Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

А. А. Андрианов, В. А. Андрианов, А. В. Сафонов

БРАНЫ С АСИММЕТРИЧНЫМИ ГЕОМЕТРИЯМИ В ОБЪЕМЛЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Введение

В последние годы всё большей популярностью пользуются модели, которые основаны на гипотезе, что наша Вселенная является четырёхмерной пространственно-временной гиперповерхностью (3-браной), вложенной в некоторое многомерное фундаментальное пространство, см., например, обзоры [1], а также цитируемую в них литературу. Число дополнительных измерений, их характерный размер, а также число материальных полей, которые расположены в объемлющем пространстве, в различных подходах могут отличаться. В то же время принято считать, что размер дополнительного пространства достаточно велик, и дополнительные измерения могут, в принципе, быть обнаружены в планируемых в ближайшем будущем экспериментах и (или) в астрофизических наблюдениях. Четырёхмерность нашего мира может обеспечиваться, в частности, механизмом локализации полей материи на трёхмерных гиперповерхностях в многомерном пространстве, т.е. на 3-бранах. Различные сценарии описания доменных стенок и их приложений к физике элементарных частиц и космологии можно найти в ряде обзоров [2–10]. Интересно влияние гравитации, которая играет существенную роль в (де)локализации полей материи на бране, что было показано в работах [11–17, 18]. Возникает вопрос, при каких обстоятельствах все же возможна локализация полей материи со спином ноль на бране в присутствии минимального взаимодействия с гравитацией? Ответом на этот вопрос, отчасти, и служит данная работа.

В настоящей работе рассматривается модель доменной стенки с

Ключевые слова : гравитация в пространствах с дополнительными измерениями, мир на бранах, линейчатые геометрии.

Данная работа поддержана грантами РФФИ No. 09-02-00073-a, No. 09-01-12179-офи_м .

конечной толщиной ("толстая брана") с самодействием фермионов и гравитацией в некомпактном пятимерном пространстве-времени [19], но с асимметричным поведением фактора искажения обьёма по обе стороны от браны, то есть с различной анти де Ситтеровской геометрией. Образование "толстой браны" с локализацией на ней лёгких частиц получено ранее в [20] при помощи фоновых скалярных и (или) гравитационных полей, когда их вакуумные конфигурации имеют нетривиальную топологию. При этом могут появляться скалярные состояния с (почти) нулевой массой на бране. Однако, как ранее было показано [18], наличие центробежного потенциала приводит к отсутствию локализованных мод на бране при наличии гравитации с симметричными геометриями типа анти де Ситтера по обе стороны браны: в лучшем случае образуются узкие резонансы. Поэтому в этой ситуации имеет смысл исследовать механизмы появления локализованных состояний, когда симметрия геометрий по обе стороны браны явно нарушена за счёт введения дефекта по направлению дополнительного измерения.

Работа состоит из краткого описания модели минимального взаимодействия гравитации с полями скалярной материи, раздел 2. В третьем разделе приведено полное действие до квадратичного порядка по флуктуациям в окрестности фоновой метрики. Разделению полученных уравнений по степеням свободы посвящён четвёртый раздел. Действие скалярных полей для браны и гравитации в специально выбранной калибровке дано в разделе 5. Спектр масс для "толстой браны" в теории с потенциалом ϕ^4, индуцированным пятимерными фермионами как для симметричных геометрий, так и при наличии явного дефекта для асимметричных геометрий, приводится в разделе 6. В заключении обсуждаются результаты и перспективы предложенной модели.

2. Формулировка модели

Рассмотрим пятимерное пространство, снабдив его псевдоримановой метрикой,

$$X^A = (x^\mu, z)\,, \quad x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)\,, \quad \eta^{AB} = \mathrm{diag}\,(+,-,-,-,-)$$

с дополнительной пространственной координатой z. Предполагается, что размер дополнительного измерения бесконечен.

Введём гравитационное поле при помощи пятимерного метрического тензора g_{AB}, который в плоском пространстве и прямоугольной системе координат сводится к η^{AB}. Определим динамику вещественного скалярного поля $\Phi(X)$, минимально взаимодействующего с гравитацией, при помощи функционала действия,

$$S[g,\Phi] = \int d^5X \sqrt{|g|}\mathcal{L}(g,\Phi) \tag{1}$$

$$\mathcal{L} = \left\{-M_*^3 R + \partial_A\Phi\partial^A\Phi - V(\Phi)\right\}, \tag{2}$$

где R – скалярная кривизна, $|g|$ – детерминант матрицы метрики, а M_* – пятимерный гравитационный масштаб Планка.

Уравнения движения имеют вид,

$$R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = \frac{1}{M_*^3}T_{AB}, \quad D^2\Phi = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \Phi}, \tag{3}$$

где $D^2 = D_C D^C$ – квадрат ковариантной производной, а тензор энергии-импульса,

$$T_{AB} = \partial_A\Phi\partial_B\Phi - \frac{1}{2}g_{AB}\left(\partial_C\Phi\partial^C\Phi - V(\Phi)\right). \tag{4}$$

Ограничимся изучением классических вакуумных конфигураций, не нарушающих спонтанно 4-мерную Пуанкаре инвариантность. В данной части работы удобнее представить такую метрику в конформно-плоском виде, $g_{AB} = A^2(z)\,\eta_{AB}$.

Тогда уравнения движения упрощаются,

$$\left(\frac{A'}{A^2}\right)' = -\frac{\Phi'^2}{3M_*^3 A}, \quad -A^5 V(\Phi) = 3M_*^3\Big(A^2A'' + 2A(A')^2\Big), \tag{5}$$

$$2\left(A^3\Phi'\right)' = A^5\frac{\delta V}{\delta\Phi} \tag{6}$$

Можно доказать [20], что только два из этих уравнений независимы.

3. Малые флуктуации в окрестности фоновой метрики

Рассмотрим малые отклонения полей от средних фоновых значений и найдём квадратичое действие, соответствующее им.

Действие (1) инвариантно относительно диффеоморфизмов. Инфинитезимальные диффеоморфизмы соответствуют производным Ли вдоль произвольного векторного поля $\widetilde{\zeta}^A(X)$, определяющего преобразование координат $X \to \widetilde{X} = X + \widetilde{\zeta}(X)$. В первом порядке по $\widetilde{\zeta}^A(X)$ получаем,

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{AB}(X) &= g_{AB}(X) - \widetilde{\zeta}^C_{,A} g_{CB}(X) - \widetilde{\zeta}^C_{,B} g_{AC}(X) - g_{AB,C}(X)\,\widetilde{\zeta}^C + O\left(\zeta^2\right) \\ &= g_{AB}(X) - \widetilde{\zeta}_{A;B} - \widetilde{\zeta}_{B;A} + O\left(\widetilde{\zeta}^2\right),\end{aligned}$$

где “ , ” обозначают обычные производные, а “ ; ” – ковариантные так, что $\widetilde{\zeta}_{A;B} \equiv D_B \widetilde{\zeta}_A$.

Определим флуктуации метрики $h_{AB}(X)$ и скалярного поля $\phi(X)$ относительно фоновых решений уравнений движения,

$$g_{AB}(X) = A^2(z)\left(\eta_{AB} + h_{AB}(X)\right); \quad \Phi(X) = \Phi(z) + \phi(X). \tag{7}$$

Поскольку 4-х мерная симметрия Пуанкаре не нарушена, то выделим соответствующую ей 4-х мерную часть метрики $h_{\mu\nu}$ и введём обозначения для гравивекторов $h_{5\mu} \equiv v_\mu$ и гравискаляров $h_{55} \equiv S$. Переопределив векторное поле $\widetilde{\zeta}_\mu = A^2\zeta_\mu$, $\widetilde{\zeta}_5 = A\zeta_5$, получим следующие калибровочные преобразования,

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \left(\zeta_{\mu,\nu} + \zeta_{\nu,\mu} - \frac{2A'}{A^2}\eta_{\mu\nu}\zeta_5\right), \quad v_\mu \to v_\mu - \left(\frac{1}{A}\zeta_{5,\mu} + \zeta'_\mu\right),$$

$$S \to S - \frac{2}{A}\zeta'_5, \quad \phi \to \phi + \zeta_5\frac{\Phi'}{A}, \tag{8}$$

с точностью до членов порядка $O\left(\zeta^2, h^2, h\zeta\right)$.

Разложим действие до квадратичного порядка по флуктуациям. Полное действие в этом порядке является суммой,

$$\mathcal{L}_{(2)} = \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_V, \tag{9}$$

где

$$\sqrt{|g|}\ \mathcal{L}_h \equiv -M_*^3 A^3 \left\{ -\frac{1}{4}\ h_{\alpha\beta,\nu} h^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2}\ h^{\alpha\beta}_{,\beta} h_{,\alpha} + \frac{1}{2}\ h^{\alpha\nu}_{,\alpha} h^{\beta}_{\nu,\beta} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\ h_{,\alpha} h^{,\alpha} + \frac{1}{4} h'_{\mu\nu} h'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} h'^2 \right\}, \tag{10}$$

$$\sqrt{|g|}\ \mathcal{L}_\phi \equiv A^3 \phi_{,\mu}\phi^{,\mu} - A^3 \phi'^2 - \frac{1}{2}\ A^5 \frac{\delta^2 V}{\delta \Phi^2}(\Phi)\phi^2 + A^3 \Phi' h' \phi, \tag{11}$$

$$\sqrt{|g|}\ \mathcal{L}_S \equiv -\frac{1}{4} A^5 V S^2 + \frac{1}{2} S \Big(M_*^3 A^3 \left(h^{\mu\nu}_{,\mu\nu} - h_{,\mu}^{,\mu} \right) + M_*^3 \left(A^3 \right)' h'$$
$$+ 2(A^3\Phi'\phi)' - 4A^3\Phi'\phi' \Big), \tag{12}$$

$$\sqrt{|g|}\ \mathcal{L}_V \equiv -\frac{1}{4} M_*^3 A^3 v_{\mu\nu} v^{\mu\nu} + v^\mu \left[-M_*^3 A^3 \Big(h_{\mu\nu}^{,\nu} - h_{,\mu} \Big)' \right.$$
$$\left. + 2A^3\Phi'\phi_{,\mu} + M_*^3 \Big(A^3 \Big)' S_{,\mu} \right], \tag{13}$$

где $v_{\mu\nu} = v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu}$, $h = h_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$. Преобразования (8) позволяют исключить калибровочные степени свободы.

4. Разделение уравнений по физическим степеням свободы

Физический сектор можно определить после выделения в системе различных спиновых компонент поля $h_{\mu\nu}$. Этого можно достичь описанием 10 компонент 4-х мерной метрики в терминах бесследового-поперечного тензора, векторов и скалярных компонент [14, 21],

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + F_{\mu,\nu} + F_{\nu,\mu} + E_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\psi, \tag{14}$$

где $b_{\mu\nu}$ и F_μ подчиняются соотношению $b_{\mu\nu}^{,\mu} = b = 0 = F_\mu^{,\mu}$. Очевидно, что гравитационные поля $b_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантны и, тем самым описывают поля гравитонов в 4-х мерном пространстве. Если разложить калибровочный параметр ζ_μ и векторные поля v_μ на поперечную и продольную части,

$$\zeta_\mu = \zeta_\mu^\perp + \partial_\mu C, \quad \partial^\mu \zeta_\mu^\perp = 0; \qquad v_\mu = v_\mu^\perp + \partial_\mu \eta, \quad \partial^\mu v_\mu^\perp = 0, \tag{15}$$

то векторные поля преобразуются следующим образом,

$$F_\mu \to F_\mu - \zeta_\mu^\perp, \quad v_\mu^\perp \to v_\mu^\perp - (\zeta'_\mu)^\perp, \tag{16}$$

т.е. выражение $F'_\mu - v^\perp_\mu$ калибровочно инвариантно. В свою очередь, скалярные компоненты η, E, ψ, S, ϕ под действием калибровочных преобразований изменяются так,

$$\begin{aligned} &\eta \to \eta - \frac{1}{A}\zeta_5 - C'; \qquad E \to E - 2C, \\ &\psi \to \psi + \frac{2A'}{A^2}\zeta_5, \qquad S \to S - \frac{2}{A}\zeta'_5, \quad \phi \to \phi + \frac{\Phi'}{A}\zeta_5. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда можно найти три независимых калибровочных инварианта,

$$\frac{1}{2}E' - \eta - \frac{A}{2A'}\psi; \quad -\psi + \frac{2A'}{A\Phi'}\phi; \quad \frac{1}{2}AS + \left(\frac{A}{\Phi'}\phi\right)'. \tag{18}$$

Используя параметризацию (14) можно вычислить компоненты квадратичного действия,

$$\begin{aligned} &h \equiv h^\mu_\mu = \Box E + 4\psi; \quad h^{\alpha\beta}_{,\beta} = \Box(F^\alpha + E^{,\alpha}) + \psi^{,\alpha}; \quad h^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} = \Box^2 E + \Box\psi; \\ &h^{\mu\nu}_{,\mu\nu} - h^{,\mu}_{,\mu} = -3\Box\psi; \quad h^{,\nu}_{\mu\nu} - h_{,\mu} = \Box F_\mu - 3\psi_{,\mu}. \end{aligned} \tag{19}$$

Итак, разложение (14) влечёт частичное разделение степеней свободы,

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|}\mathcal{L}_{(2)} = {} & \frac{1}{4}M_*^3 A^3 \left\{ b_{\mu\nu,\sigma} b^{\mu\nu,\sigma} - (b')_{\mu\nu}(b')^{\mu\nu} - f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\right\} \\ & + \frac{3}{2}M_*^3 A^3 \left\{-\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} + \psi_{,\mu}S^{,\mu} + 2(\psi')^2 + 4\frac{A'}{A}\psi' S\right\} \\ & + A^3 \left\{\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} - (\phi')^2 - \frac{1}{2}\, A^2\frac{\delta^2 V}{\delta\Phi^2}\phi^2 - \frac{1}{4}A^2 V(\Phi) S^2 \right. \\ & \left. + 4\Phi'\psi'\phi + S\Big(-\Phi'\phi' + \frac{1}{2}A^2\frac{\delta V}{\delta\Phi}\phi\Big)\right\} \\ & + \frac{3}{2}M_*^3 A^3\, \Box(E' - 2\eta)\Big(\frac{A'}{A}S + \psi' + \frac{2\Phi'}{3M_*^3}\phi\Big), \end{aligned} \tag{20}$$

где $f_{\mu\nu} \equiv f_{\mu,\nu} - f_{\nu,\mu}$, $f_\mu \equiv F'_\mu - v^\perp_\mu$.

Мы видим, что существуют избыточные степени свободы, один из векторов F'_μ, $v^\perp_\mu$ и один из скаляров E', η. Их можно убрать калибровкой $v_\mu = 0$. Очевидно, что в квадратичном приближении гравитон, гравивектор и гравискаляр отделены друг от друга. Из последней строчки следует что скаляр E' является множителем Лагранжа и порождает калибровочно-инвариантную связь,

$$\frac{A'}{A}S + \psi' = -\frac{2\Phi'}{3M_*^3}\phi. \tag{21}$$

Таким образом, с учетом этой связи и выбора калибровки остается одно независимое скалярное поле. В зависимости от выбора калибровки бранонное скалярное поле будет описываться по-разному. Могут быть рассмотрены варианты - $S = 0$, $\psi = 0$, $\phi = 0$. Мы остановимся на последнем, тогда поле бранона буден описываться через ψ, непертубативно по гравитационной постоянной.

5. Скалярный сектор в калибровке $\phi = 0$

После подстановки преобразованного тензора флуктуаций и $\phi = 0$, лагранжиан (20) можно представить в виде суммы невзаимодействующих вкладов – тензорной, векторной и скалярной частей,

$$\mathcal{L}_{(2)}(v_\mu = \phi = 0) = \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{S,\psi}, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\ \mathcal{L}_{S,\psi} = &-\frac{3}{2}M_*^3A^3\Big(\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - 2\psi'^2 + \psi^{,\mu}_{,\mu}S\Big)\\ &+ M_*^3\Big(2(A^3)'\psi'S + \frac{1}{4}(A^3)''S^2\Big).\end{aligned} \tag{23}$$

При выводе использовано тождество $M_*^3(A^3)'' = -A^5V$ и произведено интегрирование по частям в действии.

Используя (21) находим,

$$S = -\frac{A}{A'}\psi', \tag{24}$$

после интегрирования по частям получаем,

$$\sqrt{|g|}\mathcal{L}_\psi = \Omega^2\left\{\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} - \psi'^2\right\}, \quad \Omega^2 = \frac{A^5}{4}\frac{\Phi'^2}{A'^2}. \tag{25}$$

Для вывода последнего равенства использованы уравнения движения.

Для нормировки кинетического члена полезно переопределить поле $\psi = \Omega^{-1}\widehat{\psi}$,

$$\sqrt{|g|}\mathcal{L}_\psi = \widehat{\psi}_{,\mu}\widehat{\psi}^{,\mu} - \widehat{\psi}(-\partial_z^2 + V(z))\widehat{\psi}, \quad V(z) = \frac{\Omega''}{\Omega}. \tag{26}$$

Уравнения (26) описывают квадратичное действие для скалярных частиц – бранонов и позволяют вычислить спектр их масс.

Для упрощения аналитических вычислений представим квадратичное действие для бранона в гауссовых нормальных координатах x_μ, y,

$$ds^2 = A^2(z)\left(dx_\mu dx^\mu + dz^2\right) = \exp\left(-2\rho(y)\right) dx_\mu dx^\mu + dy^2. \tag{27}$$

Получаем следующие формулы перехода,

$$z = \int \exp\rho(y)\, dy, \quad A(z) = \exp\left(-\rho(y)\right).$$

В этих координатах действие имеет вид,

$$\begin{aligned} S &= \int d^5X\sqrt{|g|}\mathcal{L}_\psi \\ &= \int d^4x dy \exp(\rho)\left(\widehat{\psi}_{,\mu}\widehat{\psi}^{,\mu} - \exp(-2\rho)\widehat{\psi}\left(-\partial_y^2 + \rho'\partial_y + V\right)\widehat{\psi}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Для канонической нормировки кинетического члена поле следует переопределить, $\widehat{\psi} = \exp(-\rho/2)\widetilde{\psi}$. Тогда действие представляется следующим образом,

$$S = \int d^5X\left(\widetilde{\psi}_{,\mu}\widetilde{\psi}^{,\mu} - \widetilde{\psi}\widehat{D}_y\widetilde{\psi}\right),$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_y = \exp(-2\rho)\Bigg(&- \partial_y^2 + 2\rho'\partial_y - \frac{3}{4}\rho'^2 + \frac{1}{2}\rho'' \\ &+ \frac{\rho'}{\exp\left(-3\rho/2\right)\Phi'}\left(\partial_y^2 - \rho'\partial_y\right)\left(\frac{\exp\left(-3\rho/2\right)\Phi'}{\rho'}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{29}$$

Для нахождения спектра бранонов разложим поле $\widehat{\psi}$ по базису собственных функций,

$$\begin{gathered} \widetilde{\psi}(X) = \sum_m \psi^{(m)}(x)\,\widetilde{\psi}_m(y), \quad \widehat{D}_y\widetilde{\psi}_m = m^2\widetilde{\psi}_m, \\ \int dz\widetilde{\psi}_m\widetilde{\psi}_{m'} = \delta_{m,m'}. \end{gathered} \tag{30}$$

Полученные уравнения на собственные функции можно упростить, исключив первые производные, заменой $\exp(-\rho)\widetilde{\psi}_m = \Psi$,

$$\left(-\partial_y^2 + V(y) - m^2 \exp(2\rho)\right)\Psi = 0, \tag{31}$$

$$V = \frac{1}{4}\rho'^2 - \frac{1}{2}\rho'' + \frac{\rho'}{\exp(-3\rho/2)\,\Phi'}\left(\partial_y^2 - \rho'\partial_y\right)\left(\frac{\exp(-3\rho/2)\,\Phi'}{\rho'}\right). \tag{32}$$

Видно, что для существования состояния с массой m необходимо существования ноль-моды в потенциале $\widetilde{V} = V - m^2 \exp(2\rho)$.

Полученные формулы позволяют независимо от потенциала взаимодействия полей исходной задачи, вычислить спектр квадратичных флуктуаций бозонного поля, минимально взаимодействующего с гравитацией, по решениям уравнений движения.

6. Спектр масс бранонов в теории с потенциалом ϕ^4, индуцированным пятимерными фермионами

Рассмотрим образование браны в теории с потенциалом ϕ^4 с неправильным знаком массового члена, который индуцируется самодействием пятимерных фермионов [19] и допускает решение типа кинка. Эффективное действие имеет вид,

$$S_{\text{eff}}(\Phi, g)$$
$$= M_*^3 \int d^5X \sqrt{|g|}\left\{-R + 2\lambda + \frac{3\kappa}{M^2}\left(\partial_A\Phi\partial^A\Phi - 2M^2\Phi^2 + \Phi^4\right)\right\}, \tag{33}$$

где нормировка кинетического члена скалярных полей κ унаследована из низкоэнергетического эффективного действия составных скалярных полей и отражает динамику фундаментального взаимодействия пятимерных пре-фермионов [19]. В рассматриваемом нами случае будем считать κ малым параметром, характеризующим взаимодействие гравитации и полей материи.

Используем метрику линейчатой геометрии в гауссовых нормальных координатах,

$$ds^2 = \exp(-2\rho(y))\,dx_\mu dx^\mu + dy^2. \tag{34}$$

При вариации действия (33) по метрике g_{AB} и по скалярному полю получаем систему из трёх уравнений,

$$\Phi'' = -2M^2\Phi + 4\rho'\Phi' + 2\Phi^3, \tag{35}$$

$$\rho'' = \frac{\kappa}{M^2}\,\Phi'^2, \quad \lambda + 6\rho'^2 = \frac{3\kappa}{2M^2}\left\{\Phi'^2 + 2M^2\Phi^2 - \Phi^4\right\}. \tag{36}$$

Из (36) получаем,

$$2M^2\frac{\lambda}{3\kappa} \equiv 2M^2\lambda_{\text{eff}} = 2M^2\Phi^2 - \Phi^4 + \Phi'^2 - \frac{4M^2\rho'^2}{\kappa}. \tag{37}$$

Исходя из вида левой части (37), λ можно отождествить с пятимерной космологической постоянной. Она действительно постоянна, в чём можно убедиться дифференцированием последнего уравнения.

Данные уравнения содержат слагаемые разной малости по κ, и их можно решать по теории возмущений, предполагая что,

$$\frac{|\rho'(y)|}{M} = O(\kappa) = \frac{|\rho''(y)|}{M^2}.$$

Тогда в главном порядке по κ уравнение на поле $\Phi\,(y)$ не содержит метрический фактор,

$$\Phi'' = -2M^2\Phi + 2\Phi^3 + O\,(\kappa)\,, \tag{38}$$

а метрика полностью определяется материей

$$\frac{\rho''}{M^2} = \frac{\kappa}{M^4}\Phi'^2 + O\left(\kappa^2\right). \tag{39}$$

Решение уравнений (38) имеет форму кинка,

$$\Phi_0 = M\tanh\,(My) + O\,(\kappa) \tag{40}$$

и позволяет найти конформный фактор,

$$\rho_0\,(y) = \frac{2\kappa}{3}\left\{\ln\cosh\,(My) + \frac{1}{4}\tanh^2(My) + tMy\right\} + O\left(\kappa^2\right). \tag{41}$$

Заметим, что в данном порядке малости (низшем по безразмерному параметру кривизны κ) возможны решения с асимметричной браной, что соответствует $t \neq 0$. Ниже мы покажем, что глобально такие решения невозможны при спонтанном рождении браны, однако возможны при наличии явного нарушения пространственной симметрии – при наличии дефекта космологической постоянной.

Подставим решения уравнений движения в формулу для вычисления спектра масс (32). В случае симметричной ($t = 0$) браны оказывается, что в данном потенциале существует центробежный барьер, сосредоточенный в нуле и неисчезающий при отключении гравитации.

$$V(y, t = 0, \kappa = 0) \\ = M^2 \left(4 + \frac{2}{\sinh^2(My)} + 8 \frac{1 - 4\cosh^2(My)}{\left(1 + 2\cosh^2(My)\right)^2} \right) \Bigg|_{y \to 0} \sim \frac{2}{y^2}. \quad (42)$$

Напомним, что для существования состояния с массой m необходимо наличие 0-моды в системе с потенциалом $V - m^2 \exp(2\rho)$. Численные расчёты показывают, что в главном порядке по гравитационной постоянной нет ни ноль-моды, ни резонансов при $m^2 > 0$. Таким образом, в окрестности симметричной браны с потенциалом (33) локализованных скалярных состояний нет.

Далее рассмотрим случай $t \neq 0$, при котором метрика по обе стороны браны различна, такое решение возможно в главном порядке по κ. В этом порядке вычислим спектр масс. Параметр асимметрии будем считать тоже малым, что соответствует $t \sim 1$. В главном приближении по κ потенциал с асимметрией имеет вид,

$$V(u = My, t, \kappa = 0) \quad (43) \\ = 2M^2 \left(2 + \frac{-12(1 + t^2)\cosh^4 u + 12t \cosh u \sinh u (1 - 2\cosh^2 u) + 24\cosh^2 u - 3}{4(1 + t^2)\cosh^6 u + 4t \cosh^3 u \sinh u (1 + 2\cosh^2 u) - 3\cosh^2 u - 1} \right).$$

Существование связанных состояний в таком потенциале можно оценить методом квазиклассического квантования. Численные расчёты показывают, что при нулевой массе локализованные нормируемые состояния не возникают, однако локализованные состояния с ненулевой массой возникают при $t > t_{\min}$, $t_{\min} = 0.21\ldots$. Это – резонансы, поскольку $V - m^2 \exp(2\rho)$ экспоненциально убывает на бесконечности и барьер проницаем, хотя вероятность проникновения через него чрезвычайно мала [19].

7. Асимметричные фоновые решения и дефект космологической постоянной

Выясним, когда правомочно выбрать несимметричное решение для метрики (34). Найдём согласованные с уравнениями движения (35),

(36) точные асимптотики метрики и скалярного поля при $y \to \pm\infty$,

$$\Phi_0 \to \mathrm{const} = \Phi_\pm,$$

$$\rho \to k_\pm y, \quad k_\pm = \frac{2}{3} M\kappa(1 \pm t). \tag{44}$$

В пределе $y \to \pm\infty$ имеем $\rho' \to k_\pm$, $\rho'' \to 0$, $\Phi_0' \to 0$. Для изучения асимптотик введём безразмерные параметры,

$$\Phi_\pm = \varphi_\pm M, \quad k_\pm = M\overline{k}_\pm, \quad \lambda_\pm = M^2\overline{\lambda}_\pm.$$

Из уравнений (35), (36) получаем соотношения,

$$2\overline{k}^2 + \frac{1}{3}\overline{\lambda} = \frac{\kappa}{2}\left(2\varphi^2 - \varphi^4\right), \quad \varphi^2 = 1, \quad |\varphi_+| = |\varphi_-|. \tag{45}$$

Итак, для симметричного потенциала асимптотика поля Φ_0 задана с точностью до знака, а асимптотика метрики определяется космологической постоянной (в безразмерных величинах $\overline{\lambda}$),

$$\overline{k}^2 = \frac{\kappa}{4} - \frac{1}{6}\overline{\lambda}. \tag{46}$$

Для существования асимметричных геометрий по обе стороны браны необходимо, чтобы параметр кривизны $\overline{k}$ имел разные по модулю значения на $+\infty$ и $-\infty$, что невозможно при постоянном $\overline{\lambda}$ и асимптотиках фонового скалярного поля, одинаковых по модулю. Таким образом, для потенциалов, симметричных относительно отражения $\Phi \to -\Phi$, согласовать решение с асимметричной геометрией невозможно.

Для обеспечения различных асимптотик необходимо ввести асимметрию в космологическую постоянную или нарушить симметрию относительно отражения $\Phi \to -\Phi$, что порождает асимметрию решений уравнений движения типа кинка относительно $y \to -y$. Этого можно достигнуть добавив к действию (33) дефект,

$$\mathcal{L}_{def} = 6\kappa M_*^3 M\eta(y)\Phi(y), \tag{47}$$

где η – некоторая безразмерная функция, которая имеет следующие пределы $\eta \to \eta_\pm$ при $y \to \pm\infty$.

Уравнения движения (35), (36) с учётом дефекта имеют вид,

$$\Phi'' = -2M^2\Phi + 4\rho'\Phi' + 2\Phi^3 + M^3\eta, \tag{48}$$

$$\rho'' = \frac{\kappa}{M^2}\,\Phi'^2, \quad \lambda + 6\rho'^2 = \frac{3\kappa}{2M^2}\left\{\Phi'^2 + 2M^2\Phi^2 - \Phi^4 - 2M^3\eta\Phi\right\}. \tag{49}$$

Из них следует, что космологическая “постоянная” должна зависеть от y так, чтобы на решениях уравнений движения выполнялось соотношение,

$$\frac{2M^2}{3\kappa}\lambda' + 2M^3\eta'\Phi = \left((\Phi')^2 + 2M^2\Phi^2 - \Phi^4 - \frac{4M^2(\rho')^2}{\kappa}\right)' - 2M^3\eta\Phi' = 0.$$

Это возможно только, если ее (фиксированная) функциональная зависимость от y в точности совпадает с решением $\Phi_0(y)$,

$$\lambda(y) = \lambda_0 + 3\kappa M\int_0^y dy'\eta'(y')\Phi_0(y'), \quad \lambda_0 = \mathrm{const}\,. \tag{50}$$

Если функция дефекта – не постоянная, $\eta'(y) \neq 0$, то асимптотики космологической функции в пределе $y \to \pm\infty$, вообще говоря, различны $\lambda(y) \to \lambda_\pm$.

Переходя к асимптотикам и безразмерным величинам получаем,

$$2\overline{k}^2 + \frac{1}{3}\overline{\lambda} = \frac{\kappa}{2}\left\{2\varphi^2 - \varphi^4 - 2\eta\varphi\right\}, \quad 0 = -2\varphi + 2\varphi^3 + \eta.$$

Уравнение на поле φ имеет 3 решения, из них одно (около $\varphi = 0$) соответвует неустойчивому состоянию, максимуму. Для вычисления остальных двух решений будем считать $\eta \ll 1$ и получим,

$$\varphi_\pm = \pm 1 - \frac{\eta_\pm}{4}, \tag{51}$$

$$2\overline{k}_\pm^2 = \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{3}\overline{\lambda}_\pm \mp \kappa\eta_\pm. \tag{52}$$

Эти асимметричные решения для геометрий объемлющего пространства, разделённого браной, следует сопоставить с формулой (44),

$$\overline{k}_\pm = \frac{2}{3}\kappa(1 \pm t).$$

Отсюда находим связи между параметром асимметрии t, асимптотиками дефекта и космологической функции,

$$\begin{aligned} \frac{32}{9} t\kappa^2 &= \frac{1}{3}(\lambda_- - \lambda_+) - \kappa(\eta_+ + \eta_-), \\ \frac{16}{9}\kappa^2(1+t^2) &= \kappa - \frac{1}{3}(\lambda_- + \lambda_+) + \kappa(\eta_- - \eta_+) > 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Таким образом, асимптотики дефекта скалярной материи и космологическая постоянная $(\lambda_- + \lambda_+)/2)$ полностью определяют асимметрии конформного фактора и космологической функции.

8. Заключение

В данной работе рассмотрена модель доменной стенки ("толстой браны") в некомпактном пятимерном пространстве-времени с асимметричными геометриями по разные стороны браны, порождённой самодействием фермионов в присутствии гравитации. На основе полученного полного действия по квадратичным флуктуациям для фоновой метрики и полей скалярной материи, в специальной калибровке, исследован спектр масс состояний на бране для (а)симметричных геометрий по обе стороны от неё. Асимметричные геометрии в объемлющем пространстве обеспечиваются асимметрией потенциала скалярных полей и согласованным с ней дефектом космологической постоянной. В модели [19] с минимальным взаимодействием гравитации и скалярных полей для симметричной анти-де-Ситтеровской геометрии локализованных состояний в окрестности браны нет. Для случая анти-де-Ситтеровских геометрий, несимметричных относительно отражения пятой координаты, такие состояния возникают. При разных знаках коэффициентов убывания конформного фактора для пространств анти-де Ситтера по обе стороны браны будет существовать только медленно распадающийся резонанс. Этот случай представляет физический интерес ввиду того, что время жизни резонанса больше предполагаемого времени жизни протона (ср. [19]). Ожидается, что вероятность туннелирования имеет порядок $\exp\{-3\ln\left(\frac{2M}{m}\right)/\kappa\}$, где $\kappa < 10^{-8}$. Вместе с тем, если конформный фактор начинает расти с одной из сторон браны, то могут появиться связанные состояния – ноль-моды, однако в этом случае возникает проблема с локализацией на бране безмассового гравитона.

Асимметричные решения на бране были получены в главном порядке разложения по малому параметру, соответствующему кривизне объемлющего пространства. Из уравнений на асимптотики получается, что такая асимметрия возможна только при добавлении дефекта к действию. Для асимметрий, обеспечивающих появление скалярных квазилокализованных состояний, достаточно выбирать постоянный дефект (47) в потенциале полей материи, (53), но возможен и более сложный дефект при котором можно получить требуемую асимметрию решений. Дефект полей материи сопровождается дефектом космологической "постоянной" для того, чтобы обеспечить согласованность уравнений движения. Если первый порядок при выборе нужного дефекта соответствует по величине первому порядку теории возмущений по кривизне, то разложение по кривизне является равномерным по пятой координате.

В дальнейшем планируется изучить физику низких энергий на "толстых бранах" с асимметричными геометриями, а также отклонения от закона Ньютона для различных геометрий по разные стороны браны.

Литература

1. В. А. Рубаков, — УФН **171** (2001), 913–938; V. A. Rubakov, — Phys.Usp. **44** (2001), 871; Phys. Usp. **46** (2003), 211.
2. А. О. Барвинский, — УФН **175** (2005), 569–601.
3. I. Antoniadis, *Physics With Large Extra Dimensions.* In: Beatenberg 2001, High-energy physics, 301; `hep-th/0102202`.
4. Yu. A. Kubyshin, *Models with Extra Dimensions and Their Phenomenology.* (2001) `hep-ph/0111027`.
5. J. Hewett, M. Spiropulu, — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **52** (2002), 397.
6. R. Dick, — Class. Quant. Grav. **18** (2001), R1.
   R. Maartens, — Living Rev. Rel. **7** (2004), 7.
7. P.Brax, C.van de Bruck, A. C. Davis, — Rept. Prog. Phys. **67** (2004), 2183.
8. G. Gabadadze, — ICTP Lectures on Large Extra Dimensions (2003) `hep-ph/0308112`.
9. F. Feruglio, — Eur. Phys. J. **C33** (2004), S114.
10. C. Csaki, — TASI Lectures on Extra Dimensions and Branes (2004) `hep-ph/0404096`.
11. S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov, P. Tinyakov, — Phys. Rev. **D62** (2000), 5928–5931.
12. M. Gremm, — Phys. Lett. **B478** (2000), 434–438; Phys. Rev. **D62** (2000), 044017.
13. C. Csaki, J. Erlich, T. J. Hollowood, — Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 5932–5935.
    C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood, Y. Shirman, — Nucl. Phys. **B581** (2000), 309 `hep-th/0001033`.
    C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean, T. Hollowood, — Nucl. Phys. **B584** (2000), 359 `hep-th/0004133`.

14. M. Giovannini, — Phys. Rev. **D64** (2001), 064023; Class. Quant. Grav. — **20** (2003), 1063–1076.
15. A. Kehagias, K. Tamvakis, — Phys. Lett. **B504** (2001), 38–46; Mod. Phys. Lett. **A17** (2002), 1767–1774.
16. D. Bazeia, A. R. Gomes, — JHEP **0405** (2004), 012 `hep-th/0403141`.
D. Bazeia, C. Furtado, A. R. Gomes, — JCAP **0402** (2004), 002 `hep-th/0308034`.
17. M. Shaposhnikov, P. Tinyakov, K. Zuleta, — Phys. Rev. **D70** (2004), 104019.
18. A. A. Andrianov, L. Vecchi, — Phys. Rev. **D77** (2008), 044035 `hep-th/0711.1955`.
19. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, P. Giacconi, R. Soldati, — JHEP **07** (2005), 003.
20. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, P. Giacconi, R. Soldati, — JHEP **07** (2003), 063.
21. J. M. Bardeen, — Phys. Rev. **D22** (1980), 1882.

Andrianov A. A., Andrianov V. A., Safonov A. V. Branes with asymmetric geometries in the bulk and localization of scalar fields.

The model of a domain wall ("thick brane") in noncompact five-dimensional space-time with asymmetric geometries aside the brane induced by fermion self-interaction in the presence of gravity is proposed. Asymmetric geometries in the bulk are provided by an asymmetry in the scalar field potential and a related defect of cosmological constant. The possibility of localization of scalar modes on such "thick branes" is investigated.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: sashaandrianov@gmail.com
v.andriano@rambler.ru
coul_turner@mail.ru

Поступило 10 марта 2010 г.