухмагнонной S-матрицей.

Неравенство (30) для решений вида (39) будет выполнено только для вещественных k_1 and k_2. В трех особых случаях

$$S_j(k_1,k_2)=0,\quad j=0,1,2, \tag{42}$$

или, что то же самое

$$\cos\frac{k_1+k_2}{2}=\Delta_j \mathrm{e}^{i(k_2-k_1)/2},\quad j=0,1,2, \tag{43}$$

когда матрица $G(k_2,k_1)$ вырождена имеются три дополнительных серии решений

$$P^{(j)}A=A,\quad \widetilde{A}=0, \tag{44}$$

относящихся к связанным состояниям.

4. Трехмагнонные состояния

По аналогии с (29) общее трехмагнонное состояние имеет следующий вид

$$|\psi, 3-\mathrm{magn}\rangle = \sum_{m<n<p} \sum_{j_1,j_2,j_3} b_{j_1,j_2,j_3}(m,n,p)\ldots|1\rangle_m^{j_1}\ldots|1\rangle_n^{j_2}\ldots|1\rangle_p^{j_3}\ldots, \quad (45)$$

где подразумевается, что

$$\sup_{m,n,p,j_1,j_2,j_3} b_{j_1,j_2,j_3}(m,n,p) < \infty. \quad (46)$$

Уравнение Шредингера для (45) эквивалентно следующей системе (мы опять опускаем индексы j_1, j_2 и j_3 рассматривая $b(m,n,p)$ как 27-мерный вектор)

$$\begin{aligned}(E-6J_1)b(m,n,p) = J_2\Big[&b(m-1,n,p)+b(m+1,n,p)\\ &+b(m,n-1,p)+b(m,n+1,p)+b(m,n,p-1)\\ &+b(m,n,p+1)\Big], \quad p-n>1, \quad n-m>1, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}(E-6J_1)b(n-1,n,p) = J_2\Big[&b(n-2,n,p)+b(n-1,n+1,p)\\ &+b(n-1,n,p-1)+b(n-1,n,p+1)\\ &+2\sum_{j=0}^{2}\Delta_j P_{12}^{(j)} b(n-1,n,p)\Big], \quad p-n>1, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}(E-6J_1)b(m,n,n+1) = J_2\Big[&b(m-1,n,n+1)+b(m+1,n,n+1)\\ &+b(m,n-1,n+1)+b(m,n,n+2)\\ &+2\sum_{j=0}^{2}\Delta_j P_{23}^{(j)} b(m,n,n+1)\Big], \quad n-m>1. \end{aligned} \quad (49)$$

Мы предлагаем Бете анзац

$$b(m,n,p) = \sum_{g\in\mathcal{S}_3} (-1)^{\deg(g)} B(k_1,k_2,k_3,g)\exp i[k_{g(1)}m+k_{g(2)}n+k_{g(3)}p], \quad (50)$$

где для симметрической группы $\mathcal{S}_3$ используется следующее представление

$$\begin{array}{ll} g_0: (1,2,3) \to (1,2,3), & g_1: (1,2,3) \to (1,3,2), \\ g_2: (1,2,3) \to (3,1,2), & g_3: (1,2,3) \to (3,2,1), \\ g_4: (1,2,3) \to (2,3,1), & g_5: (1,2,3) \to (2,1,3), \end{array} \tag{51}$$

(при таком выборе $\deg(g_j) = (-1)^j$). Подстановка (50) решает уравнение (47) для всех значений m, n и p. Соответствующая дисперсия имеет вид

$$E_{\mathrm{scatt}}(k_1,k_2,k_3) = E_{\mathrm{magn}}(k_1) + E_{\mathrm{magn}}(k_2) + E_{\mathrm{magn}}(k_3). \tag{52}$$

Уравнения (48) и (49) могут быть приведены к виду (47) продолжением волновой функции в нефизическую область $m = n$ и $n = p$ и постулированием условий Бете

$$\begin{aligned} b(n-1,n-1,p) + b(n,n,p) &= 2\sum_{j=0}^{2} \Delta_j P_{12}^{(j)} b(n-1,n,p), \\ b(m,n,n) + b(m,n+1,n+1) &= 2\sum_{j=0}^{2} \Delta_j P_{23}^{(j)} b(m,n,n+1). \end{aligned} \tag{53}$$

Уравнения (50) и (53) дают

$$\begin{aligned} G_{12}(k_1,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_5) &= G_{12}(k_2,k_1)B(k_1,k_2,k_3,g_0), \\ G_{12}(k_3,k_1)B(k_1,k_2,k_3,g_1) &= G_{12}(k_1,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_2), \\ G_{12}(k_2,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_3) &= G_{12}(k_3,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_4), \\ G_{23}(k_2,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_1) &= G_{23}(k_3,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_0), \\ G_{23}(k_3,k_1)B(k_1,k_2,k_3,g_5) &= G_{23}(k_1,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_4), \\ G_{23}(k_1,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_3) &= G_{23}(k_2,k_1)B(k_1,k_2,k_3,g_2). \end{aligned} \tag{54}$$

Положив

$$B(k_1,k_2,k_3,g_0) \neq 0, \tag{55}$$

и считая невырожденными все G можно легко получить из (54)

$$\begin{aligned} B(k_1,k_2,k_3,g_1) &= S_{23}(k_2,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_0), \\ B(k_1,k_2,k_3,g_5) &= S_{12}(k_1,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_0), \\ B(k_1,k_2,k_3,g_2) &= S_{12}(k_1,k_3)S_{23}(k_2,k_3)B(k_1,k_2,k_3,g_0), \\ B(k_1,k_2,k_3,g_4) &= S_{23}(k_1,k_3)S_{12}(k_1,k_2)B(k_1,k_2,k_3,g_0). \end{aligned} \tag{56}$$

Для $B(k_1, k_2, k_3, g_3)$ получаются два независимых представления

$$B(k_1, k_2, k_3, g_3) = S_{12}(k_2, k_3)S_{23}(k_1, k_3)S_{12}(k_1, k_2)B(k_1, k_2, k_3, g_0),$$
$$B(k_1, k_2, k_3, g_3) = S_{23}(k_1, k_2)S_{12}(k_1, k_3)S_{23}(k_2, k_3)B(k_1, k_2, k_3, g_0). \tag{57}$$

Система (57) разрешима только при выполнении условия

$$Z(k_1, k_2, k_3)B(k_1, k_2, k_3, g_0) = 0, \tag{58}$$

где

$$\begin{aligned} Z(k_1, k_2, k_3) = {} & S_{12}(k_2, k_3)S_{23}(k_1, k_3)S_{12}(k_1, k_2) \\ & - S_{23}(k_1, k_2)S_{12}(k_1, k_3)S_{23}(k_2, k_3). \end{aligned} \tag{59}$$

В том случае, когда двухчастичная $\mathcal{S}$-матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$S_{12}(k_2, k_3)S_{23}(k_1, k_3)S_{12}(k_1, k_2) = S_{23}(k_1, k_2)S_{12}(k_1, k_3)S_{23}(k_2, k_3), \tag{60}$$

условие (58) выполнено для любого вектора $B(k_1, k_2, k_3, g_0)$.

5. Решение уравнения Янга–Бакстера

Уравнение (60) предствляет собой систему алгебраических соотношений на параметры Δ_j. Однако, непосредственное их выделение требует определенных усилий.

Для начала заметим, что уравнение (60) выполняется при

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2. \tag{61}$$

Далее, рассмотрим уравнение (60) в окрестности точки $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, где оно очевидно также выполнено. Разложение в степенной ряд дает

$$S(k_1, k_2) = 1 + (k_2 - k_1)F + \frac{1}{2}(k_2 - k_1)^2 F^2 + o(k^2), \tag{62}$$

где

$$F = \sum_{j=0}^{2} x_j P^{(j)}, \quad x_j \equiv \frac{i\Delta_j}{1 - \Delta_j}. \tag{63}$$

Как было показано в [6–8] из разложения (62) и уравнения Янга–Бакстера (60) вытекает условие интегрируемости (Н. Решетихин, см. [3]) на матрицу F. Именно, должна существовать такая матрица K, что

$$[(F_{12} + F_{23}), [F_{12}, F_{23}]] = K_{23} - K_{12}. \tag{64}$$

Однако, хорошо известно, что для матрицы вида (63) уравнение (64) выполняется только в трех случаях [2, 6, 7]

$$x_0 = x_2, \Leftrightarrow \Delta_0 = \Delta_2, \tag{65}$$

$$x_1 = x_2, \Leftrightarrow \Delta_1 = \Delta_2, \tag{66}$$

$$x_0 = 3x_1 - 2x_2, \Leftrightarrow \Delta_0 = \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 - \Delta_1\Delta_2}{1 + 2\Delta_1 - 3\Delta_2}. \tag{67}$$

Случай (65) отвечает известной модели Сазерленда [13], случай (66) был выявлен в [14], наконец, в случае (67) интегрируемость доказана в [3].

Аналогичное разложение в окрестности точки $k_1 = k_2 = k_3 = \pi$ приведет к соотношениям (65)–(67) в которых однако все Δ_j заменены на $-\Delta_j$. Уравнения (65) и (66) инвариантны относительно такой замены, а (67) перейдет в

$$\Delta_0 = \frac{3\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2}{1 - 2\Delta_1 + 3\Delta_2}. \tag{68}$$

Если предположить, что искомое решение отлично от (61), то возникает следующая система альтернативных необходимых условий. Либо выполнено (65), либо (66), либо (67) и (68) одновременно. Как нетрудно видеть последний случай не дает ничего нового, поскольку, вычитая (67) из (68) и приводя подобные члены мы получим (66).

Теперь рассмотрим случаи (65) и (66) отдельно. В случае (65) имеем

$$\begin{aligned} S(k_1, k_2) = {} & \frac{1}{2}\Big(S_2(k_1, k_2) + S_1(k_1, k_2)\Big) \\ & + \frac{1}{2}\Big(S_2(k_1, k_2) - S_1(k_1, k_2)\Big)\mathbb{P}, \end{aligned} \tag{69}$$

где $\mathbb{P}$ оператор перестановки в пространстве $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. В случае же (66)

$$S(k_1, k_2) = S_1(k_1, k_2) + [S_0(k_1, k_2) - S_1(k_1, k_2)]\mathcal{P}^{(0)}. \tag{70}$$

Поскольку матрица $\mathbb{P}$ сама по себе удовлетворет соотношениям

$$\mathbb{P}^2 = 1, \quad \mathbb{P}_{12}\mathbb{P}_{23}\mathbb{P}_{12} = \mathbb{P}_{23}\mathbb{P}_{12}\mathbb{P}_{23}, \tag{71}$$

то уравнение Янга–Бакстера для матрицы (69) сводится к числовому уравнению

$$[S_1(k_1,k_2) - S_2(k_1,k_2)][S_1(k_1,k_3) - S_2(k_1,k_3)][S_1(k_2,k_3) - S_2(k_2,k_3)]$$
$$= 4[S_2(k_1,k_2)S_1(k_1,k_3)S_2(k_2,k_3) - S_1(k_1,k_2)S_2(k_1,k_3)S_1(k_2,k_3)]. \tag{72}$$

Подставляя в (72) выражение (41) после небольших выкладок можно получить соотношение

$$[(\Delta_1 - \Delta_2)^2 - 1]\cos\frac{k_1+k_2}{2}\cos\frac{k_1+k_3}{2}\cos\frac{k_2+k_3}{2}$$
$$= \Delta_1\Delta_2\Big(\sum_{j=1}^{3}\cos k_j - \Delta_1 - \Delta_2\Big), \tag{73}$$

которое будет справедливо *при всех* k_j только если

$$(\Delta_1 - \Delta_2)^2 = 1, \quad \Delta_1\Delta_2 = 0. \tag{74}$$

Последняя система уравнений имеет четыре решения (напоминаем, что $\Delta_0 = \Delta_2$)

$$\Delta_1 = \pm 1, \qquad \Delta_2 = 0, \tag{75}$$
$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = \pm 1, \tag{76}$$

полученных ранее [10] более сложным путем.

Переходя к случаю (70) воспользуемся соотношениями

$$(P^{(0)})^2 = P^{(0)}, \quad P^{(0)}_{12}P^{(0)}_{23}P^{(0)}_{12} = \frac{1}{9}P^{(0)}_{12}, \quad P^{(0)}_{23}P^{(0)}_{12}P^{(0)}_{23} = \frac{1}{9}P^{(0)}_{23}. \tag{77}$$

Первое из соотношений (77) уже содержалось в (17), два последних взяты из [15]. Воспользовавшись этими соотношениями сводим уравнение Янга–Бакстера к

$$S_0(k_2,k_3)S_0(k_1,k_3)S_0(k_1,k_2) - S_0(k_2,k_3)S_0(k_1,k_3)S_1(k_1,k_2)$$

$$+8S_0(k_2,k_3)S_1(k_1,k_3)S_0(k_1,k_2)-S_1(k_2,k_3)S_0(k_1,k_3)S_0(k_1,k_2)$$
$$+S_0(k_2,k_3)S_1(k_1,k_3)S_1(k_1,k_2)+S_1(k_2,k_3)S_1(k_1,k_3)S_0(k_1,k_2) \qquad (78)$$
$$-8S_1(k_2,k_3)S_0(k_1,k_3)S_1(k_1,k_2)-S_1(k_2,k_3)S_1(k_1,k_3)S_1(k_1,k_2)=0.$$

Далее подставляя (41) получаем в результате

$$4(\Delta_0-\Delta_1)^2-9]\cos(k_1+k_2+k_3)-36\Delta_0\Delta_1(\Delta_0+\Delta_1)$$
$$+[4(\Delta_0-\Delta_1)^2-9+36\Delta_0\Delta_1](\cos k_1+\cos k_2+\cos k_3)=0. \qquad (79)$$

Последняя система уравнений имеет четыре решения (напоминаем, что $\Delta_2=\Delta_1$)

$$\Delta_0=\pm\frac{3}{2}, \qquad \Delta_1=0, \qquad (80)$$
$$\Delta_0=0, \qquad \Delta_1=\pm\frac{3}{2}, \qquad (81)$$

также полученных в [10].

Литература

1. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models.* — Quantum symmetries/Symmetries quantique. Proceedings of the Les Houches summer school, Session LXIV, eds. A. Connes, K. Gawedzki and J. Zinn-Justin, North-Holland (1998).
2. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М., 1992.
3. P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method. Recent developments.* — Proc. Symp. on Integrable Quantum Fields, Lect. Notes in Physics **151** Eds. J. Hietarinta and C. Montonen New York: Springer (1982).
4. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи и* XYZ *модель Гейзенберга.* УФН **34**, (1979), 13.
5. М. Годен, *Волновая функция Бете.* Мир, М., 1987.
6. T. Kennedy, *Solutions of the Yang–Baxter equation for isotropic quantum spin chains.* — J. Phys. A: Math. Gen. **25**, (1992), 2809.
7. K.-H. Mütter, A. Schmitt, *Solvable spin-*1 *models in one dimension.* — J. Phys. A: Math. Gen. **28**, (1995), 2265.
8. P. N. Bibikov, *How to solve Yang–Baxter equation using the Taylor expansion of R-matrix.* — Phys. Lett. A **314**, (2003), 209–213.
9 V. Gritsev, D. Baeriswyl, *Exactly solvable isotropic spin-$\frac{1}{2}$ ladder models.* — J. Phys. A: Math. Gen. **36**, (2003), 12129–12142.

10 P. N. Bibikov, *A three-magnon problem for exactly rung-dimerized spin ladders: from a general outlook to the Bethe ansatz.* — J. Phys. A: Math. Gen. **42**, (2009), 315212.
11 П. Н. Бибиков, *R-матрицы для* SU(2)*-инвариантных сдвоенных спиновых цепочек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **291**, (2001), 24–34.
12 M. T. Batchelor, X.-W. Guan, N. Oelkers, Z. Tsuboi, *Integrable models and quantum spin ladders: comparison between theory and experiment for the strong coupling ladder compounds.* — Adv. Phys. **56**, (2007), 465–543.
13 B. Sutherland, *Model for a multicomponent quantum system.* — Phys. Rev. B **12** (1975), 3795.
14 Yu. G. Stroganov, *A new calculation method for partition functions in some lattice models.* — Phys. Lett. A **74**, (1979), 116–118.
15 А. Г. Быцко, *Об одном анзаце для* sl_2*-инвариантных R-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **335**, (2006), 100–118.

Bibikov P. N., Kulish P. P. Three-magnon problem and integrability of rung-dimerized spin ladders.

Integrability problem for rung-dimerized spin ladder is studied by coordinate Bethe Ansatz method in three-magnon sector. It is shown that solvability of the three-magnon problem takes place for the same values of coupling constants in the Hamiltonian which guaranty solvability of the Yang–Baxter equation for the corresponding R-matrix.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: bibikov@PB7855.spb.edu

Поступило 30 марта 2010 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kulish@pdmi.ras.ru