Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

А. Эль Кури, С. Соловьев, Л. Меац, М. Спиваковский

КАТЕГОРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫВОДОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ

1. Введение

Обычно категорная семантика логических выводов связывается со структурой свободной категории некоторого типа, определенной на некотором логическом исчислении, например, со структурой свободной декартовой замкнутой категории в случае $(\wedge, \rightarrow)$-фрагмента интуиционистского исчисления высказываний, или со структурой свободной симметрической моноидальной замкнутой категории в случае $(\otimes, \multimap)$-фрагмента интуиционистской мультипликативной линейной логики и т.п. Возникает вопрос, почему не уделяется при этом внимания категорным структурам, не являющимся свободными?

Один из возможных ответов состоит в том, что в то время как наличие тесной связи между свободными категориями с дополнительной структурой и логическими исчислениями представляется достаточно естественным (и те и другие описываются чисто синтаксически), едва ли ожидают многого от применения синтаксических методов теории доказательств к изучению несвободных категорий, поскольку они принадлежат конкретным разделам математики с их собственными методами и проблематикой, весьма далекими от проблем, изучаемых в теории доказательств (взять, например, такой раздел как коммутативная алгебра).

Другой возможный ответ состоит в том, что предполагается (опять-таки, на интуитивном уровне, без строгого исследования), что если в том или ином известном классе категорий с дополнительной структурой (например, классе замкнутых категорий) содержится интересная несвободная категория, которая может успешно изучаться

Ключевые слова : замкнутые категории, естественные преобразования, когерентность, зависимость диаграмм, полукольца, полумодули.

Данная работа осуществлялась при поддержке французского гранта PEPS ST2I CNRS "Véification de la commutativité des diagrammes catéoriques en calcul formel".

синтаксическими методами теории доказательств, то найдутся дополнительные аксиомы, определяющие подкласс этого класса категорий, по отношению к которому рассматриваемая категория будет свободной, и, таким образом, по-прежнему не будет необходимости в рассмотрении несвободных категорий.

В данной работе, частично носящей обзорный характер, мы рассматриваем несколько результатов, сравнительно мало известных специалистам в области алгебры, логики и теории категорий (в силу своего “трансверсального” характера), которые иллюстрируют эффективность методов теории доказательств даже в случае изучения несвободных категорий, прежде всего, представляющих интерес для коммутативной алгебры.

Некоторые из результатов, рассматриваемых ниже, публиковались ранее, некоторые являются новыми. Основные новые результаты приводятся в разделе 4.

Мы рассмотрим следующие проблемы, методы и результаты:

- Проблему описания эквивалентностей выводов порожденных интерпретациями в несвободных категориях. Различные типы эквивалентностей, теоретико-доказательственные методы их проверки, понятие критической пары выводов и проблему канонической аксиоматизации отношений эквивалентности.
- “Гипотезу о третьем сопряженном” и проблему полной когерентности в замкнутых категориях.
- Некоторые результаты о подмногообразиях класса замкнутых категорий.
- Некоторые результаты о коммутативности диаграмм и проблему зависимости диаграмм в несвободных категориях.
- Произвольные естественные преобразования и теоретико-доказательственные методы их изучения.

мы будем главным образом рассматривать симметрические моноидальные замкнутые категории (СМЗК) и соответствующее логическое исчисление - интуиционистскую мультипликативную линейную логику (ИМЛЛ), поскольку они были одним из центральных предметов нашего исследования. Наш интерес к ним объясняется прежде всего фактом, что для этого класса категорий алгебраические и логические аспекты пребывают в некотором “равновесии”, в то время как для других классов категорий обычно перевешивает та или другая сторона (например, логический аспект в случае декартовых замкнутых категорий). Следует отметить, однако, что многие определения и некоторые результаты легко обобщаются на другие классы категорий.

2. Алгебра и логика в замкнутых категориях

Связь между структурной теорией доказательств и алгеброй категорий хорошо известна. В этом разделе мы в основном следуем работам Ламбека [8, 9] и Минца [11, 12].

СМЗК определяется следующими данными:

- категорией K;
- объектом $I \in Ob(K)$ ("тензорной единицей");
- бифункторами $\otimes : K \times K \to K$ (тензорное произведение) и $\multimap : K^{op} \times K \to K$ (внутренний hom-функтор);
- следующими семействами морфизмов (выделенными естественными изоморфизмами): $1_A : A \to A$,

$$a_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C),$$
$$a^{-1}_{ABC} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$$
$$b_A : A \otimes I \to A,\ \ b^{-1}_A : A \to A \otimes I,\ c_{AB} : A \otimes B \to B \otimes A$$

- выделенными естественными преобразованиями, не являющимися изоморфизмами (единицей и коединицей сопряженности)

$$\varepsilon_{AB} : A \otimes (A \multimap B) \to B,\ \ d_{AB} : A \to B \multimap A \otimes B$$
$$(A, B, C \in Ob(K)).$$

Эти данные должны удовлетворять определенным соотношениям, которые мы не будем описывать в деталях (см.,напр., [15]). Они принадлежат следующим основным группам:

- специфические соотношения, которым должны удовлетворять компоненты выделенных естественных преобразований СМЗК, например $c_{AB} \circ c_{BA} = 1_{A \otimes B}$, "пятиугольник" и "шестиугольник" С. Маклейна;
- соотношения, выражающие естественность выделенных преобразований, "функторность" $\otimes$ и $\multimap$, общие категорные аксиомы, включающие произвольные морфизмы K, а также аксиомы, выражающие то, что $a, a^{-1}, ...$ являются взаимно обратными изоморфизмами, аксиомы, касающиеся $e, d,\ f : A \otimes B \to C, g : A \to (B \multimap C)$), и обеспечивающие сопряженность функторов $\otimes$ и $\multimap$.

Действие функторов на морфизмы и композиция морфизмов могут описываться как применение следующих правил:

$$\frac{f : A \to B \quad g : C \to D}{f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D}(\otimes) \quad \frac{f : A \to B \quad g : C \to D}{f \multimap g : B \multimap C \to A \multimap D}(\multimap)$$

$$\frac{f : A \to B \quad g : B \to C}{g \circ f : A \to C}(cut).$$

Выделенные естественные преобразования соответствуют при этом подходе схемам аксиом ($1_A : A \to A$, $c_{AB} : A \otimes B \to B \otimes A$ и т.д.).

Свободная СМЗК $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ над множеством атомов $\mathbf{A}$ строится теперь следующим образом. (Если не оговорено противное, мы будем считать множество $\mathbf{A}$ счетным.)

- Объектами служат формулы, построенные из атомов и константы I при помощи $\otimes$ и $\multimap$ в качестве связок.
- Морфизмами служат выражения вида $f : A \to B$, выводимые из схем аксиом, соответствующих выделенным естественным преобразованиям, при помощи правил $\otimes$, $\multimap$ и cut, рассматриваемые с точностью до наименьшего отношения эквивалентности $\equiv$, обеспечивающего выполнение всех упомянутых выше соотношений.

Отношение $\equiv$ является конгруэнцией относительно $\otimes$, $\multimap$ и cut (композиции морфизмов). Оно также замкнуто относительно подстановки формул, т.е., $f \equiv g \Rightarrow \sigma f \equiv \sigma g$ для любой подстановки $\sigma = [A_1, \ldots, A_k/a_1, \ldots, a_k]$ поскольку все морфизмы в $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ строятся из компонент естественных преобразований, представленных схемами аксиом, при помощи правил, также являющихся схемами.

Как обычно в логике, выражения вида $A \to B$ (а в дальнейшем и вида $\Gamma \to B$, где $\Gamma = A_1, ..., A_n$ - список формул) будут называться секвенциями.

Заметим, что аналогичное представление свободных декартовых замкнутых категорий (ДЗК) может быть получено, если мы добавим следующие выделенные естественные преобразования (семейства морфизмов):

$$0_A : A \to I, \quad \delta_A : A \to A \otimes A,$$
$$l_{AB} : A \otimes B \to A, \quad r_{AB} : A \otimes B \to B,$$

а также соотношения, превращающие I в терминальный объект, и функтор $\otimes$ в декартово произведение с проекциями l, r. Эти новые данные могут быть включены вместо a, b, c поскольку ассоциативность, коммутативность и свойство единицы I могут быть представлены с использованием $0, \delta, l, r$ и новых соотношений.

Максимальность теории ДЗК, доказанная в [1], означает, что единственным отношением эквивалентности $\sim$, отличным от $\equiv$ в этом случае будет отношение, которое делает эквивалентными все морфизмы с одной и той же областью определения и областью значений.

Упомянем некоторые другие типы замкнутых категорий:

- моноидальные замкнутые категории, где не требуется наличие изоморфизма коммутативности c_{AB} (точнее, он не включен в структуру);
- симметрические (не моноидальные) замкнутые категории, в структуре которых отсутствует функтор $\otimes$ а изоморфизм c_{AB} заменен на изоморфизм $\xi_{ABC} : A \multimap (B \multimap C) \to B \multimap (A \multimap C)$;
- замкнутые категории (без $\otimes$ и каких бы то ни было изоморфизмов симметрии в структуре).

Для всех этих типов категорий свободная категория, порожденная множеством атомов $\mathbf{A}$ строится аналогично $\mathbf{F}(\mathbf{A})$. Каждая СМЗК является в то же время МЗК, СЗК и просто замкнутой категорией (но не декартовой замкнутой категорией). Из наших результатов о независимости диаграмм в СМЗК следуют соответствующие результаты для всех этих типов замкнутых категорий (кроме ДЗК).

Пусть A формула, построенная из атомов и I при помощи $\otimes$ и $\multimap$. С категорной точки зрения, она задает функтор (суперпозицию $\otimes$ и $\multimap$) и каждое вхождение атома или I в A является ко- или контравариантным. В логической терминологии, категорной “вариантности” соответствует знак вхождения в формулу. Он определяется индукцией по построению A.

Определение 2.1.

- *Если $A = a$ или $A = I$, вхождение атома a (константы I) в A является положительным (ковариантным).*
- *Знаки вхождений в $A \otimes B$ совпадают со знаками соответствующих вхождений в A и B. В $A \multimap B$ знаки вхождений, лежащих в B совпадают со знаками в B, а знаки вхождений в A меняются на противоположные A.*
- *Знаки вхождений в секвенцию $A \to B$ совпадают со знаками соответствующих вхождений в формулу $A \multimap B$.*

Определение 2.2. *Секвенция S называется уравновешенной, если каждый атом входит в нее ровно дважды с противоположными знаками.*

Пары вхождений одного и того же атома в уравновешенную секвенцию соответствуют ребрам так называемого “графа” естественного преобразования, введенного в работах Келли, Маклейна и Эйленберга, а также так называемым “axiom links” в линейной логике. Каждой паре соответствует ”условие естественности” (коммутативность некоторой диаграммы)

Теорема 2.3. *Пусть $f, g : A \to B$. Существуют $f', g' : A' \to B'$ такие, что секвенция $A' \to B'$ является уравновешенной, f, g и секвенция $A \to B$ могут быть получены из f', g' и $A' \to B'$ отождествлением переменных, причем $f' \equiv g'$ тогда и только тогда, когда $f \equiv g$.*

Комбинаторные доказательства подобного утверждения были опубликованы уже в [2, 5]. Они используют тот факт, что все аксиомы, определяющие отношение $\equiv$ могут быть записаны в уравновешенной форме, и используют довольно тяжеловесное определение композиции графов. Более прямое доказательство, использующее исчисление секвенций Генценовского типа $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, описывается ниже. В нем используется устранение сечения и свойства ”линейных” правил $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Аналогичное утверждение не выполняется в случае ДЗК.

В данной работе мы будем рассматривать и другие отношения эквивалентности на морфизмах $\mathbf{F}(\mathbf{A})$. Ниже $\sim$ будет обозначать всякое отношение эквивалентности, которое замкнуто относительно подстановки, содержит $\equiv$, согласовано с графами и является конгруэнцией относительно $\otimes$, $\multimap$ и cut. Очевидно, $\sim$ будет определять некоторую фактор-категорию $\mathbf{F}(\mathbf{A})/\sim$, также являющуюся СМЗК. Ниже мы будем рассматривать отношения $\sim_K$, порождаемые интерпретациями в некоторых СМЗК (моделях) K. Точнее, рассмотрим произвольную функцию (оценку) $v : \mathbf{A} \to Ob(K)$. Поскольку $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ – свободная категория, каждая оценка v определяет единственный сохраняющий структуру функтор (интерпретацию) $|-|_v : \mathbf{F}(\mathbf{A}) \to K$ где $|a|_v = v(a)$. Отношение $\sim_K$ определяется следующим образом: $f \sim g \iff$ (a) $|f|_v = |g|_v$ для всех интерпретаций v в K и (b) f, g имеют один и тот же граф.

В дальнейшем будет полезно следующее определение:

Определение 2.4. *Мы будем говорить, что диаграмма $f', g' : A' \to$*

B' зависит от диаграммы $f, g : A \to B$ если для любой СМЗК K эквивалентность $f \sim_K g$ влечет $f' \sim_K g'$.

Теорема 2.5. *Пусть $\sim$ – наименьшее отношение эквивалентности на выводах $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, замкнутое относительно подстановки и такое, что $f \sim g$, $\sim$ содержит $\equiv$, согласовано с графами и является конгруэнцией относительно $\otimes$, $\multimap$ и cut. Диаграмма $f', g' : A' \to B'$ зависит от диаграммы $f, g : A \to B$ в том и только том случае, когда $f' \sim g'$.*

Эта теорема показывает, что синтаксические методы могут использоваться для проверки зависимости диаграмм, поскольку стандартная конструкция для построения наименьшего отношения эквивалентности $\sim$ использует синтаксическое исчисление, выводимыми объектами в котором, служат пары выводов.

Основной интерес представления $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, использующего "алгебраические" аксиомы и правила, состоит в том, что оно, с одной стороны, очевидным образом связано с категорной структурой, а с другой открывает путь для переформулировок, использующих иные системы аксиом и правил, хорошо изученные в теории доказательств.

Так, например, Г. Е. Минц рассматривал системы аналогичные $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ (он называл их "системами Гильбертовского типа") и системы натурального вывода для ДЗК, СМЗК, СЗК и ЗК. Дальнейшее изучение показало, что системы натурального вывода лучше для построения разрешающих алгоритмов для равенства морфизмов, но секвенциальные системы более удобны для изучения преобразований выводов и диаграмм.

В данной статье мы будем рассматривать исчисление секвенций Генценовского типа для интуиционистской мультипликативной линейной логики (ИМЛЛ), ср. [3].

Исчисление $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ определяется следующим образом:

Аксиомы

$$A \to A \quad (1_A) \quad \to I \quad (\mathrm{unit})$$

Структурные правила

$$\frac{\Gamma \to A \quad A, \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to B}\,((\mathrm{cut}) \qquad \frac{\Delta \to I \quad \Sigma \to A}{\Delta, \Sigma \to A}\,(\mathrm{wkn}) \qquad \frac{\Gamma \to A}{\Gamma' \to A}(\mathrm{perm})$$

Логические правила

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \otimes B}\ (\to\otimes) \quad \frac{A, B, \Gamma \to C}{A \otimes B, \Gamma \to C}\ (\otimes\to)$$

$$\frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \multimap B}\ (\to\multimap) \frac{\Gamma \to A \quad B, \Delta \to C}{\Gamma, A \multimap B, \Delta \to C}\ (\multimap\to)$$

Здесь Γ, Δ, Σ являются списками формул. Список формул $\Gamma = A_1, \dots, A_n$ может рассматриваться как сокращение для $\overline{\Gamma} = (\dots(A_1 \otimes \dots) \otimes A_n) \otimes I$. Преобразование **C** L-выводов в F-выводы и преобразование **D** F-выводов в L-выводы подробно описываются в [10, 15]. Здесь мы рассмотрим в качестве примера только один случай:

$$\mathbf{C}\left(\frac{\Gamma \xrightarrow{\psi} A \quad B, \Delta \xrightarrow{\varphi} C}{\Gamma, A \multimap B, \Delta \to C}\right) =$$
$$(\mathbf{C}(\varphi) \circ ((e_{AB} \circ (\mathbf{C}(\psi) \otimes 1_{A\multimap B})) \otimes 1_{\overline{\Delta}})) \circ \zeta \ : \ \overline{\Gamma, A \multimap B, \Delta} \to C,$$

где $\zeta : \overline{\Gamma, A \multimap B, \Delta} \to (\overline{\Gamma} \otimes (A \multimap B)) \otimes \overline{\Delta}$ некоторый центральный изоморфизм[1].

При посредстве **C** определяется отношение эквивалентности $\equiv$ на L-выводах, индуцированное $\equiv$ на F-выводах. Отношение $\equiv$ на $\mathbf{L}(\mathbf{A})$-выводах является конгруэнцией относительно правил $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Оно также замкнуто относительно подстановки.

(Секвенциальное исчисление для ДЗК определяется аналогичным образом. В результате получается в точности фрагмент интуиционистской пропозициональной логики с I в качестве константы "истина", $\otimes$ в качестве конъюнкции и $\multimap$ в качестве импликации. Секвенциальные исчисления для МЗК,СЗК, ЗК получаются по той же схеме и могут рассматриваться как "ослабления" исчисления $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Аналогично определяются и преобразования **C** и **D**.)

Другие отношения эквивалентности $\sim$ на морфизмах $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ также индуцируют отношения на выводах $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ при посредстве **C**, а для

[1] Центральными изоморфизмами называются морфизмы $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, при построении которых используются только 1_A, изоморфизмы a_{ABC}, b_A, c_{AB} и обратные к ним. Имеет место теорема когерентности Маклейна: если $\zeta : A \to B$ центральный изоморфизм, то он единствен с точностью до эквивалентности $\equiv$.

каждой оценки $v : \mathbf{A} \to K$ определяется интерпретация $\mathbf{L}(\mathbf{A})$-выводов $|-|_v : |d|_v = |\mathbf{C}(d)|_v$.

Понятие знака вхождения и уравновешенной секвенции естественным образом обобщается на $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Пусть $\Gamma = A_1, \dots , A_n$, тогда знаки вхождений в $\Gamma \to A$ совпадают со знаками в формуле $A_1 -\circ(A_2 -\circ \dots (A_n -\circ A) \dots)$. Секвенция $\Gamma \to A$ уравновешена, если каждый атом входит в нее дважды с противоположными знаками.

Одним из наиболее часто рассматриваемых преобразований выводов является устранение сечения.

Теорема 2.6. *Для каждого вывода $d : \Gamma \to A$ в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ существует вывод $d' \Gamma \to A$ не содержащий применения cut, такой что $d' \equiv$. (Из этого следует также, что $d' \sim d$ для любого $\sim$.) Если секвенция $\Gamma \to A$ уравновешена, то все секвенции в ее выводе, не содержащем cut, также являются уравновешенными*

Для устранения сечения в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ служит стандартный алгоритм, известный в теории доказательств. Для сравнения, процедура устранения сечения, описанная в алгебраических терминах в [6], выглядит гораздо более тяжеловесной. Аналогичная теорема справедлива для всех логических исчислений, связанных с различными типами замкнутых категорий, рассмотренными выше.

Замечание 2.7. В действительности, не только cut, но также и все тривиальные применения wkn (с $\to I$ в качестве левой посылки) могут быть устранены, а несколько последовательных применений правила $perm$ (перестановки)всегда можно заменить на единственное применение этого правила. Мы будем предполагать (допуская некоторую терминологическую вольность) что во всех выводах “без сечения” сделаны также все эти преобразования. При таком понимании выводов “без сечения”, во всех исчислениях, упомянутых выше (кроме исчисления для ДЗК, т.е., кроме обычной интуиционистской логики), существует лишь конечное число свободных от сечения выводов каждой данной секвенции.

Другим полезным преобразованием является понижение глубины формул, его детальное описание можно найти в [15].

Определение 2.8. *Секвенция $\Gamma \to A$ называется 2-секвенцией, если A содержит не более одного вхождения связок, а каждый член Γ содержит самое большее два вхождения связок.*

Чтобы уменьшить число вариантов, некоторые формулы можно заменить на изоморфные, например $A \otimes I$ на A.

Определение 2.9. *Секвенция* $\Gamma \to A$ *называется чистой 2-секвенцией если* A *имеет одну из форм* $x, a \otimes b, a -\circ x$, *а каждый член* Γ – *одну из форм* $x, a -\circ x, a -\circ (b \otimes c), (a \otimes b) -\circ x, (a -\circ x) -\circ y$. *Здесь* x, y *обозначают константу* I *или атом,* a, b *атомы.*

Любой вывод можно преобразовать в вывод 2-секвенции, используя две операции (добавляя в конце, в случае необходимости, композицию (*cut*) с изоморфизмами, чтобы получить чистую 2-секвенцию):

$$\Gamma \overset{d}{\to} B \mapsto \frac{\Gamma \overset{d}{\to} B \quad p \overset{id}{\to} p}{\Gamma, B -\circ p \to p}$$

и *cut*, в левой посылке которого находится вывод секвенции $p -\circ C, A[p] \to A[C]$ или $C -\circ p, A[p] \to A[C]$ (в обоих случаях p - новая переменная)[2]. Существует также обратное преобразование, определяемое при помощи подстановок $[C/p]$ и *cut* с $\to C -\circ C$. (Заметим, что сечение всегда можно устранить в дальнейшем.)

Теорема 2.10 (Редукция к 2-секвенциям)**.** *Пусть* d_1, d_2 *два вывода одной и той же (уравновешенной) секвенции* S. *Существуют два вывода* d_1', d_2' *той же самой (уравновешенной) чистой 2-секвенции* S' *таких, что для всякого отношения* $\sim$ *(включая само отношение* $\equiv$*)* d_1, d_2 *являются* $\sim$*-эквивалентными тогда и только тогда, когда* d_1', d_2' *являются* $\sim$*-эквивалентными.*

Другим полезным свойством является инъективность. Используя это свойство, можно свести проблему эквивалентности выводов, заканчивающихся идентичными применениями правил, к эквивалентности выводов их посылок.

Определение 2.11 (Ср. [10])**.** *Эквивалентность* $\sim$ *является инъективной по отношению к правилу* R *если, для любых выводов* φ, φ' *одной и той же секвенции, заканчивающихся применением* R *с одинаковыми посылками (выводы посылок могут быть различны),* $\varphi \sim \varphi'$ *тогда и только тогда, когда выводы посылок* $\sim$*-эквивалентны.*

В случае СМЗК, инъективность легко доказывается для правил $\to -\circ$, $\to \otimes$, $\otimes \to$, *wkn*. Гораздо труднее доказать, что она имеет место

[2] При каждом применении этих операций единственное вхождение C заменяется на p. Вид левой посылки зависит от знака ("вариантности") этого вхождения. Берется стандартный вывод секвенции в левой посылке, который всегда существует в "симметричном" случае, т.е., в исчислениях для ДЗК, СМЗК, СЗ категорий. Теорема, приводимая ниже, справедлива в каждой из этих систем.

также для $\multimap \to$. Тем не менее, это также верно (см. [10], теорема 4.15). Это не обязательно верно для других систем.

3. Коммутативность диаграмм в свободной СМЗК

Ниже мы будем называть диаграммами не только пары $f, g : A \to B$ в $\mathbf{F}(\mathbf{A})$, но также пары $\mathbf{L}(\mathbf{A})$-выводов с одной и той же конечной секвенцией.

Секвенция S будет называться I-уравновешенной в том и только том случае, если она не содержит вхождений подформул вида $A \multimap B$, где B является постоянной (содержит только I) а A содержит атомы, отличные от I.

Теорема 3.1 (Теорема когерентности Келли–Маклейна переформулированная для $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, ср. [5]). *Пусть $f, g : \Gamma \to A$, причем секвенция $\Gamma \to A$ является I-уравновешенной. Если f and g имеют один и тот же граф*[3] *то $f \equiv g$.*

Пример 3.2. Если секвенция не является I-уравновешенной, то f, g могут быть неэквивалентными. Пусть

$$f = 1 : (a \multimap I) \multimap I) \multimap I \to (a \multimap I) \multimap I) \multimap I$$

а

$$g = (a \multimap I) \multimap I) \multimap I \xrightarrow{k_a \multimap 1} a \multimap I \xrightarrow{k_{(a \multimap I)}} (a \multimap I) \multimap I) \multimap I$$

Следующая диаграмма, называемая диаграммой "третьего сопряженного", не является коммутативной

$$(1)\ f, g : ((a \multimap I) \multimap I) \multimap I \rightrightarrows ((a \multimap I) \multimap I) \multimap I$$

Здесь a - атом, а $k_a = (1 \multimap e_{aI}) \circ d_{a(a \multimap I)} : a \to (a \multimap I) \multimap I$ является стандартным "погружением a во второе сопряженное".

Некоммутативность этой диаграммы может быть проверена непосредственно в $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ (отношение $\equiv$ разрешимо). Она некоммутативна также в некоторых моделях, например, СМЗК векторных пространств или СМЗК модулей над коммутативным кольцом I с единицей. Можно отметить, что она всегда коммутативна в полной

[3] В частности, если секвенция – уравновешенная.

подкатегории категории векторных пространств, состоящей из пространств конечной размерности. Напротив, она не всегда коммутативна в случае конечно порожденных модулей над кольцом.

Полезно рассмотреть другую диаграмму, которая коммутативна по отношению к любому отношению $\sim$ в том и только том случае, когда диаграмма "третьего сопряженного" коммутативна:

$$(2)\ \ f, g:\ (a \otimes b \multimap I), ((b \multimap I) \multimap I), ((a \multimap I) \multimap I) \rightrightarrows I.$$

Тот факт, что диаграмма (2) коммутативна в том и только том случае, когда диаграмма (1) коммутативна, легче проверить в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Проверка также является хорошей иллюстрацией применения методов теории доказательств.

Пусть $f_0 = 1_{((a\multimap I)\multimap I)\multimap I}$, и пусть g_0 обозначает вывод, соответствующий $k_{a\multimap I} \circ (k_a \multimap 1_I)$. Устраним сечение (*cut*). Легко проверить, что выводы без сечения соответствующей секвенции будут эквивалентны выводам, заканчивающимся применением $\rightarrow \multimap$. В силу инъективности (в данном случае, следующей из сопряженности $\otimes$ и $\multimap$) мы можем перейти от пары

$$f_0, g_0 : ((a \multimap I) \multimap I) \multimap I \rightarrow ((a \multimap I) \multimap I) \multimap I$$

к паре

$$f_0^-, g_0^- : (((a \multimap I) \multimap I) \multimap I), ((a \multimap I) \multimap I) \rightarrow I.$$

После этого мы используем редукцию к чистой 2-секвенции, применяя сначала (одновременно к f_0^-, g_0^-) *cut* с

$$h:\ b \multimap (a \multimap I), ((b \multimap I) \multimap I) \rightarrow ((a \multimap I) \multimap I) \multimap I,$$

в левой посылке (построение h – несложное упражнение), а затем (снова используя *cut*) – изоморфизм $i : a \otimes b \multimap I \rightarrow b \multimap (a \multimap I)$. Все применения *cut* можно в дальнейшем устранить. Результатом будет пара выводов $f, g:\ a \otimes b \multimap I, (b \multimap I) \multimap I, (a \multimap I) \multimap I \rightarrow I$ ($(b \multimap I) \multimap I$, соответственно, $(a \multimap I) \multimap I$ будет главной формулой последнего применения $\multimap \rightarrow$ в этих выводах). Из этих выводов можно вновь получить f_0, g_0 при помощи подстановки $[b \multimap I/a]$, затем *cut* с $\rightarrow (b \multimap I) \otimes b \multimap I)$, в левой посылке и применения правила $\rightarrow \multimap$. Так как на всех этапах сохраняется эквивалентность $\sim$, $f_0 \sim g_0 \iff f \sim g$.

Пара выводов f, g, рассмотренная выше, является также примером так называемой критической пары. Существует полное описание неэквивалентных пар выводов в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, основанное на понятии критических пар. Понятие критической пары было предложено Voreadou [18], но в доказательстве ее основной теоремы имелась ошибочная лемма. Здесь приводится теорема в модифицированной формулировке, доказанная в [15]. Без потери общности (в силу теорем 2.10, 2.3), и для упрощения формулировки, она формулируется только для случая чистых 2-секвенций.

Определение 3.3. *Пара выводов d_1, d_2уравновешенной чистой 2-секвенции S называется критической, если*

$$(1)\ \ d_1 \equiv \frac{\Gamma, A' -\circ I \overset{d_1'}{\to} A \quad I \overset{1_I}{\to} I}{\Gamma, A' -\circ I, A -\circ I \to I} -\circ \to,$$

$$d_2 \equiv \frac{\Gamma, A -\circ I \overset{d_2'}{\to} A' \quad I \overset{1_I}{\to} I}{\Gamma, A' -\circ I, A -\circ I \to I} -\circ \to, perm;$$

(2) *любой свободный от сечения (cut) вывод S может заканчиваться только некоторым применением $-\circ \to$;*

(3) *при этом выводыt d_1', d_2' не $\equiv$-эквивалентны никаким выводам, заканчивающимся $-\circ \to$.*

Пара является минимальной, если членами Γ не являются отдельные атомы.

Пусть α – некоторая подстановка I вместо переменных. В [15] была определена “подстановка с очисткой”. Пусть $d : \Gamma \to A$ – вывод некоторой 2-секвенции. Тогда $\alpha * d$ обозначает вывод, полученный из d подстановкой α и серией применений cut с изоморфизмами в результате которых конечная секвенция становится “чистой”. Вывод $\alpha * d$ определяется с точностью до $\equiv$, но его конечная секвенция определена однозначно.

Теорема 3.4 (Ср. [15])**.** *Пусть d_1, d_2 некоторые выводы уравновешенной секвенции $\Gamma \to A$, а d_1', d_2' – соответствующие выводы уравновешенной чистой 2-секвенции. Тогда $d_1 \equiv d_2$ тогда и только тогда, когда существует подстановка α константы I вместо переменных, такая, что $\alpha * d_1', \alpha * d_2'$ является минимальной критической парой*[4].

[4]Условия на выводы левых посылок, требующие проверки эквивалентности,

4. Некоторые свойства отношений $\sim$, отличных от $\equiv$

Мы уже рассматривали отношение $\sim_K$ для некоторой СМЗК K.

Пусть теперь $NAT(K)$ – СМЗК функторов и естественных преобразований над СМЗК K (используется стандартное определение, см. например [5]). Пусть v_1 – интерпретация $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ или $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ в $NAT(K)$, при которой $a \mapsto 1 : K \to K$ (т.е., всякий $a \in \mathbf{A}$ интерпретируется как тождественный функтор $1 : K \to K$, заметим, что при этом не предполагается, что аргументы тождественных функторов, соответствующих разным вхождениям a как-либо связаны межлу собой). Отношение $\sim_{K-nat}$ определяется соотношением $d \sim_{K-nat} d' \iff d \sim_{v_1} d'$.

Отношение $\sim_{K-nat}$ подобно $\sim_K$ является конгруэнцией по отношению к правилам и замкнуто относительно подстановки формул вместо атомов.

Отношение $\equiv$ определяется аксиомами СМЗК. Очевидно, все отношения $\sim$, которые определяют некоторую СМЗК-структуру на $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ или $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, определяются путем добавления некоторых новых схем аксиом (эквивалентностей между выводами) к аксиомам СМЗК. (В принципе, принимая во внимание, что $\sim$ замкнуто относительно подстановки, всегда можно добавить все пары, эквивалентные относительно $\sim$, вместе с их подстановочными вариантами.)

Нетривиальная проблема – найти некоторую каноническую аксиоматизацию (например, минимальную, или с аксиомами некоторого специального вида).

Упомянем здесь некоторые результаты, касающиеся свойств отношений $\sim$ (см. [10]).

Теорема 4.1. *Пусть K – СМЗК с бипроизведением. Тогда отношения $\sim_{K-nat}$ и $\sim_K$ совпадают.*

Теорема 4.2. *Отношение $\sim_{K-nat}$ может быть всегда аксиоматизировано с помощью аксиом вида $d \sim d' : \Gamma \to A$, где секвенция $\Gamma \to A$ является уравновешенной.*

Этот результат можно значительно усилить.

Следующая теорема показывает, что каждое отношение типа $\sim_{K-nat}$ порождается минимальными критическими парами.

применяются к конечному числу выводов с меньшей конечной секвенцией. Эта теорема может использоваться рекурсивно для получения разрешающего алгоритма для эквивалентности $\equiv$. В [17] описывается алгоритм небольшой полиномиальной сложности.

Теорема 4.3 [MS]. *Для каждого отношения $\sim_{K-nat}$ на выводах $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ существует некоторое множество M минимальных критических пар, такое, что $\sim_{K-nat}$ является наименьшим отношением эквивалентности, которое является конгруэнцией по отношению к правилам $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, замкнуто относительно подстановки, содержит $\equiv$ и все пары $(d, d') \in M$.*

5. Проблема полной когерентности в замкнутых категориях и гипотеза “третьего сопряженного”

Гипотеза “третьего сопряженного”.

Гипотеза 5.1. *Коммутативность диаграммы “третьего сопряженного” ($\sim_K$-эквивалентность соответствующих выводов) влечет коммутативность всех диаграмм канонических морфизмов $f, g : \Gamma \to B$ с уравновешенной $\Gamma \to B$. Точнее, пусть $\sim$ – наименьшее отношение эквивалентности, которое удовлетворяет всем аксиомам СМЗК, замкнуто относительно подстановки и диаграмма “третьего сопряженного” коммутативна по отношению к $\sim$. Тогда для всех $f, g : \Gamma \to B$ с уравновешенной $\Gamma \to B$ в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, $f \sim g$.*

В пользу справедливости этой гипотезы свидетельствует следующая теорема.

Теорема 5.2 [14]. *Если $\sim$ – наименьшее отношение эквивалентности, которое удовлетворяет всем аксиомам СМЗК, замкнуто относительно подстановки, причем диаграмма “третьего сопряженного” коммутативна по отношению к $\sim$ и, кроме того, для любых f, g и атома a*

$$(*)\ [a - \circ I/a]f \sim [a - \circ I/a]f \Rightarrow f \sim g,$$

то для любых $f, g : \Gamma \to B$ с одним и тем же графом имеет место $f \sim g$[5].

А. Эль Кури недавно проверил, что коммутативность диаграммы “третьего сопряженного” (без допущения (*)) влечет коммутативность всех диаграмм $f, g : A \to B$ с уравновешенной $A \to B$, содержащих не более 3 переменных.

[5]Что равносильно: с уравновешенной $\Gamma \to B$.

6. Многообразия СМЗК

Основные результаты, представленные в этом разделе, являются новыми.

Мы рассматриваем отношения эквивалентности $\sim$ на выводах $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, $\equiv \subseteq \sim$, порожденные соотношениями вида $f \sim g$; $f, g : \Gamma \to A$, где секвенция $\Gamma \to A$ не обязательно уравновешена, но f, g имеют один и тот же граф. (Для выводов в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ это означает, что f, g получаются отождествлением переменных из некоторых выводов f_0, g_0 уравновешенной секвенции. При этом $f \equiv g \iff f_0 \equiv g_0$, но это не обязательно верно для $\sim$.).

Очевидно, всякое множество аксиом такого вида (плюс аксиомы СМЗК) определяет многообразие СМЗК в смысле универсальной алгебры.

Из коммутативности диаграмм, рассматриваемых ниже **не следует** коммутативность диаграммы "третьего сопряженного", таким образом, отношения эквивалентности, порожденные этими соотношениями, занимают промежуточное положение между отношением $\equiv$ (наименьшим отношением) и отношением, порожденным коммутативностью диаграммы "третьего сопряженного".

Первое из этих "промежуточных" соотношений было получено благодаря идее М. Спиваковского, развитой далее Л. Меацом и С. Соловьевым [10].

Диаграмма (3), рассматриваемая в [10], получается из

$$(2)\ \ f, g : \ (a \otimes b \multimap I), ((b \multimap I) \multimap I), ((a \multimap I) \multimap I) \overset{\to}{\to} I$$

при помощи *cut* (композиции) с (единственным с точностью до $\equiv$) выводом $h : (((a \multimap I) \otimes (b \multimap I)) \multimap I) \multimap I \to (a \otimes b \multimap I)$.

Пусть k – некоторое поле, $k[x, y]$ – кольцо полиномов от двух переменных над k, $I = k[x, y]/(x^2, xy, y^2)$, а $M(k, I)$ – СМЗК, порожденная I и k (как I-модуль). В [10] было показано, что в $M(k, I)$ диаграмма (3) коммутативна, в то время как (2) и (1) не являются коммутивными (лемма 5.8). Таким образом, если добавить к аксиомам СМЗК соотношение, соответствующее (3), то диаграммы (2) и (1) останутся некоммутативными.

Ниже описывается последовательность диаграмм $D_2, \dots, D_k, \dots, D_m, \dots$ и соответствующих им моделей K_k, таких, что в K_k диаграммы $D_2, \dots, D_k$ некоммутативны, но существует $m > k$ такое, что диаграммы $D_m, \dots$ коммутативны (вопрос о коммутативности $D_k, \dots, D_{m-1}$ остается открытым).

Ниже A^* обозначает $A -\!\circ I$. Пусть A^n обозначает n-ю “тензорную степень” объекта A, $A^n = (A \otimes \ldots) \otimes A$, а f^n – n-ю “тензорную степень” морфизма f, $f^n = (f \otimes \ldots) \otimes f$. Например, $e^n_{aI} : (a^* \otimes a)^n \to I^n$.

Пусть b^n_I обозначает $b^1_I = b_I : I \otimes I \to I, \ldots, b^n_I = b \circ (b^{n-1}_I \otimes 1_I) : I^{n+1} \to I$.

Чтобы определить диаграммы $D_2, \ldots, D_k, \ldots$, отметим, что существуют морфизмы

$$h_k : (((a -\!\circ I)^k -\!\circ I) -\!\circ I) \to (a^k -\!\circ I).$$

В $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ $h_k = \pi_{((a^*)^k)^{**} a^k I}(1_{((a^*)^k)^{**}} \otimes \pi_{a^k (a^*)^k I}(b^{k-1}_I \circ (e^k_{aI} \circ \xi)))$. Здесь ξ – подходящий центральный изоморфизм[6].

Диаграмма

$$(D^0_2)\ f^0_2, g^0_2 : (a^2)^*, a^{**}, a^{**} \rightrightarrows I$$

получается из диаграммы (2) подстановкой a вместо b (другими словами, отождествлением переменных a и b). Диаграмма D_2

$$(D_2)\ f_2, g_2 : ((a^*)^2)^{**}, a^{**}, a^{**} \to I$$

получается D^0_2 композицией (cut) с выводом, соответствующим h_2.

Определим теперь (индекс m соответствует числу тензорных сомножителей) диаграмму D^0_m, $m \geq 2$, как результат подстановки a^{m-1} вместо b в диаграмму (2). Морфизмы, полученные из f, g в результате этой подстановки будут обозначаться f^0_m, g^0_m.

Диаграмма D_m получается из D^0_m применением сечения cut с h_m (f_m, g_m обозначают выводы, получающиеся в результате):

$$(D_m)\ f_m, g_m : ((a^*)^m)^{**}, a^{**}, (a^{m-1})^{**} \rightrightarrows I.$$

Чтобы определить модели K_k мы рассмотрим некоторые СМЗК коммутативных полумодулей над коммутативными полукольцами.

[6]В $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ морфизму h_k соответствует следующий вывод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \to a \quad I \to I}{a, a -\!\circ I \to I} \quad \dfrac{a \to a \quad I \to I}{a, a -\!\circ I \to I}}{a, a -\!\circ I, a, a -\!\circ I \to I}}{\ldots}}{a, a -\!\circ I, \ldots, a, a -\!\circ I \to I}}{a, \ldots, a, (a -\!\circ I), \ldots, (a -\!\circ I) \to I}}{\ldots}}{a^k, (a -\!\circ I)^k \to I}}{(a -\!\circ I)^k, a^k \to I}}{a^k \to ((a -\!\circ I)^k -\!\circ I)} \quad \dfrac{}{I \to I}}{a^k, ((a -\!\circ I)^k -\!\circ I) -\!\circ I \to I}}{((a -\!\circ I)^k -\!\circ I) -\!\circ I \to (a^k -\!\circ I)}$$

Основные определения, касающиеся полуколец и полумодулей, можно найти, например, в [4]. Ниже $+$ будет обозначать "сложение", а $*$ – "умножение" в полукольце I. В полумодуле M, $+_M$ будет обозначать "сложение", а $*_M$ – действие I на M; индекс M в очевидных случаях пишется не всегда.

Утверждение 6.1. *I-полумодули над коммутативным полукольцом I и их гомоморфизмы с тензорным произведением $\otimes$ и внутренним hom-функтором $\multimap$, определяемыми обычным образом, образуют СМЗК.*

Далее мы будем рассматривать категории полумодулей над полукольцом $I_n = \{0, ..., n\}$, с max в качестве сложения и с "ограниченным умножением" $*$ в качестве умножения:

$$p * q = p \cdot q \quad \text{если } p \cdot q < n \text{ и } p * q = n \text{ в противном случае.}$$

Очевидно, I_n – коммутативное полукольцо. Если значение n несущественно или ясно их контекста, индекс может быть опущен.

Отметим, что в этой категории морфизм $b_M : M \otimes I \to M$ определяется через $b_M(x \otimes p) = p * x$, в частности, если $M = I$ то $b_I(p_1 \otimes p_2) = p_1 * p_2$. Соответственно, $p_1 \otimes \cdots \otimes p_n \in I \otimes \cdots \otimes I$, $b_I^{n-1}(p_1 \otimes \cdots \otimes p_n) = p_1 * \cdots * p_n$.

Мы будем рассматривать полумодули M над I, обладающие некоторыми дополнительными свойствами.

(Top) Имеется "верхний" ("top") элемент $T_M \in M, T_M \neq 0_M$ такой, что для всех $x \in M$, $x + T_M = T_M + x = T_M$, если $x \in M, x \neq 0_M$ то $n * x = T_M$, а если $0 \neq k \in I$ то $k * T_M = T_M$.

Очевидно, само I удовлетворяет этим условиям если взять $T_I = n$. Для I_s, рассматриваемого как полумодуль над I, s должно быть не больше n.

Лемма 6.2. *Пусть M_1, M_2 – два полумодуля над I с верхними элементами T_1 и T_2 соответственно. Пусть $f : M_1 \to M_2$ – гомоморфизм полумодулей, отличный от тождественного 0. Тогда $f(T_1) = T_2$ и для $x \in M_1$, $x \neq 0$, имеет место $f(x) \neq 0$. Как следствие, два морфизма $f, g : M_1 \to M_2$ всегда совпадают по крайней мере на 0 и верхнем элементе T_1.*

Определение 6.3. *$I-$полумодуль будет называться r-редуцируемым для некоторого $r \in I, 1 < r < n$ если для всякого $x \in M$, $r * x = T_M$.*

Пример 6.4. Возьмем $M = I_2 = \{0, 1, 2\}$ в качестве полумодуля над полукольцом $I_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (с обычным умножением, "ограниченным двойкой" в качестве действия). M удовлетворяет **(Top)** с $T_M = 2$ и является 2-редуцируемым. Разумеется M, является также 3-и 4-редуцируемым.

Далее рассматриваются полумодули M такие, что

(r-red) M является r-редуцируемым для некоторого $r \in I, 1 < r < n$.

Теорема 6.5. (1) *Пусть M_1, M_2 – полумодули над I, удовлетворяющие* **(Top)**. *Тогда полумодули $M_1 \otimes M_2$, $M_1 -\circ M_2$ также удовлетворяют* **(Top)**.

(2) *Пусть $r \in N$, $1 < r < n$. Пусть M_1, M_2 – полумодули над I, удовлетворяющие* **(Top)** *и* **(r-red)**. *Тогда полумодули $M_1 \otimes M_2$, $M_1 -\circ M_2$, а также $M_1 -\circ I, I -\circ M_1, I \otimes M_1, M_1 \otimes I$ удовлетворяют* **(Top)** *и* **(r-red)**.

Эта теорема позволит нам рассматривать СМЗК, порожденные применением $\otimes$ и $-\circ$ к I и некоторому полумодулю над I, например $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $M = \{0, 1, 2\}$, и быть уверенным, что все объекты этой категории будут иметь верхний элемент и все (кроме I) будут r-редуцируемыми[7].

Лемма 6.6. *Пусть M – r-редуцируемый полумодуль над I, а $f : M \to I$ (иначе говоря, $f \in M -\circ I$). Тогда для всех $x \in M$ $f(x) \geq n/r$.*

Пусть h_m^- обозначает $a^m \otimes (a^*)^m \xrightarrow{\xi} (a^* \otimes a)^m \xrightarrow{e_{aI}^m} I^m \xrightarrow{b_I^{m-1}} I$. Рассмотрим СМЗК K, объектами которой (за исключением I), являются полумодули над I, удовлетворяющие **(top)** и **(r-red)**. Теперь можно легко доказать следующую лемму.

Лемма 6.7. *Пусть n, r выбраны как выше, m таково, что $(n/r)^m \geq n$ и v – интерпретация, определяемая условием $v(a) = M \in Ob(K), M \neq I$. Тогда морфизм $|h_m^-| : (M^m) \otimes (M^*)^m \to I$ принимает значение 0, если его аргумент 0 и значение $T_I = n$ в противном случае.*

[7]Эти свойства легче проверять и использовать, чем, например, свойство быть полурешеткой. Отметим, что объекты СМЗК, порожденной I и M, не обязательно имеют простую структуру. Например, полумодуль $M -\circ I$ будет порождаться образующими(несвободными) $[2] : 1 \mapsto 2, [3] : 1 \mapsto 3$, полумодуль $(M -\circ I) \otimes (M -\circ I)$ будет иметь четыре образующих и т.д.

Corollary 6.8. *При тех же условиях, морфизм $|h_m|$ может принимать только одно из двух значений: 0, когда его аргумент 0, и $T_{(M^m)^*}$ в противном случае (для всякого $M \in Ob(K), M \neq I$).*

Лемма 6.9. *Для всех n, r, m как в лемме 6.7 и всех интерпретаций v в СМЗК K, объектами которой (за исключением I), являются полумодули над I, удовлетворяющие* **(top)** *и* **(r-red)**, *диаграмма $|D_m|_v$ коммутативна. Таким образом, она коммутативна относительно эквивалентности $\sim_K$.*

Следует отметить, что в случае $v(a) = M \in Ob(K), M \neq I$ доказательство следует из леммы 6.7, а если $v(a) = I$, то коммутативной становится "внутренняя" диаграмма.

Пусть теперь $2 \leq k$, $n = 3^k + 1, l = n/2$. Пусть $I = I_n$, $M = \{0, 1, \ldots, l\}$. Отметим, что M является $n/2$-редуцируемым. Рассмотрим СМЗК K_k , порожденную I и M. По теореме 6.5 все ее объекты удовлетворяют **top**, и все кроме I удовлетворяют **l-red**.

Лемма 6.10. *Пусть интерпретация v определяется условием $v(a) = M \in Ob(K_k)$. При этой интерпретации диаграммы $|D_2|_v, \ldots, |D_k|_v$ некоммутативны.*

Для доказательства этой леммы мы проверяем, что образ $\mathrm{Im}(|h_j|_v)$ содержит некоторый элемент p, отличный от 0 и $T_{(M^j)^*}$, и существуют элементы $\psi \in M^{**}, \varphi \in (M^{j-1})^{**}$ такие, что два морфизма в диаграмме D_j^0 принимают различные значения на аргументе (p, ψ, φ) $(2 \leq j \leq k)$.

Теорема 6.11. *Существует бесконечно много различных многообразий СМЗК. Каждое из этих многообразий определяется (единственным) соотношением, соответствующим некоторой диаграмме D_m из описанной выше последовательности в качестве новой аксиомы.*

Для доказательства этой теоремы используется факт, что для всякого $k \geq 2$ существует m (достаточно взять $m \geq \log_2(3^k + 1)$) такое, что пара выводов D_k не может принадлежать наименьшему отношению эквивалентности, порожденному D_m. Другими словами, из коммутативности D_m не следует коммутативность D_k (в силу лемм 6.9, 6.10).

7. Зависимость диаграмм

Прямая проверка коммутативности диаграммы в данной модели (конкретной СМЗК) может быть весьма трудной задачей. Вместо этого можно попытаться выводить ее из коммутативности других диаграмм, установленной ранее. Разумеется, это не следует рассматривать, как абстрактное пожелание, а скорее как установку на разработку методов, позволяющих устанавливать зависимость диаграмм. (Ср. определение 2.4 и теорему 2.5.)

Как уже отмечалось, эта теорема показывает перспективность синтаксических методов в рассматриваемой ситуации.

По теореме 6.11 существует бесконечно много различных отношений эквивалентности $\sim$ на выводах $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Этот факт подчеркивает важность изучения зависимости диаграмм в СМЗК и замкнутых категориях с более слабой структурой.

Замечание 7.1 Ситуация отличается в случае ДЗК в силу теоремы максимальности [1]: для любой нетривиальной аксиомы $f \sim g : \Gamma \to B$ наименьшее отношение эквивалентности, определяемое этой аксиомой как в теореме 2.5 отождествляет все $f', g' : \Gamma' \to B'$. Поэтому понятие зависимости диаграмм бесполезно для ДЗК.

Для изучения диаграмм D в предыдущем разделе использовались теоретико-модельные методы.

Думается, что развитие синтаксических методов проверки зависимости диаграмм (например, построение некоторого вспомогательного исчисления с хорошими свойствами) является интересной и важной проблемой. В данный момент мы, однако, располагаем лишь некоторыми эвристиками и частными решениями.

Принимая во внимание наличие эффективных разрешающих алгоритмов для коммутативности диаграмм в свободных замкнутых категориях, первым шагом проверки было бы выяснение, не является ли диаграмма $f', g' : \Gamma' \to B'$ коммутативной уже в этом случае. Если она некоммутативна, требуется применение более тонких методов. Например, можно попытаться найти некоторые "ключевые" диаграммы, коммутативность которых влечет коммутативность многих других (например, одной из таких диаграмм может служить диаграмма "третьего сопряженного", ср. также с теоремой об аксиоматизации отношений типа $\sim_{K-nat)}$ критическими парами.).

Другие синтаксические методы, например, редукция к 2-секвенциям, могут оказаться полезными, скажем, в сочетании с подстановками и использованием свойств конгруэнций.

Пример 7.2. Можно проверить, что диаграмма

$$(a \multimap b) \multimap I, a \multimap b \otimes c, c \otimes d \multimap I, a' \multimap d \otimes b', (a' \multimap b') \multimap I \overset{\rightarrow}{\rightarrow} I$$

коммутативна тогда и только тогда, когда диаграмма

$$(a \multimap I) \multimap I, (b \multimap I) \multimap I, a \otimes b \multimap I \overset{\rightarrow}{\rightarrow} I$$

коммутативна. (Проверка импликации $\Rightarrow$ использует подстанвку I и устранение несущественных вхождений I при помощи сечений, в обратную сторону главная идея состоит в использовании сечения с выводом секвенции $(c \multimap (b \multimap b)) \multimap I \to (c \multimap I) \multimap I$.

8. Произвольные естественные преобразования и теоретико-доказательственные методы их изучения

В этой секции мы отойдем еще на шаг от чисто синтаксических свободных категорий.

Оказывается, в ряде случаев произвольные естественные преобразования могут изучаться методами теории доказательств.

Результаты, рассматриваемые ниже, публиковались в [13, 16].

Рассмотрим секвенцию $\Gamma \to A$, $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$. Как и в секции 2, Γ может рассматриваться как сокращение для $(\ldots(A_1 \otimes \ldots) \otimes A_n) \otimes I$. Если дана СМЗК K, существует стандартная интерпретация $\mathbf{L}(\mathbf{A}) \to NAT(K)$, $a \mapsto 1 : K \to K$. Пусть $|\Gamma|, |A|$ – функторы K соответствующие Γ, A через эту интепретацию. Таким образом, если дана секвенция $\Gamma \to A$ и категория K, будет изучаться класс всех естественных преобразований: $|\Gamma| \to |A|$.

Образы выводов $\Gamma \to A$ при всевозможных интерпретациях (канонические морфизмы, или канонические естественные преобразования) образуют подмножество этого класса.

Среди возникающих здесь проблем можно упомянуть проблему описания произвольных естественных преобразований $|\Gamma| \to |A|$ в терминах канонических, или проблему существования нетривиальных естественных преобразований.

Аналогичные проблемы могут рассматриваться не только в случае замкнутых категорий различных типов, но также для других типов категорий с дополнительной структурой (где могут понадобиться другие логические исчисления для представления канонических естественных преобразований).

Прежде чем коснуться методов теории доказательств, которые могут использоваться для изучения произвольных естественных преобразований, сформулируем несколько результатов о произвольных естественных преобразованиях в замкнутых категориях.

Основное допущение, использованное для получения всех этих результатов, состояло в том, что “тензорная единица” I является образующим в категории K (см. [13, 16]).

Основные алгебраические результаты. В [13] было получено полное описание произвольных естественных преобразований $|\Gamma| \to |A|$ в случае, когда K является *компактной замкнутой категорией*[8]. Описание очень просто: каждое естественное преобразование $\phi : |\Gamma| \to |A|$ может быть представлено в виде $\phi = \theta * \phi_0$, где $\phi_0 : |\Gamma| \to |A|$ – каноническое естественное преобразование (зависящее только от секвенции $\Gamma \to A$), $\theta : I \to I$ – морфизм K, а $\theta * \phi_0$ обозначает следующую композицию

$$|\Gamma| \xrightarrow{\phi_0} |A| \xrightarrow{b^{-1}} I \otimes |A| \xrightarrow{\theta \otimes 1_{|A|}} I \otimes |A| \xrightarrow{b} |A|.$$

В [16] изучались произвольные естественные преобразования в симметрических моноидальных категориях (не замкнутых, т.е., без внутреннего *hom*-функтора $\multimap$), к структуре которых добавлены бипроизведение и диагональный функтор.(Диагональный

функтор позволяет отождестлять аргументы естественных преобразований, и общий случай не может более сводиться к случаю преобразований $\phi_0 : |\Gamma| \to |A|$ с уравновешенной секвенцией $\Gamma \to A$.) Здесь также удалось получить полное описание естественных преобразований. В общем случае, благодаря наличию бипроизведений и диагонального функтора, они получаются из канонических естественных преобразований с использованием матриц, элементами которых служат морфизмы $\theta : I \to I$.

Основная техническая лемма. Важную роль при получении этих результатов играла следующая лемма. (См. [13].)

Лемма 8.1. *Пусть K – некоторая СМЗК, и I является образующим в K. Пусть $\phi : |(A \multimap p) \otimes (p \multimap B)| \to |C|$ – естественное преобразование*

---

[8]Компактные замкнутые категории образуют подкласс СМЗК, характеризующийся наличием двух дополнительных естественных изоморфизмов: k_A : $(A \multimap I) \multimap I \to A$ и $l_{AB} : (A \multimap B) \to (A \multimap I) \otimes B$.

в K (переменная p имеет только указанные явно вхождения). Тогда ϕ может быть представлено в виде следуюшей композиции:

$$|(A -\circ p) \otimes (p -\circ B)| \overset{|Comp|}{\rightarrow} |A -\circ B| \overset{\phi_0}{\rightarrow} |C|$$

где $Comp : (A -\circ p) \otimes (p -\circ B) \rightarrow A -\circ B$ – стандартный вывод, представляющий "внутреннюю" композицию, а ϕ_0 – некоторое естественное преобразование в K, имеющее одним аргументом меньше, чем ϕ.

Замечание 8.2 Очевидно, используя коммутативность и ассоциативность $\otimes$ и сопряженность $\otimes$ и $-\circ$, можно переместить все формулы кроме $(A -\circ p), (p -\circ B)$ в правую часть секвенции. После этого применение леммы позволит представить всякое естественное преобразование в виде композиции канонической части и более простого естественного преобразования, зависящего от меньшего числа аргументов.

Совместное использование алгебраических и теоретико-доказательственных методов. Как эти результаты можно использовать в сочетании с методами теории доказательств, можно проиллюстрировать на примере редукции к 2-секвенциям.

Теорему 3.3 можно применить к произвольным естественным преобразованиям (этот ее вариант можно найти в [13]). То есть, если дана произвольная СМЗК K и два естественных преобразования $\phi_1, \phi_2 : |\Gamma| \rightarrow |C|$, то существуют естественные преобразования $\phi'_1, \phi'_2 : |\Gamma'| \rightarrow |p|$, где $|\Gamma'| \rightarrow |p|$ – чистая 2-секвенция, такая, что $\phi_1 = \phi_2 \iff \phi'_1 = \phi'_2$ Более того, ϕ'_1, ϕ'_2 можно получить из ϕ_1, ϕ_2 композицией с каноническими естественными преобразованиями, а ϕ_1, ϕ_2 можно получить из ϕ'_1, ϕ'_2 подстановками (композицией с функторами) и композицией с каноническими естественными преобразованиями.

Используя этот факт и лемму 8.1, можно убедиться, что с их помощью можно получить полное описание естественных преобразований, если $\Gamma \rightarrow p$ является уравновешенной 2-секвенцией и Γ содержит только члены вида $a -\circ b$ или отдельные переменные. (В этом случае все переменные можно поэтапно исключить из "неканонической" части.) В общем случае процесс может остановится, если встретятся члены вида $(a -\circ b) -\circ p, p -\circ c \otimes d$, поскольку секвенция ("тип" ϕ_0 в лемме 8.1) может перестать быть 2-секвенцией.

Таким образом, очевидно, преобразования диаграмм и понятие зависимости диаграмм могут быть полезными даже при изучении произвольных естественных преобразований.

9. Заключение

В данной статье мы постарались показать, что изучение несвободных категорий может представлять интерес для специалистов по теории доказательств и категорной логике, а также проиллюстрировать эффективность методов теории доказательств в этой области.

Рассмотренные выше примеры показывают, что даже изучение структуры свободной категории в “нестандартной” ситуации может быть трудной задачей (как в случае гипотезы ”третьего сопряженного” и проблемы полной когерентности, где речь идет о структуре свободной категории в многообразии СМЗК, определенном при помощи дополнительной аксиомы).

Существование бесконечного множества различных многообразий СМЗК показывает, что описание в каждом случае свободной категории в соответствующем классе едва ли оправданно с практической точки зрения.

С другой стороны, методы теории доказательств позволят изучать интересные конкретные случаи зависимости диаграмм “локально”.

Описание произвольных естественных преобразований, рассмотренное в предыдущем разделе, может рассматриваться также как подход к представлению естественных преобразований в более сложно устроенной категории с использованием естественных преобразований и морфизмов в более простых категориях (например, естественных преобразований в свободной категории и эндоморфизмов I). Это позволяет получить новые теоремы когерентности.

Мы полагаем, что это направление исследований приведет к новым интересным приложениям теории доказательств в категорной алгебре, а более широкий взгляд на категорную семантику логических исчислений поможет лучше понять их свойства, в частности, в том что касается эквивалентности выводов.

В заключение, мы хотим выразить благодарность Kosta Dosen и Zoran Petric, которые помогли прояснить ряд вопросов, касающихся теоретического контекста, и улучшить представление наших результатов, а также Николаю Васильеву, принимавшему участие в обсуждении ряда алгебраических аспектов работы.

Литература

1. K. Dosen, Z. Petric, *The maximality of the typed lambda calculus and of cartesian closed catgeories.* Belgrade, Publications de l’Institut Mathématique, Nouvelle Série, **68 (82)** (2000), 1–19.

2. S. Eilenberg, G. M. Kelly, *A generalization of the functorial calculus.* — J. Algebra (1966).
3. G.-Y. Girard, Y. Lafont, *Linear logic and lazy computation.* In: Proc.TAPSOFT 87 (Pisa), **2**, 52–66, LNCS **250** (1987).
4. J. Golan, *Semirings and their applications.* Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht (1999).
5. G. M. Kelly, S. Mac Lane, *Coherence in Closed Categories.* J. Pure Appl. Algebra, **1(1)** (1971), 97–140.
6. G. M. Kelly, *A cut-elimination theorem.* — Lect. Notes Math., **281** (1972), 196–213.
7. J. Lambek, *Deductive Systems and Categories.* I. — Math. Systems Theory, **2** (1968), 287–318.
8. J. Lambek, *Deductive Systems and Categories.* II. — Lect. Notes Math., **86**, Springer, 1969, 76–122.
9. J. Lambek, *Deductive Systems and Categories.* III. — Lect. Notes Math., **274**, Springer, 1972, 57–82.
10. L. Mehats, S. Soloviev, *Coherence in SMCCs and equivalences on derivations in IMLL with unit.* — Annals Pure Appl. Logic, **147**, №3, p. 127-179, august 2007.
11. G. E. Mints, *Closed categories and Proof Theory.* — J. Soviet Math., **15** (1981), 45–62.
12. G. E. Mints, *Category theory and proof theory* (in Russian), in: Aktualnye voprosy logiki i metodologii nauki, Naukova Dumka, Kiev, 1980, 252-278. (English translation, with permuted title, in: G.E. Mints. Selected Papers in Proof Theory, Bibliopolis, Naples, 1992.)
13. S. Soloviev, *On natural transformations of distinguished functors and their superpositions in certain closed categories.* — J. Pure Appl. Algebra, **47** (1987), 181–204.
14. S. Soloviev, *On the conditions of full coherence in closed categories.* — J. Pure Appl. Algebra, **69** (1990), 301–329.
15. S. Soloviev, *Proof of a conjecture of S. Mac Lane.* — Ann. Pure Appl. Logic, **90** (1997), 101–162.
16. R. Cockett, M. Hyland, S. Soloviev, *Natural transformations between tensor powers in the presence of direct sums.* Rapport de Recherche, 01-12-R, IRIT, Jul. (2001).
17. S. Soloviev, V. Orevkov, *On categorical equivalence of Gentzen-style derivations in IMLL.* — Theor. Comp. Science, **303** (2003), 245–260.
18. R. Voreadou, *Coherence and non-commutative diagrams in closed categories.* — Memoirs of the AMS, **9**, №. 1, №. 182, Jan. (1977).

El Khoury A., Soloviev S., Mehats L., Spivakovsky M. Categorical interpretation of logical derivations and some its applications to algebra.

We consider certain applications of proof theory to the study of algebraic categories. The case usually studied in literature is the case of free categories with additional structure. In this paper we consider several problems in non-free categories, such as the problem of full coherence, the problem of dependency of diagrams, the problem of description of ar-

bitrary natural transformations, that show that the applications of proof theory to categories may go much farther.

Поступило 21 сентября 2009 г.

IRIT, UMR 5505 CNRS,
University of Toulouse,
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, France
E-mail: elkhoury, soloviev@ irit.fr

LaBRI, University of Bordeaux I,
351 Cours de la Libération 33405 Talence, France
E-mail: mehats@ labri.fr.

Institute of Mathematics,
UMR 5219 CNRS, University of Toulouse,
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, France
E-mail: spivakov@ math.ups-tlse.fr.