Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 374, 2010 г.

Н. И. Абаренкова, Н. М. Боголюбов

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ СПИНОРНОГО КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА С ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1. Введение

Теория атомных конденсатов Бозе–Эйнштейна с внутренними степенями свободы стала активно развиваться с тех пор, как использование оптических ловушек позволило разморозить спиновые степени свободы. В таких системах наблюдаются такие новые динамические эффекты такие как фрагментация, спиновое смешивание [1–6]. Недавние исследования показали, что могут возникнуть ситуации, когда и дипольные взаимодействия начинают играть существенную роль [7]. Из-за сложности таких систем актуальными становятся упрощенные модели, получаемые применением различных аппроксимаций к первоначальной задаче многих тел.

В нашей статье мы изучаем модель спинорного конденсата с длиннодействующими диполь-дипольными взаимодействиями, предложенную в [4]. Представление динамических переменных модели как генераторов алгебры $su(1,1)$ позволяет привести гамильтониан к виду, к которому применима схема квантового метода обратной задачи [8–10], и решить задачу, найдя собственные функции и собственные значения.

Преимущество рассматриваемого приближения заключается в том, что, используя бозонную реализацию алгебры $su(1,1)$, одновременно можно решить некоторое число моделей с различными атом-атомными взаимодействиями [11]. Описываемый метод позволяет также установить связь рассматриваемых моделей с моделями квантовой оптики [12].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрена система бозонных атомов со спином $F = 1$, в которой в дополнение к

Ключевые слова : спинорный конденсат Бозе–Эйнштейна, квантовый метод обратной задачи, $su(1,1)$ алгебра.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 07-01-00358).

контактным взаимодействиям включены дипольные взаимодействия, и получено выражение для гамильтониана в терминах операторов угловых моментов. В разделе 3 гамильтониан выражен через генераторы различных представлений алгебры $su(1,1)$. Для решения модели в разделах 4 и 5 использован квантовый метод обратной задачи. В разделе 6 обсуждается основное состояние модели, и в разделе 7 модель рассматривается в отсутствие дипольного взаимодействия.

2. Спинорный конденсат с диполь-дипольным взаимодействием

Бозонные атомы со спином $F = 1$ и массой M описываются трехкомпонентным векторным полем $\psi_\alpha(\vec{x})$ ($\alpha = -1, 0, 1$), компоненты которого ассоциируются со спиновыми состояниями атомов. Эти поля удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям $[\psi_\alpha(\vec{x}), \psi^\dagger_\beta(\vec{x}')] = \delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{x}')$. В наиболее общем виде гамильтониан, описывающий динамику разреженного газа из бозонных атомов при низких температурах с дипольным взаимодействием, может быть представлен как сумма [4]:

$$H = H_{\mathrm{spd}} + H_{\mathrm{dip}}, \tag{1}$$

в которой гамильтониан H_{spd} описывает δ-функциональное взаимодействие между атомами, находящимися во внешнем, не зависящим от спинов, удерживаемом потенциале $V_{\mathrm{ext}}(\vec{x})$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{spd}} = \sum_\alpha \int d^3x \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\mathrm{ext}}(\vec{x}) \right) \psi_\alpha(\vec{x}) \\ + \int d^3x : \left\{ \frac{c_0}{2}\widehat{N}^2(\vec{x}) + \frac{c_2}{2}\mathbf{S}(\vec{x}) \cdot \mathbf{S}(\vec{x}) \right\} :, \end{aligned} \tag{2}$$

а гамильтониан H_{dip} описывает диполь-дипольное взаимодействие

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{dip}} = \frac{c_d}{2} \int d^3x_1 \int d^3x_2 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \\ \times : \left\{ \mathbf{S}(\vec{x}_1) \cdot \mathbf{S}(\vec{x}_2) - 3S^z(\vec{x}_1)S^z(\vec{x}_2) \right\} : . \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагается, что ось симметрии конденсата выбрана вдоль оси квантования z. Константы c_0 и c_2 являются постоянными парного и спинового взаимодействия соответственно, а c_d – постоянная дипольного взаимодействия. Символ :: в этих формулах означает нормальное упорядочивание, которое ставит операторы уничтожения справа от операторов рождения.

Член спинового обменного взаимодействия в (2) может быть представлен в виде

$$\mathbf{S}(\vec{x}) \cdot \mathbf{S}(\vec{x}) = S^z(\vec{x})S^z(\vec{x}) + \frac{1}{2}S^+(\vec{x})S^-(\vec{x}) + \frac{1}{2}S^-(\vec{x})S^+(\vec{x}). \qquad (4)$$

Операторы спиновой плотности $S^m(\vec{x})$ выражаются через псевдобозонные представления спиновых матриц

$$S^m(\vec{x}) = \sum_{\alpha,\beta} \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) F^m_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{x}), \qquad (5)$$

с матричными элементами m-ой компоненты спина-1 $F^m_{\alpha\beta}$:

$$F^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; F^+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; F^+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор плотности $\widehat{N}(\vec{x})$ в гамильтониане H_{spd} (2) выражается через псевдобозонное представление 3×3 единичной матрицы:

$$N(\vec{x}) = \sum_{\alpha,\beta} \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \delta_{\alpha\beta} \psi_\beta(\vec{x}). \qquad (6)$$

Отметим, что гамильтониан (1) инвариантен относительно замены $\psi_1(\vec{x}) \leftrightarrow \psi_{-1}(\vec{x})$, $\psi^\dagger_1(\vec{x}) \leftrightarrow \psi^\dagger_{-1}(\vec{x})$.

Операторы спиновой плотности $S^m(\vec{x})$ (5) удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [S^+(\vec{x}), S^-(\vec{x}')] &= 2S^z(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [S^z(\vec{x}), S^\pm(\vec{x}')] &= \pm S^\pm(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \end{aligned} \qquad (7)$$

и коммутируют с оператором плотности

$$[N(\vec{x}), S^z(\vec{x}')] = [N(\vec{x}), S^\pm(\vec{x}')] = 0 \qquad (8)$$

Операторы полного спина

$$S^m = \int S^m(\vec{x}) d^3x, \quad m = z, \pm 1, \tag{9}$$

подчиняются стандартным коммутационным соотношениям алгебры $su(2)$ $[S^+, S^-] = 2S^z$, $[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$.

Нетрудно проверить, что и оператор полного числа атомов

$$\widehat{N} = \int N(\vec{x}) d^3x, \tag{10}$$

и z-компонента полного спина S^z (9) коммутируют с гамильтонианом (1) и потому являются интегралами движения.

Поскольку взаимодействие плотность-плотность сильнее как спинового, так и дипольного взаимодействий ($c_0 \gg |c_2| \gg c_d$) [4], для решения модели можно использовать одномодовую аппроксимацию [1, 2]. В этом случае оператор $\psi_\alpha(\vec{x})$ заменяется на произведение

$$\begin{aligned} &\psi_\alpha(\vec{x}) \sim a_\alpha \phi(\vec{x}), \\ &\psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \sim a^\dagger_\alpha \overline{\phi}(\vec{x}) \,, \alpha = \pm 1, 0; \end{aligned} \tag{11}$$

где $a_\alpha, a^\dagger_\alpha$ операторы уничтожения, рождения бозонов со спиновыми состояниями α, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям $[a_\alpha, a^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$, а $\phi(\vec{x})$ независящая от спина волновая функция основного состояния симметричного гамильтониана

$$H_{\mathrm{sym}} = \sum_\alpha \int d^3x \psi^\dagger_\alpha(\vec{x}) \Big(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\mathrm{ext}}(\vec{x}) - \mu \Big) \psi_\alpha(\vec{x}) + \frac{c_0}{2} \int d^3x : N^2(\vec{x}) : \tag{12}$$

$$= \widehat{N} \int d^3x \overline{\phi}(\vec{x}) \Big(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\mathrm{ext}}(\vec{x}) - \mu \Big) \phi(\vec{x}) + \frac{c_0}{2} : \widehat{N}^2 : \int d^3x |\phi(\vec{x})|^4 .$$

Нормированная на единицу Функция $\phi(\vec{x})$ $\big(\int |\phi(\vec{x})|^2 d^3x = 1 \big)$, определяется условием экстремума

$$\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \langle N | H_{\mathrm{sym}} | N \rangle = 0 \tag{13}$$

в секторе с фиксированным числом частиц. Здесь Фоковский вектор $|N\rangle \equiv |N_1, N_0, N_{-1}\rangle$ задается тремя числами заполнения N_α соответствующих спиновых мод: $a_\alpha^\dagger a_\alpha |N\rangle = N_\alpha |N\rangle$, а μ – химический потенциал. Это условие экстремума приводит к уравнению Гросса–Питаевского

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\rm ext}(\vec{x})\right)\phi(\vec{x}) + c_0 N|\phi(\vec{x})|^2\phi(\vec{x}) = \mu\phi(\vec{x}). \qquad (14)$$

В описанном одномодовом приближении гамильтониан (1) имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} H &= \mu\widehat{N} - :\left\{g_0\widehat{N}^2 - g_2\mathbf{S}^2 + g_d\left(\mathbf{S}^2 - 3(S^z)^2\right)\right\}: \\ &= \mu\widehat{N} - g_0\widehat{N}(\widehat{N}-1) + g_2(\mathbf{S}^2 - 2\widehat{N}) \\ &- g_d\left(\mathbf{S}^2 - 3(S^z)^2 + \widehat{N} - 3a_0^\dagger a_0\right). \end{aligned} \qquad (15)$$

Здесь g_0, g_2, g_d перенормированные константы взаимодействий

$$\begin{aligned} &2g_i = c_i\int|\phi(\vec{x})|^4 d^3x, \quad (i=0,2), \\ &4g_d = n\ c_d\int d^3x_1 d^3x_2|\phi(\vec{x}_1)|^2|\phi(\vec{x}_2)|^2(1-\cos^2\theta)/|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3, \end{aligned} \qquad (16)$$

где θ – полярный угол разности $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$. Операторы полного спина (9) теперь имеют вид

$$S^+ = \sqrt{2}\left(a_1^\dagger a_0 + a_0^\dagger a_{-1}\right), \quad S^- = (S^+)^\dagger, \quad S^z = a_1^\dagger a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1}. \qquad (17)$$

В гамильтониане (15) оператор $\mathbf{S}^2$ – это квадрат оператора полного углового момента

$$\mathbf{S}^2 = (S^z)^2 + \frac{1}{2}(S^+S^- + S^-S^+), \qquad (18)$$

то есть оператор Казимира алгебры $su(2)$, коммутирующий со всеми операторами полного спина S^m (17).

Оператор числа частиц

$$\widehat{N} = a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1} + a_0^\dagger a_0. \qquad (19)$$

коммутирует с гамильтонианом (15), поэтому мы можем отбросить члены зависящие от оператора числа частиц, отвечающие за плотность-плотностные взаимодействия в (15), и рассматривать лишь спиновую часть модели [4]:

$$H_{\rm sd} = (g_2 - g_d)\mathbf{S}^2 + 3g_d\left((S^z)^2 + a_0^\dagger a_0\right). \qquad (20)$$

3. Дипольный спинорный конденсат и генераторы алгебры $su(1,1)$

Для определения собственных функций и собственных значений модели удобно представить гамильтониан (20), через генераторы алгебры $su(1,1)$. Генераторы этой алгебры удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathcal{K}^0, \mathcal{K}^{\pm}] = \pm\mathcal{K}^{\pm}, \quad [\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-] = -2\mathcal{K}^0. \tag{21}$$

Оператор Казимира алгебры $su(1,1)$ задается выражением

$$\mathcal{K}^2 = (\mathcal{K}^0)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathcal{K}^+\mathcal{K}^- + \mathcal{K}^-\mathcal{K}^+\right). \tag{22}$$

Существуют несколько представлений алгебры $su(1,1)$. Мы будем использовать представление, основывающееся на обычных бозонных операторах рождения и уничтожения.

Для описания состояний атомов со спиновыми модами ± 1 воспользуемся двухбозонным представлением этой алгебры

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_{-1}^\dagger a_{-1} + 1), \\ K^+ &= a_1^\dagger a_{-1}^\dagger, \quad K^- = a_1 a_{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Оператор Казимира (22) для этого двузбозонного представления может быть записан как

$$\mathcal{K}_K^2 = \frac{1}{4}\left((S^z)^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left((a_1^\dagger a_1 - a_{-1}^\dagger a_{-1})^2 - 1\right). \tag{24}$$

Операторы K^+ (K^-) имеют смысл рождения (уничтожения) бозонной пары. Оператор S^z равный z-компоненте оператора полного спина (17) коммутирует со всеми операторами в (23), и, значит, число частиц со спиновой модой $\alpha = 1$ может отличаться от числа частиц со спиновой модой $\alpha = -1$ лишь на фиксированное число, а именно на собственное значение оператора S^z. Обозначим это собственное число через m, и без потери общности можно считать, что m положительное целое число.

Для описания атомов с нулевой спиновой модой воспользуемся однобозонным представлением алгебры $su(1,1)$, которое может быть реализовано операторами

$$
\begin{aligned}
B^0 &= \frac{1}{2}a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{4}, \\
B^+ &= -\frac{1}{2}(a_0^\dagger)^2, \quad B^- = -\frac{1}{2}(a_0)^2.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Оператор Казимира этого представления

$$\mathcal{K}_B^2 = -3/16. \tag{26}$$

Выраженный к терминах генераторов алгебры $su(1,1)$ оператор числа частиц (19) принимает вид

$$\widehat{N} = 2(B^0 + K^0) - \frac{3}{2}, \tag{27}$$

в то время как квадрат оператора момента (18) равен

$$\mathbf{S}^2 = 4\Big\{\frac{1}{4}((S^z)^2 - 1) + 2B^0K^0 - B^+K^- - B^-K^+\Big\}. \tag{28}$$

В результате гамильтониан модели (20) принимает следующий вид

$$H_{\mathrm{sd}} = 4(g_2 - g_d)\left\{2H_o + \frac{(S^z)^2 - 1}{4} - \Big((S^z)^2 - \frac{1}{2}\Big)\delta\right\} \tag{29}$$

с

$$2H_o = 2B^0K^0 - B^+K^- - B^-K^+ - 2\delta B^0, \tag{30}$$

где

$$\delta = -\frac{3}{4}\frac{g}{1-g} \tag{31}$$

и $g = g_d/g_2$. Сравнивая уравнения (28) и (29) мы находим, что гамильтониан H_{sd} совпадает с квадратом оператора момента $\mathbf{S}^2$ при отсутствии диполь-дипольного взаимодействия $g_d = 0$:

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{g_2}H_{\mathrm{sd}}\mid_{\delta=0} \equiv \frac{1}{g_2}H_{\mathrm{sp}}. \tag{33}$$

Сохраняющимися величинами для гамильтониана (29), а соответственно и (20), являются полное число частиц и разность между числами частиц с противоположными спинами (z-компонента полного спина):

$$[H_{\mathrm{sd}}, \widehat{N}] = [H_{\mathrm{sd}}, S^z] = 0. \tag{33}$$

Коммутация гамильтониана с операторм Казимира (26) $[H_{\mathrm{sd}}, \mathcal{K}_B^2] = 0$ означает, что четность числа частиц в спиновой моде с $\alpha = 0$ является также сохраняющимся числом. Эти законы сохранения следуют непосредственно из того факта, что гамильтониан описывает рождение и уничтожение пар бозонных атомов.

4. $su(1,1)$ алгебра токов и интегралы движения

Для применения алгебраического анзатца Бете к решению модели, описываемой гамильтонианом (29) давайте введем операторы

$$X^0(\lambda) = \frac{B^0}{\delta - \lambda} - \frac{K^0}{\lambda} + 1, \qquad X^\pm(\lambda) = \frac{B^\pm}{\delta - \lambda} - \frac{K^\pm}{\lambda}. \tag{34}$$

Мы покажем, что гамильтониан (29) и его собственные вектора могут быть построены с помощью этих операторов. В формулах (34) λ – это комплексная переменная, в то время как δ – это постоянная, определенная в предыдущем разделе формулой (31).

Операторы (34) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [X^+(\lambda), X^-(\mu)] &= -\frac{2}{\lambda - \mu}\left(X^0(\lambda) - X^0(\mu)\right), \\ [X^0(\lambda), X^\pm(\mu)] &= \pm\frac{1}{\lambda - \mu}\left(X^\pm(\lambda) - X^\pm(\mu)\right), \\ [X^+(\lambda), X^+(\mu)] &= [X^-(\lambda), X^-(\mu)] = [X^0(\lambda), X^0(\mu)] = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Эти равенства проверяются применением коммутационных соотношений операторов (23), (25) и равенством

$$\frac{1}{(\epsilon - \lambda)(\epsilon - \mu)} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(\frac{1}{\epsilon - \lambda} - \frac{1}{\epsilon - \mu}\right). \tag{36}$$

Алгебра (35) известна как $su(1,1)$ алгебра токов.

По аналогии с оператором Казимира (22) мы вводим семейство операторов, зависящих от произвольного комплексного числа λ

$$t(\lambda) = \left(X^0(\lambda)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(X^+(\lambda)X^-(\lambda) + X^-(\lambda)X^+(\lambda)\right). \tag{37}$$

Наиболее важное свойство этих операторов заключается в том, что они коммутируют между собой при произвольных комплексных числах λ и μ:

$$[t(\lambda), t(\mu)] = 0. \tag{38}$$

Это свойство проверятся прямым вычислением с помощью коммутационных соотношений (35). Оператор $t(\lambda)$ может быть рассмотрен как порождающий функционал интегралов движения.

Подставляя (34) в (37) мы имеем

$$\begin{aligned} t(\lambda) = 1 + \left(\frac{B^0}{\delta-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{K^0}{\lambda}\right)^2 - \frac{B^+B^- + B^-B^+}{2(\delta-\lambda)^2} - \frac{K^+K^- + K^+K^-}{2\lambda^2} \\ - \frac{2K^0}{\lambda} + \frac{2B^0}{\delta-\lambda} - \frac{2B^0}{(\delta-\lambda)}\frac{K^0}{\lambda} + \frac{B^+}{(\delta-\lambda)}\frac{K^-}{\lambda} + \frac{B^-}{(\delta-\lambda)}\frac{K^+}{\lambda}. \end{aligned} \tag{39}$$

Коэффициент при простом полюсе этого выражения при $\lambda = \delta$ равен

$$\operatorname{Re} s\left.\right|_{\lambda=\delta} t(\lambda) = 2B^0 - \frac{1}{\delta}\left\{2B^0K^0 - B^+K^+ - B^-K^-\right\}, \tag{40}$$

и мы имеем следующее выражение для гамильтониана (30)

$$2H_o = -\delta \operatorname{Re} s\big|_{\lambda=\delta} t(\lambda). \tag{41}$$

Операторы Казимира (24) и (26) в выражении (39) являются полюсами второго порядка, так что для гамильтониана (29) мы имеем

$$H_{\rm sd} = 4(g_2 - g_d)\left\{ -\delta \operatorname{Re} s\big|_{\lambda=\delta} t(\lambda) + \frac{(S^z)^2 - 1}{4} - \left((S^z)^2 - \frac{1}{2}\right)\delta\right\}, \tag{42}$$

Из (39) и (38) следует ряд коммутационных соотношений

$$[t(\lambda), H_{\rm sd}] = [t(\lambda), N] = [t(\lambda), S^z] = [t(\lambda), \mathcal{K}_B^2] = 0. \tag{43}$$

Зная собственные функции и собственные значения порождающего оператора $t(\lambda)$ (37), и применяя уравнение (42), мы можем найти собственные значения гамильтониана.

5. Решение модели

Прежде чем развивать алгебраическую схему диагонализации порождающего функционала $t(\lambda)$ (37) вспомним, что базис унитарного неприводимого представления алгебры $su(1,1)$ составлен из собственных векторов $|n\rangle_\nu$ оператора $\mathcal{K}^0$ и оператора Казимира $\mathcal{K}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^0|n\rangle_\nu &= (n+\nu)|n\rangle_\nu, \\ \mathcal{K}^2|n\rangle_\nu &= \nu(\nu-1)|n\rangle_\nu, \end{aligned} \tag{44}$$

где ν – это так называемый индекс Баргманна. Операторы $\mathcal{K}^{\pm}$ действуют как повышающий и понижающий операторы соответственно, на собственных состояниях опертора $\mathcal{K}^0$. Ненормированные состояния $|n\rangle_\nu$ могут быть построены последовательным применением оператора $\mathcal{K}^+$ к порождающему вектору $|0\rangle_\nu$, задаваемому уравнением $\mathcal{K}^-|0\rangle_\nu = 0$:

$$|n\rangle_\nu = \left(\mathcal{K}^+\right)^n |0\rangle_\nu. \tag{45}$$

Пространство представления двухбозонной реализации (23), (24) алгебры $su(1,1)$ состоит из двухмодовых фоковских состояний, являющихся прямым произведением состояний со спиновыми модами с $\alpha = \pm 1$. Порождающий вектор этой реализации определяется уравнением

$$K^-|0\rangle_{\nu_2} = 0. \tag{46}$$

Мы можем выбрать $|0\rangle_{\nu_2} \equiv |m\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}$ или $|0\rangle_{\nu_2} \equiv |0\rangle^{(1)} \otimes |m\rangle^{(-1)}$, $(m = 0, 1, ...)$. Индекс Баргманна этой реализации равен $\nu_2 = \frac{m+1}{2}$. Из (23) следует, что эти состояния являются собственными состояниями оператора S^z:

$$S^z|0\rangle_{\nu_2} = \alpha m|0\rangle_{\nu_2}. \tag{47}$$

Представление пространства в однобозонной реализации (25) разлагается в прямую сумм двух неприводимых компонент образованных состояниями $|2n + s\rangle$ с четным числом частиц $(s = 0)$ в одном случае или состояниями с нечетным числом частиц $(s = 1)$ в другом. Индекс Баргманна этого представления равен $\nu_1 = \frac{2s+1}{4}$, и порождающий вектор определяется уравнением

$$B^-|0\rangle_{\nu_1} = 0. \tag{48}$$

Пространтсво с $\nu_1 = \frac{1}{4}$ $(s = 0)$ построено из фоковского вакуума $|0\rangle_{\nu_1} \equiv |0\rangle^{(0)}$, а пространство с $\nu_1 = \frac{3}{4}$ $(s = 1)$ построено из одночастичного состояния $|0\rangle_{\nu_1} \equiv |1\rangle^{(0)}$.

Из определения операторов $X^{\pm}(\lambda), X^0(\lambda)$ (34) и оператора числа частиц $\widehat{N}$ (27) следует что

$$\widehat{N}X^{\pm}(\lambda) = X^{\pm}(\lambda)\left(\widehat{N} \pm 2\right), \quad \widehat{N}X^0(\lambda) = X^0(\lambda)\widehat{N}. \tag{49}$$

Таким образом, $X^{\pm}(\lambda)$ действует как оператор рождения (уничтожения) пары бозонных квазичастиц.

Состояние, являющееся прямым произведением порождающих состояний (46) и (48),

$$|\Omega\rangle = |0\rangle_{\nu_1} \otimes |0\rangle_{\nu_2}, \tag{50}$$

которое мы будем называть вакуумным состоянием, удовлетворяет следующим уравнениям

$$X^-(\lambda)|\Omega\rangle = 0, \quad X^0(\lambda)|\Omega\rangle = x(\lambda)|\Omega\rangle, \tag{51}$$

с вакуумным собственным значением оператора $X^0(\lambda)$ равным

$$x(\lambda) = 1 + \frac{\nu_1}{\delta - \lambda} - \frac{\nu_2}{\lambda}, \tag{52}$$

где ν_1, ν_2 – это индексы Баргманна однобозонного и двухбозонного представлений соответственно. Вакуумное состояние является собственным состоянием оператора числа частиц (27)

$$\widehat{N}|\Omega\rangle = (s+m)|\Omega\rangle, \tag{53}$$

и z-компоненты полного спина $S^z|\Omega\rangle = \alpha m|\Omega\rangle$. Легко проверить, что вакуумное состояние (50) является собственным вектором порождающего функционала $t(\lambda)$

$$t(\lambda)|\Omega\rangle = k(\lambda)|\Omega\rangle \tag{54}$$

с собственным значением

$$k(\lambda) = \left(1 + \frac{\nu_1}{\delta - \lambda} - \frac{\nu_2}{\lambda}\right)^2 - \frac{\nu_1}{(\delta-\lambda)^2} - \frac{\nu_2}{\lambda^2}. \tag{55}$$

Благодаря законам сохранения (43) параметрами собственных векторов оператора $t(\lambda)$ являются: полное число частиц в системе N, значение m абсолютной величины z-компоненты полного спина и четность s спиновой моды с $\alpha = 0$. Мы будем искать эти собственные вектора в форме векторов Бете

$$|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_p})\rangle = \prod_{j=1}^{N_p} X^+(\lambda_j)|\Omega\rangle. \tag{56}$$

Благодаря (49), число частиц в этом состоянии есть

$$\widehat{N}|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle = N|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle, \\ N\equiv 2N_p+s+m, \tag{57}$$

так что число операторов $X^+(\lambda)$ в произведении (56), соответствующее числу пар бозонных квазичастиц в системе, равно $2N_p = N - m - s$. Состояние (56) очевидно удовлетворяет соотношениям

$$S^z|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle = \alpha m|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle, \tag{58}$$

$$(-1)^{\widehat{N}-|S^z|}|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle = (-1)^s|\Phi_{N,m,s}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{N_p})\rangle.$$

Для заданного числа частиц N, возможные значения квантовых чисел m и s лежат в интервале $0\le m+s\le N$.

Вектора (56) являются собственными векторам $t(\lambda)$, если параметры λ_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$1+\frac{\nu_1}{\delta-\lambda_j}-\frac{\nu_2}{\lambda_j}=\sum_{l\neq j}^{N_p}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_l};\quad j=1,\dots,N_p. \tag{59}$$

В Приложении мы покажем, что существуют N_p+1 наборов $\left\{\lambda_j^\sigma\right\}_{j=1}^{N_p}$ решений этих N_p уравнений ($\sigma=1,2,\dots,N_p+1$). Они вещественны, $\lambda_j\in\mathbb{R}$, положительны, все различны и не равны ни δ, ни 0.

N-частичные собственные значения $\Theta^\sigma_{N,m,s}(\mu)$ оператора $t(\mu)$ (37) равны

$$\Theta^\sigma_{N,m,s}(\mu)=k(\mu)-\sum_{j=1}^{N_p}\frac{2\nu_1}{(\delta-\mu)(\delta-\lambda_j^\sigma)}-\sum_{j=1}^{N_p}\frac{2\nu_2}{\mu\lambda_j^\sigma}, \tag{60}$$

с функцией $k(\mu)$, задаваемой уравнением (55), и $\lambda_j^\sigma\in\left\{\lambda_j^\sigma\right\}_{j=1}^{N_p}$.

Из уравнения (42) следует, что N-частичные собственные значения гамильтониана H_{sd} (29) с фиксированным значением третьей компоненты спина m и четностью s равны

$$\frac{1}{4(g_2-g_d)}E^\sigma_{N,m,s}=-\delta\,\mathrm{Re}\,s\big|_{\mu=\delta}\Theta^\sigma_{N,m,s}(\mu)+\frac{m^2-1}{4}-\Big(m^2-\frac{1}{2}\Big)\delta. \tag{61}$$

Подставляя (60) в это выражение и используя значения индексов Баргманна, получаем

$$\frac{1}{4(g_2-g_d)}E^{\sigma}_{N,m,s} = -2\delta\nu_1+2\nu_1\nu_2+\sum_{j=1}^{N_p}\frac{2\nu_1\delta}{\delta-\lambda^{\sigma}_j}+\frac{m^2-1}{4}-\Big(m^2-\frac{1}{2}\Big)\delta$$

$$=\frac{1}{4}(m+1)(m+2s)-\delta(m^2+s)+\sum_{j=1}^{N_p}\frac{2\nu_1\delta}{\delta-\lambda^{\sigma}_j}, \qquad (62)$$

где λ_j это решения уравнений Бете (59). Равенство $(m+1)(m+2s) = (N-2N_p+1)(N-2N_p)$ справедливо для значений $s=0,1$ и альтернативное выражение для энергии имеет вид

$$\frac{1}{4(g_2-g_d)}E^{\sigma}_{N,m,s} = \frac{1}{4}\left[N(N+1)-2N_p(2N-2N_p+1)\right] - \delta\left[N-2N_p+m(m-1)\right]+\sum_{j=1}^{N_p}\frac{2\nu_1\delta}{\delta-\lambda^{\sigma}_j}. \qquad (63)$$

Другое выражение для собственных энергий может быть получено из уравнения (59). Умножая его на λ_j, затем суммируя по всем j и учитывая равенство

$$\sum_{j=1}^{N_p}\sum_{i\neq j}^{N_p}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}=\frac{1}{2}N_p(N_p-1), \qquad (64)$$

мы приходим к следующему виду собственных значений гамильтониана (29)

$$\frac{1}{4(g_2-g_d)}E^{\sigma}_{N,m,s} = -\delta\left[N-2N_p+m(m-1)\right]+\frac{N(N+1)}{4}-2\sum_{j=1}^{N_p}\lambda^{\sigma}_j. \qquad (65)$$

Собственные энергии $E_{N,m,s}$ являются вещественными числами, и решения уравнений Бете (59) λ_j могут быть интерпретированы как энергии бозонных пар.

Для изучения поведения решений уравнений Бете (59) рассмотрим полиномы задающиеся решениями следующего уравнения

$$P(\lambda)=C\prod_{j=1}^{N_p}(\lambda^{\sigma}_j-\lambda), \qquad (66)$$

где $C^{-1} = \prod_{j=1}^{N_p} \lambda_j^{\sigma}$. Этот полином удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$P''(\lambda) - 2x(\lambda)P'(\lambda) + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_j)}{\lambda - \lambda_j} P(\lambda) = 0, \tag{67}$$

в котором $x(\lambda)$ – это вакуумное собственное значение (52) оператора $X^0(\lambda)$. Подстановка (52) в это выражение вместе с равенствами (65) дает уравнение

$$\begin{aligned} \lambda(\delta - \lambda)P''(\lambda) - 2\left[\lambda(\delta - \lambda) + \nu_1\lambda - \nu_2(\delta - \lambda)\right] P'(\lambda) \\ + \left[\mathcal{E}^{\sigma}_{N,m,s} + 2(\delta - \lambda)N_p\right] P(\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

где

$$\mathcal{E}^{\sigma}_{N,m,s} = \frac{1}{4(g_2 - g_d)} E^{\sigma}_{N,m,s} + (s + m^2)\delta - \frac{1}{4}(m+1)(m+2s). \tag{69}$$

Альтернативная формулировка задачи на нахождение собственных значений гамильтониана (29) такова: значения $E_{N,m,s}$ являются собственными энергиями, если уравнение (68) имеет полиномиальное решение степени N_p без кратных корней.

6. Основное состояние

Основное состояние модели – состояние с наименьшей энергией гамильтониана (29), определяется значениями констант взаимодействий g_2 и g_d. В зависимости от значений этих параметров основное состояние будет ферромагнитными или антиферромагнитным.

В случае когда система находится в ферромагнитном состоянии в ней отсутствуют бозонные пары и абсолютное значение z-компоненты полного спина максимально (m=N). Собственная энергия этого состояния равна

$$E^F \equiv E_{N,N,0} = 4g_2(1-g)\left\{-\delta N^2 + \frac{1}{4}N(N+1)\right\}. \tag{70}$$

где g – это отношение констант взаимодействий $g = g_d/g_2$. Вектор основного состояния – это вакуумное состояние $|\Omega\rangle = |0\rangle^{(0)} \otimes |N\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}$; $|\Omega\rangle = |0\rangle^{(0)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |N\rangle^{(-1)}$.

В антиферромагнитном состоянии число бозонных пар максимально, и определяющую роль начинает играть четность числа частиц в системе. Если для четного числа частиц N состояние с максимальным числом пар бозонных квазичастиц всего одно, то для нечетного N наибольшее число пар ($N_p = (N-1)/2$) наблюдается в двух состояниях. В одном из них значение третьей компоненты полного спина системы $m = 0$, при этом $s = 1$, тогда как в другом $m = 1$, а $s = 0$. Рассмотрим случаи с четным и нечетным числом частиц по отдельности.

Энергия основного антиферромагнитного состояния в системе с четным N определена решениями уравнений Бете (59) с $\nu_1 = 1/4$ и $\nu_2 = 1/2$, а набор решений $\{\lambda_j^\sigma\}$ выбран из условия, что значение $E_{N,0,0}^\sigma$ должно быть минимальным

$$E^{AF} \equiv E_{N,0,0}^\sigma = 4g_2(1-g)\left(\frac{1}{4}N(N+1) - 2\sum_{j=1}^{N/2}\lambda_j^\sigma\right). \qquad (71)$$

Вектор основного состояния дается выражением (56), в котором вакуумный состояние имеет вид $|\Omega\rangle = |0\rangle^{(0)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}$.

Если число частиц в системе нечетно, то энергия обоих антиферромагнитных состояний задается одинаковой формулой

$$E_{1,2}^{AF} = 4g_2(1-g)\left(-\delta + \frac{1}{4}N(N+1) - 2\sum_{j=1}^{(N-1)/2}\lambda_j^\sigma\right). \qquad (72)$$

Однако для нахождения параметров λ_j^σ нужно будет решать разные системы уравнений Бете (59). В случае нулевого значения третьей компоненты полного спина системы ($m = 0$) энергия основного состояния $E_1^{AF} \equiv E_{N,0,1}^\sigma$ индексы Баргманна, входящие в уравнения Бете $\nu_1 = 3/4$ и $\nu_2 = 1/2$. Если же $m = 1$, то энергия основного состояния $E_2^{AF} \equiv E_{N,1,0}^\sigma$ определяется уравнениями Бете с $\nu_1 = 1/4$ и $\nu_1 = 1$. Отметим также, что набор решений $\{\lambda_j^\sigma\}$ по-прежнему выбирается из условия, что значения энергий E_1^{AF} и E_2^{AF} должны быть минимальны. Вектор основного состояния дается выражением (56), при этом вакуумное состояние, соответствующее E_1^{AF} имеет вид $|\Omega\rangle = |1\rangle^{(0)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}$, а основное состояние с энергией E_2^{AF} строится из вакуумного состояния $|\Omega\rangle = |0\rangle^{(0)} \otimes |1\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}$ или $|\Omega\rangle = |0\rangle^{(0)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(-1)}$.

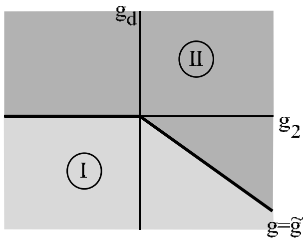

Рис. 1. Фазовая диаграмма для четного N. Символ I обозначает область в которой основное состояние ферромагнитное, а символ II — область с антиферромагнитным основным состоянием.

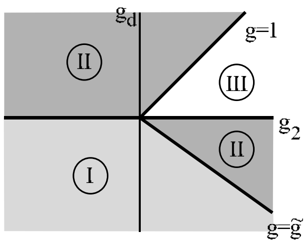

Рис. 2. Фазовая диаграмма для нечетного N. Символ I обозначает область, в которой основное состояние является ферромагнитным. В области II основное состояние имеет энергию E_1^{AF}, область III соответствует основному состоянию с энергией E_2^{AF}.

Каким именно будет основное состояние – ферромагнитными или антиферромагнитным зависит от знака константы взаимодействия g_2 и от значения параметра $g = g_d/g_2$.

На рисунках 1 и 2 представлены фазовые диаграммы основных состояний рассматриваемой модели с четным и нечетным числом частиц N. Области ферромагнитного основного состояния, обозначенные символом I, на обоих рисунках совпадают, в то время как область антиферромагнитного основного состояния для четного N (Рис. 1) в случае нечетного N делится на три части (Рис. 2). При этом при положительных значених констаны взаимодействия g_2 возникают два фазовых перехода между антиферромагнитными состояниями II и III.

Поведение критического значения $\widetilde{g}$, при котором происходит фазовый переход между ферромагнитным и антиферромагнитным состояниями, не зависит от четности числа частиц N. Оба случая опи-

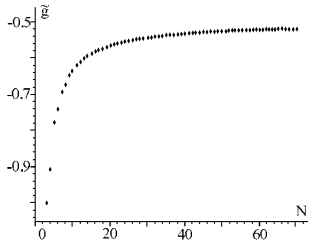

Рис. 3. Критическое значение $\widetilde{g}$ как функция N.

сываются рисунком 3. Следует отметить, что критическое значение $\widetilde{g}$ зависит от числа частиц, но как видно из рисунка 3 для больших значений N оно стремиться к пределу $\widetilde{g}_\infty = -0.5$.

7. Спинорный конденсат

В отсутствие дипольного взаимодействия гамильтониан модели имеет вид (32):

$$H_{sp} = g_2 \mathbf{S}^2, \tag{73}$$

где $\mathbf{S}^2$ – квадрат оператора полного углового момента (18).

Операторы

$$X^\pm = B^\pm + K^\pm \equiv -\lambda X^\pm(\lambda), \quad X^0 = B^0 + K^0 \equiv \lambda - \lambda X^0(\lambda); \tag{74}$$

здесь $X^\pm(\lambda)$, $X^0(\lambda)$ – операторы (34) с $\delta = 0$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $su(1,1)$ и порождают группу тензорного произведения $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$ [13]. Оператор Казимира этой группы имеет вид

$$\mathcal{K}_X^2 = (X^0)^2 - \frac{1}{2}\left(X^+X^- + X^-X^+\right) = H_o + \mathcal{K}_B^2 + \mathcal{K}_K^2, \tag{75}$$

где H_o это (30) с $\delta = 0$. Поскольку оператор Казимира коммутирует с операторами (74), гамильтониан

$$H_{\rm sp} = 4g_2(\mathcal{K}_X^2 - \mathcal{K}_B^2) \tag{76}$$

обладает симметрией

$$[H_{\rm sp}, X^\pm] = [H_{\rm sp}, X^0] = 0. \tag{77}$$

В рассматриваемом случае порождающая функция (37) равна $t(\lambda) = \lambda^2(\mathcal{K}_X^2 + 1 - 2X^0)$, и, таким образом, $t(\lambda)$ не обладает симметриями (77).

Базис представления $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$ мы будем обозначать как $|n\rangle_\nu$, в то время как базис состояний в двухмодовых и одномодовых представлениях как $|n_2\rangle_{\nu_2}$ и $|n_1\rangle_{\nu_1}$ соответственно. Согласно (44) мы имеем

$$X^0|n\rangle_\nu = (n+\nu)|n\rangle_\nu, \quad \mathcal{K}_X^2|n\rangle_\nu = \nu(\nu-1)|n\rangle_\nu, \tag{78}$$

и порождающий вектор представления $|0\rangle_\nu$ удовлетворяет

$$\mathcal{K}_X^-|0\rangle_\nu = 0. \tag{79}$$

Тензорное произведение двух представлений $D^{(\nu_1)}$ и $D^{(\nu_2)}$ сводится к сумме неприводимых представлений соответствующих разложению Клебши–Гордона для $SU(1,1)$

$$D^{(\nu_1)} \otimes D^{(\nu_2)} = \sum_{l=0}^{\infty} D^{(\nu_1+\nu_2+l)}, \tag{80}$$

где $\nu_1 + \nu_2 + l \equiv \nu$ – это индекс Баргманна соответствующего представления.

Мы можем искать ненормированный порождающий вектор $|0\rangle_\nu$ в виде

$$|0\rangle_\nu = \sum_{k=0}^{l} A_k^l (K^+)^k (B^+)^{l-k} |0\rangle_{\nu_2} \otimes |0\rangle_{\nu_1}. \tag{81}$$

Из (79) следует, что коэффициенты A_k^l удовлетворяют рекурентному соотношению

$$A_{k+1}^l(2\nu_2+k)(k+1) + A_k^l(2\nu_1+l-k-1)(l-k) = 0, \tag{82}$$

с $A_0^l = 1$, и равны

$$A_k^l = (-1)^k C_l^k \prod_{p=0}^{k-1} \frac{2\nu_1+l-1-p}{2\nu_2+p}, \tag{83}$$

где биномиальный коэффициент $C_l^k = \frac{l!}{(l-k)!k!}$.

Состояния $|n\rangle_\nu$ порождаются из вакуумного вектора (81)

$$(X^+)^n|0\rangle_\nu = |n\rangle_\nu. \tag{84}$$

Число частиц в состоянии $|n;\nu\rangle$, как это следует из (78), равно

$$\begin{aligned}\widehat{N}|n\rangle_\nu &= \Big(2X^0 - \frac{3}{2}\Big)|n\rangle_\nu = \Big(2(n+v_1+\nu_2+l) - \frac{3}{2}\Big)|n\rangle_\nu \\ &= (2(n+l)+m+s)\,|n\rangle_\nu.\end{aligned} \tag{85}$$

Для фиксированного числа пар частиц $N_p = n+l$ индекс l принимает значения $l = 0, 1, \ldots, N_p$.

В отличие от модели с дипольным взаимодействием рассматриваемый случай является вырожденным, и в секторе с фиксированным числом частиц N мы имеем набор вакуумных состояний (81) $|0;\nu_1+\nu_2+l\rangle$ с $l = 0, 1, \ldots, (N-m-s)/2$.

Из (76) следует, что собственные значения гамильтониана

$$H_{\mathrm{sp}}|n\rangle_\nu = E^l_{n,\nu,\nu_1}|n\rangle_\nu \tag{86}$$

равны

$$\begin{aligned}E^l_{n,\nu,\nu_1} &= 4g_2\left(\nu(\nu-1) - \nu_1(\nu_1-1)\right) \\ &= 4g_2\left(\nu_2(\nu_2-1) + l(l-1) + 2\nu_1\nu_2 + 2l(\nu_1+\nu_2)\right).\end{aligned} \tag{87}$$

Для фиксированного числа частиц N в системе ($N = 2(n+l)+m+s$) энергия (87) равна:

$$E^l_{n,\nu,\nu_1} = g_2\left[N(N+1) - 2n(2N+1-2n)\right]. \tag{88}$$

Основное состояние модели определяется знаком константы взаимодействия g_2. В антиферромагнитном случае ($g_2 > 0$) основное состояние определяется условиями $l = 0$ и $2n = N - s$ и равно

$$|G\rangle_{AF} = (X^+)^{\frac{N-s}{2}}|0\rangle_\nu, \quad |0\rangle_\nu = |s\rangle^{(0)} \otimes |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(-1)}. \tag{89}$$

где $s = 0, 1$ зависит от четности N. Из (88) следует, что собственная энергия основного состояния равна нулю: $E_{AF} = 0$.

В рассматриваемом случае решения уравнений Бете являются энергиями пар бозонных частиц в основном состоянии. При $\delta = 0$ уравнение (59) для основного состояния принимает вид

$$1 - \frac{2s+3}{4\lambda_j} = \sum_{l \neq j}^{N_p} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_l}; \quad j = 1, \ldots, N_p, \tag{90}$$

и является уравнением на нули полинома Лагерра $P(\lambda) = L_N(2\lambda; \frac{2s-1}{4})$. Решение этого уравнения единственно и все λ_j различны и положительны: $\lambda_j > 0$.

При $\xi > -1$ для больших значений N полиномы Лагерра имеют асимптотику

$$L_N(2x;\xi) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} e^x x^{-\frac{\xi}{2}-\frac{1}{4}} N^{\frac{\xi}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left\{2\sqrt{2Nx} - \frac{\pi}{4}(2\xi+1)\right\}. \tag{91}$$

Из этого выражения следует, что энергии пар бозонов в основном состоянии ведут себя как

$$\lambda_j = \frac{1}{N}\frac{\pi^2}{32}\left\{2j + \frac{s-3}{2}\right\}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{92}$$

Для ферромагнитного случая ($g_2 < 0$) основное состояние определено условием $n = 0$. Собственная энергия состояния равна

$$E_F = g_2 N(N+1). \tag{93}$$

Ветора основного состояния даются выражением (81) с m и l связанными равенством $2l + m + s = N$, и состояние $2N+1$ кратно вырождено.

8. Заключение

Модель, рассмотренная в этой работе принадлежит к классу интегрируемых, введенных Ричардсоном [14]. Алгебраический подход для решения таких систем был разработан Годеном [15]. Явный вид собственных функций модели позволяет детально изучить динамику спинового смещивания и квантовые фазы спинорного конденсата Бозе–Эйнштейна с диполь-дипольными взаимодействиями. Дальнодейтствующая анизотропная природа дипольного взаимодействия заметно обогощает свойства ультрахолодных газов в ловушках.

9. Приложение

Уравнения Бете (59) принадлежат к типу характеристических уравнений, появляющихся в теории эллипсоидальных гармонических функций. Для того чтобы доказать, что решения λ_j уравнений Бете (59)

$$1+\frac{\nu_1}{\delta-\lambda_j}-\frac{\nu_2}{\lambda_j}=\sum_{l\neq j}^{N_p}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_l}; \quad j=1,\dots,N_p \tag{94}$$

являются вещественными числами $\lambda_j\in\mathbb{R}$ рассмотрим функцию

$$F_j(\lambda)=1+\frac{\nu_0}{\delta-\lambda}-\frac{\nu_2}{\lambda}-\sum_{l\neq j}^{N_p}\frac{1}{\lambda-\lambda_l}. \tag{95}$$

Нули этой функции являются решениями уравнений Бете $F_j(\lambda_j)=0$. Если $\lambda_j\in\mathbb{C}$, то комплексно сопряженные решения удовлетворяют уравнениям $F_j^*(\lambda_j)=0$. Таким образом

$$\sum_{j=1}^{N_p}(\lambda_j-\lambda_j^*)\left(F_j(\lambda_j)-F_j^*(\lambda_j)\right)\equiv 0. \tag{96}$$

Из равенства

$$\sum_{j\neq l}u_j(u_j-u_l)=\frac{1}{2}\sum_{j\neq l}(u_j-u_l)^2, \tag{97}$$

следует что

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq l}(\lambda_j-\lambda_j^*)\left\{\frac{1}{\lambda_j-\lambda_l}-\frac{1}{\lambda_j^*-\lambda_l^*}\right\}\\
&=-\sum_{j\neq l}(\lambda_j-\lambda_j^*)\frac{(\lambda_j-\lambda_j^*)-(\lambda_l-\lambda_l^*)}{|\lambda_j-\lambda_l^*|^2}\\
&=-\sum_{j\neq l}\frac{\left((\lambda_j-\lambda_j^*)-(\lambda_l-\lambda_l^*)\right)^2}{|\lambda_j-\lambda_l^*|^2}.
\end{aligned}$$

Мы также имеем

$$\begin{aligned}&\sum_j(\lambda_j-\lambda_j^*)\left\{\frac{\nu_0}{\delta-\lambda_j}-\frac{\nu_2}{\lambda_j}-\frac{\nu_0}{\delta-\lambda_j^*}+\frac{\nu_2}{\lambda_j^*}\right\}\\ &=\sum_j(\lambda_j-\lambda_j^*)^2\left\{\frac{\nu_0}{|\delta-\lambda_j|^2}+\frac{\nu_2}{|\lambda_j|^2}\right\}.\end{aligned} \tag{98}$$

В итоге раветство (96) будет иметь вид

$$\begin{aligned}&\sum_j(\lambda_j-\lambda_j^*)^2\left\{\frac{\nu_0}{|\delta-\lambda_j|^2}+\frac{\nu_2}{|\lambda_j|^2}\right\}\\ &+\sum_{j\neq l}\frac{\big((\lambda_j-\lambda_j^*)-(\lambda_l-\lambda_l^*)\big)^2}{|\lambda_j-\lambda_l^*|^2}\equiv 0,\end{aligned} \tag{99}$$

и, следовательно $\lambda_j=\lambda_j^*$.

Решения уравнений Бете $\lambda_j\neq 0,\delta$. Это может быть доказано стандартным путем [16] с помощью дифференциального уравнения (68). Действительно, если один из корней $\lambda_j=0$ или $\lambda_j=\delta$ то $P'(\lambda_j)=0$ и из (68) следует, что все высшие производные должны быть равны нулю в тех же точках, но это неверно. Таким же способом можно доказать, что не существует кратных корней. Может быть доказано, что $0<\lambda_j<\delta$, $j=1,\dots,N_p$.

Для того, чтобы доказать, что существует N_p+1 наборов $\left\{\lambda_j^\sigma\right\}_{j=1}^{N_p}$ решений уравнений Бете необходимо отметить, что уравнение с номером m имеет порядок N_p+1 с учетом λ_m, в то время как оставшиеся неизвестными $\lambda_l, l\neq m$ имеют степени равные 1. Во все остальные уравнения λ_m входит с первой степенью. Исключая λ_m, мы будем иметь уравнение порядка $N_p(N_p+1)$ относительно λ_m. Но поскольку в уравнении с произвольным номером N_p-1 неизвестных даны , последнее неизвестное определяется однозначно. Следовательно, $N_p(N_p+1)$ найденных корней системы делятся на N_p+1 наборов.

Литература

1. C. K. Law, H. Pu, N. P. Bigelow, *Quantum spin mixing in spinor Bose–Einstein condensates.* — Phys. Rev. Lett. **24** (1998), 5257.
2. H. Pu, C. K. Law, S. Raghavan, J. H. Eberly, N. P. Bigelow, *Spin-mixing dynamics of a spinor Bose–Einstein condensate.* — Phys. Rev. A **60** (1999), 1463.

3. Ö. E. Müstecaplioğlu, M. Zhang, S. Yi, L. You, C. P. Sun, *Dynamic fragmentation of a spinor Bose–Einstein condensate.* — Phys. Rev. A **68** (2003), 63616.
4. S. Yi, L. You, H. Pu, *Quantum phases of dipolar spinor condensates.* — Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 63616.
5. M. Takahashi, Sankalpa Ghosh, T. Mizushima, K. Machida, *Spinor dipolar Bose-Einstein condensates; Classical spin approach.* — Phys. Rev. Lett. **98** (2007), 260403.
6. T. Lahaye, J. Metz, T. Koch, B. Fröhlich, A. Griesmaier, T. Pfau, *A purely dipolar quantum gas.* — Atomic Physics 21, Proceeding of the XXI International Conference of Atomic Phiysics (ICAP 2008).
7. S. Yi, H. Pu, *Dipolar spinor Bose-Einstein condensates.* `arXiv:0804.0191v1` (2008).
8. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Квантовый метод обратной задачи.* I. — Теор. мат. физ. **40** (1979), 194.
9. V. E. Korepin, N. M.Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
10. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, Москва, 1992.
11. Н. М. Боголюбов, *Спинорный боле конденсат и $su(1,1)$ модель Ричардсона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **317** (2004), 43.
12. A. Rybin, G. Kastelewicz, J. Timonen, N. Bogoliubov, *The $su(1,1)$ Tavis–Cummings model.* — J. Phys. A **31** (1998), 4705–4723.
13. C. Gerry, A. Benmoussa, *Two mode coherent states for $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$.* — Phys. Rev. A **62** (2000), 033812.
14. R. W. Richardson, *Exactly solvable many-boson model.* — J. Math. Phys. **9** (1968), 1327-1344.
15. М. Годен, *Волновая функция Бете.* Мир, Москва, 1987.
16. E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931.

Abarenkova N. I., Bogoliubov N. M. Solution of the integrable model of the spinor Bose–Einstein condensate with the dipole-dipole interaction.

The model that describes the internal degrees of freedom of the spinor Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interaction is solved up to its eigenstates and eigenvalues. The representation of the Hamiltonian of the model in terms of generators of $su(1,1)$ algebra allowed to develop the quantum inverse method for its investigation. The method of solution provides a general framework within which many related problems can similarly be solved.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 12 января 2010 г.

E-mail: nina@pdmi.ras.ru
bogoliub@pdmi.ras.ru