Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

Л. Петров

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА СТРОГИХ РАЗБИЕНИЯХ

1. Введение

1.1. Граф Шура и его граница

Пусть $\mathbb{S}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ – множество разбиений числа n в сумму *различных* положительных слагаемых (такие разбиения называются *строгими*).[1] Строгие разбиения представляются *сдвинутыми диаграммами Юнга* [29, Глава III, §7, Пример 8]. *Граф Шура* $\mathbb{S} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n$ – это $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-градуированный граф, вершинами которого являются всевозможные сдвинутые диаграммы Юнга. Кратности ребер в $\mathbb{S}$ определяются по формуле (2.2) ниже.

Используя методы работы [12] вместе с результатами из [10],[2] можно показать, что граница Мартина графа $\mathbb{S}$ представляет собой бесконечномерный симплекс

$$\Omega_+ := \left\{ \mathsf{x} = (\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \dots) \colon \mathsf{x}_1 \geqslant \mathsf{x}_2 \geqslant \dots \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i \leqslant 1 \right\}. \tag{1.1}$$

Рассматриваемый как подмножество бесконечномерного куба $[0,1]^{\infty}$ с продакт-топологией, симплекс Ω_+ является метризуемым сепарабельным компактом.

1.2. Проективные представления симметрических групп

Каждое множество $\mathbb{S}_n$, $n \geqslant 1$, можно рассматривать как проективный двойственный объект к симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ в том смысле, что $\mathbb{S}_n$ параметризует неприводимые проективные представления $\mathfrak{S}_n$ [9, 23]. Как известно из [18], точки симплекса Ω_+ параметризуют нормированные неразложимые проективные характеры бесконечной

Ключевые слова : марковский процесс, случайное блуждание, разбиения, дифференциалный оператор.

[1] Множество $\mathbb{S}_0$ состоит из пустого разбиения $\varnothing$.

[2] Другое доказательство этого факта содержится в [18].

симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$. В этом смысле можно сказать, что симплекс Ω_+ является проективным двойственным объектом к группе $\mathfrak{S}_\infty$.

Теория проективных представлений симметрических групп во многом схожа с теорией обычных представлений, например:

- Двойственным объектом к $\mathfrak{S}_n$ в обычном смысле является множество всех (не обязательно строгих) разбиений числа n;
- Двойственным объектом к $\mathfrak{S}_\infty$ в обычном смысле является *симплекс Тома* [27], состоящий из пар $(\omega;\omega') \in [0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$, таких что
$$\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \dots \geqslant 0, \quad \omega_1' \geqslant \omega_2' \geqslant \dots \geqslant 0, \quad \sum_i \omega_i + \sum_j \omega_j \leqslant 1. \tag{1.2}$$
- Роль, которую в теории проективных представлений играют Q-функции Шура [9], в теории обычных представлений выполняют хорошо известные s-функции Шура [29, Глава I, §3].

Существует естественное вложение Ω_+ в Ω, введенное в [8], которое переводит $\mathsf{x} = (\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \dots) \in \Omega_+$ в $(\omega;\omega') \in \Omega$, где $\omega = \omega' = (\mathsf{x}_1/2, \mathsf{x}_2/2, \dots)$.

1.3. Мультипликативные меры

В статье [2] А. Бородин определил *мультипликативные меры* на графе Шура. Это последовательность вероятностных мер M_n^α на $\mathbb{S}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, зависящих от одного параметра $\alpha \in (0, +\infty)$. Меры M_n^α образуют когерентное семейство (или, что то же самое, отвечают центральной мере в терминологии [15]).

Согласно общему формализму (см., напр., [12]), для каждого $\alpha > 0$ мультипликативные меры $\{M_n^\alpha\}$ отвечают борелевской вероятностной мере $\mathsf{P}^{(\alpha)}$ на Ω_+. В нашем случае это соответствие имеет следующий вид. Рассмотрим вложения $\iota_n\colon \mathbb{S}_n \hookrightarrow \Omega_+$, $\mathbb{S}_n \ni \lambda \mapsto (\lambda_1/n, \lambda_2/n, \dots) \in \Omega_+$, где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant 0$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ – компоненты строгого разбиения λ. При $n \to \infty$ (и фиксированном α) образы мер M_n^α при ι_n слабо сходятся к мере $\mathsf{P}^{(\alpha)}$ на Ω_+.

1.4. Случайные блуждания на $\mathbb{S}_n$

С когерентной системой мер на градуированном графе можно канонически связать последовательность случайных блужданий на этажах графа.[3] Эти случайные блуждания называются *марковскими цепями вверх/вниз*.

[3]Предполагается, что граф удовлетворяет некоторым дополнительным усло-

Конструкция похожих случайных блужданий впервые появилась в работе Фульмана [6].[4] Фульман в [6, 7] изучал такие свойства случайных блужданий, как структура спектра, собственные функции, скорость сходимости к стационарному распределению, и др. В этих работах рассмотрен ряд примеров марковских цепей, связанных с различными когерентными системами мер на различных градуированных графах, в частности, с мерами Планшереля и z-мерами на графе Юнга, со структурами разбиений Ювенса–Питмана (Ewens–Pitman's partition structures) на графе Кингмана,[5] а также с мерами Планшереля на графе Шура (см. определение 2.3 ниже).

В работах [3, 30, 19] изучается предельное поведение различных цепей вверх/вниз. В [3] рассматривается случай z-мер на графе Юнга, в [30] – цепи вверх/вниз, связанные со структурами разбиений Ювенса–Питмана, а в [19] – случай графа Юнга с более общими кратностями Джека (этот граф введен в [12]).

В данной работе рассматриваются цепи вверх/вниз, построенные по мультипликативным мерам на графе Шура. Они зависят от параметра $\alpha > 0$. Пространство состояний n-й цепи вверх/вниз есть $\mathbb{S}_n$, она сохраняет вероятностную меру M_n^α на $\mathbb{S}_n$. Мы изучаем предельное поведение этих марковских цепей при $n \to \infty$.

1.5. Предельная диффузия и ее предгенератор

Зафиксируем $\alpha > 0$. Вложения $\iota_n \colon \mathbb{S}_n \hookrightarrow \Omega_+$, $n \geqslant 1$, из §1.3 определяют масштабное преобразование пространства. Наряду с ним рассмотрим масштабное преобразование времени, состоящее в ускорении n-й цепи вверх/вниз в n^2 раз.[6] При $n \to \infty$ и данных масштабных преобразованиях цепи вверх/вниз на $\mathbb{S}_n$ (соответствую-

---

виям (приведенным, например, в [7, §3]), которые позволяют рассматривать когерентные системы мер на нем. Граф Шура им удовлетворяет. См. также [3, §1].

[4]Он рассматривал марковские цепи вниз/вверх, однако построение цепей вверх/вниз использует те же идеи.

[5]Вершинами графа Юнга являются все (не обязательно строгие) разбиения, которые отождествляются с обычными диаграммами Юнга [29, Глава I, §1]. z-меры на графе Юнга возникли в связи с задачей гармонического анализа на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ [13, 14] и изучались в работах А. Бородина и Г. Ольшанского (см. список литературы в [3]).
Множество вершин графа Кингмана то же, что и у графа Юнга, разница состоит в кратностях ребер. Когерентная система на графе Кингмана обычно называется *структурой разбиений*, этот термин принадлежит Кингману [16]. Семейство структур разбиений Ювенса-Питмана было введено в [5, 21], оно тесно связано с мерами Пуассона–Дирихле, см., напр., [22].

[6]То есть, один шаг n-й цепи соответствует малому интервалу времени порядка

щие мультипликативным мерам) сходятся к диффузионному процессу $\{\mathsf{X}_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ в Ω_+.[7] Процесс $\mathsf{X}_\alpha(t)$ обратим относительно меры $\mathsf{P}^{(\alpha)}$ и является эргодическим.

Основной результат работы состоит в выражении предгенератора процесса $\mathsf{X}_\alpha(t)$ как формального дифференциального оператора. Для формулировки этого результата сперва дадим некоторые определения. Через $C(\Omega_+)$ обозначим банахову алгебру действительнозначных непрерывных функций на Ω_+ с поточечными операциями и супремум-нормой. Через $\mathcal{F}$ обозначим подалгебру в $C(\Omega_+)$, свободно порожденную (как коммутативная алгебра с единицей) алгебраически независимыми непрерывными функциями $\mathsf{q}_{2k}(\mathsf{x}) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i^{2k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Определим оператор $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, зависящий от α:

$$\begin{aligned} A = {} & \sum_{i,j=1}^{\infty} (2i+1)(2j+1)\left(\mathsf{q}_{2i+2j} - \mathsf{q}_{2i}\mathsf{q}_{2j}\right) \frac{\partial^2}{\partial \mathsf{q}_{2i}\partial \mathsf{q}_{2j}} \\ & + 2\sum_{i,j=0}^{\infty} (2i+2j+3)\, \mathsf{q}_{2i}\mathsf{q}_{2j} \frac{\partial}{\partial \mathsf{q}_{2i+2j+2}} \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1)\left(2i + \frac{\alpha}{2}\right) \mathsf{q}_{2i} \frac{\partial}{\partial \mathsf{q}_{2i}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где полагаем по определению $\mathsf{q}_0 \equiv 1$. Таким образом, A – формальный дифференциальный оператор второго порядка в алгебре $\mathcal{F} = \mathbb{R}[\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \mathsf{q}_6, \ldots]$.

Теорема 1.1. *Оператор A (1.3) замыкаем в пространстве $C(\Omega_+)$ и его замыкание порождает диффузию $\mathsf{X}_\alpha(t)$.*

1.6. Метод

Выше результаты были сформулированы в вероятностных терминах. Однако, использование методов теории вероятностей в доказательствах по существу сводится к применению результатов Этье, Куртца и Троттера [28, 4] об аппроксимации непрерывных полугрупп операторов дискретными. Существенная часть данной работы

n^{-2}.

[7] Под диффузионным процессом понимается строго марковский процесс с непрерывными траекториями. Точный смысл сходимости марковских цепей к диффузионному процессу описан далее в §7.

состоит в вычислениях в алгебре полиномов. Эти вычисления подсказаны статьей [19], однако в нашей ситуации есть существенные отличия.

Опишем структуру работы. В §2 приводится определение когерентных семейств на графе Шура, мультипликативных мер (важного однопараметрического класса когерентных семейств), а также связанных с ними цепей вверх/вниз. В §3 вводятся перемежающиеся координаты Керова сдвинутых диаграмм Юнга (перемежающиеся координаты обычных диаграмм Юнга были введены в работе С. Керова [11]) и даются их некоторые свойства. В §4 приводится определение алгебры дважды симметрических функций и изучается их связь с графом Шура и координатами Керова. В §5–6 происходит основное вычисление в алгебре дважды симметрических функций. В результате мы выписываем переходный оператор n-й цепи вверх/вниз как дифференциальный оператор второго порядка в этой алгебре (теорема 6.1). В §7 доказывается существование предельного процесса на симплексе Ω_+ и вычисляется его предгенератор (1.3).

Данная работа является сокращенным вариантом препринта [20]. Автор выражает благодарность Г. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к ней, а также В. Иванову за полезные обсуждения.

2. Мультипликативные меры

2.1. Граф Шура

Разбиение – это (бесконечная) невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{\ell(\lambda)},0,0,\dots),\quad \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\lambda_{\ell(\lambda)}>0,\quad \lambda_i\in\mathbb{Z}_{>0}, \tag{2.1}$$

в которой только конечное число компонент отлично от нуля. Число ненулевых компонент $\ell(\lambda)\geqslant 0$ называется *длиной* разбиения. *Вес* разбиения – это $|\lambda|:=\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}\lambda_i$. Разбиение λ называется *строгим*, если все его ненулевые компоненты различны: $\lambda_1>\lambda_2>\dots>\lambda_{\ell(\lambda)}>0$. Строгие разбиения обозначаются через $\lambda,\mu,\nu,\varkappa,\dots$. Разбиения, про которые не предполагается, что они строгие, будем называть *обычными* и обозначать через $\sigma,\rho,\tau,\dots$.

Строгие разбиения можно представлять *сдвинутыми диаграммами Юнга* [29, Глава III, §7, Пример 8]. Сдвинутая диаграмма Юнга формы λ состоит из $\ell(\lambda)$ строк, i-я строка ($i = 1, \dots, \ell(\lambda)$) содержит λ_i клеток, и для всех $j = 1, \dots, \ell(\lambda) - 1$ первая клетка $(j+1)$-й строки находится под второй клеткой j-й строки (см. рис. 1). Мы отождествляем строгие разбиения и соответствующие сдвинутые диаграммы Юнга.

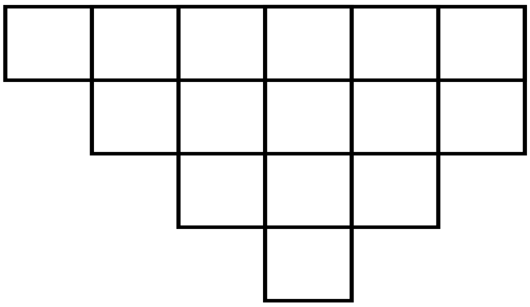

Рис. 1. Сдвинутая диаграмма Юнга формы $(6, 5, 3, 1)$.

Если λ и μ – две сдвинутые диаграммы Юнга, и λ получается из μ путем добавления одной клетки, то мы пишем $\lambda \searrow \mu$ (или, что то же самое, $\mu \nearrow \lambda$). Через λ/μ обозначаем клетку, которую надо добавить к μ, чтобы получить λ.

Пусть λ и μ – две сдвинутые диаграммы Юнга, такие что $|\lambda| = |\mu| + 1$. Положим

$$\kappa(\mu, \lambda) := \begin{cases} 2, & \text{если } \mu \nearrow \lambda \text{ и } \ell(\lambda) = \ell(\mu); \\ 1, & \text{если } \mu \nearrow \lambda \text{ и } \ell(\lambda) = \ell(\mu) + 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Все сдвинутые диаграммы Юнга составляют градуированное множество $\mathbb{S} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n$, где $\mathbb{S}_n := \{\lambda \colon |\lambda| = n\}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, и $\mathbb{S}_0 := \{\varnothing\}$. Множество $\mathbb{S}$ можно наделить структурой градуированного графа. Ребра в этом графе проводятся только между соседними этажами $\mathbb{S}_n$ и $\mathbb{S}_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Если $\mu \in \mathbb{S}_n$ и $\lambda \in \mathbb{S}_{n+1}$, то между μ и λ проводится $\kappa(\mu, \lambda)$ ребер. Ребра считаются ориентированными в направлении от $\mathbb{S}_n$ к $\mathbb{S}_{n+1}$. Данный ориентированный градуированный граф называется *графом Шура*.[8] Множества $\mathbb{S}_n$ будем называть *этажами* графа

[8]Иногда (напр., в [2]) под графом Шура понимается тот же самый граф с однократными ребрами. Оба графа имеют одну и ту же переходную функцию вниз (см. §2.2), поэтому для нас разница между ними несущественна.

Шура.

Через $\mathsf{h}(\mu,\lambda)$ обозначим число всех (ориентированных) путей в графе $\mathbb{S}$ от μ к λ с учетом кратности ребер. Ясно, что $\mathsf{h}(\mu,\lambda)$ отлично от нуля только если $\mu\subset\lambda$ (то есть, если диаграмма μ лежит внутри диаграммы λ). Положим $\mathsf{h}(\lambda):=\mathsf{h}(\varnothing,\lambda)$. Величина $\mathsf{h}(\lambda)$ имеет вид [29, Глава III, §7, Пример 8]:[9]

$$\mathsf{h}(\lambda)=2^{|\lambda|-\ell(\lambda)}\cdot\frac{|\lambda|!}{\lambda_1!\lambda_2!\dots\lambda_{\ell(\lambda)}!}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\ell(\lambda)}\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j},\quad \lambda\in\mathbb{S}. \tag{2.3}$$

Существует также явная формула для величин $\mathsf{h}(\mu,\lambda)$, доказанная в [10].

2.2. Когерентные системы мер и цепи вверх/вниз

Здесь, следуя [3, §1], мы приводим определения когерентной системы мер и соответствующих марковских цепей вверх/вниз для графа Шура.

Переходной функцией вниз для $\mu,\lambda\in\mathbb{S}$, таких что $|\lambda|=|\mu|+1$, называется

$$p^{\downarrow}(\lambda,\mu):=\frac{\mathsf{h}(\mu)}{\mathsf{h}(\lambda)}\kappa(\mu,\lambda). \tag{2.4}$$

Легко проверить, что

- $p^{\downarrow}(\lambda,\mu)\geqslant 0$ для всех $\mu,\lambda\in\mathbb{S}$, таких что $|\lambda|=|\mu|+1$;
- $p^{\downarrow}(\lambda,\mu)$ отлично от нуля, только для $\mu\nearrow\lambda$;
- Если $|\lambda|=n\geqslant 1$, то $\sum\limits_{\mu:|\mu|=n-1}p^{\downarrow}(\lambda,\mu)=1$.

Определение 2.1. *Когерентной системой мер на $\mathbb{S}$ называется последовательность вероятностных мер M_n на $\mathbb{S}_n$, $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, согласованная с переходной функцией вниз:*

$$M_n(\mu)=\sum_{\lambda:\lambda\searrow\mu}p^{\downarrow}(\lambda,\mu)M_{n+1}(\lambda)\qquad \text{для всех}\ \ n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ \ \text{и}\ \ \mu\in\mathbb{S}_n. \tag{2.5}$$

Здесь $M_n(\mu)$ обозначает меру одноточечного множества $\{\mu\}$.

Фиксируем когерентную систему $\{M_n\}$. *Переходной функцией вверх* для $\lambda,\nu\in\mathbb{S}$, таких что $|\lambda|=n$, $|\nu|=n+1$, $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и $M_n(\lambda)\neq 0$,

[9] Множитель $2^{|\lambda|-\ell(\lambda)}$, которого нет в соответствующей формуле в [29], возникает из-за того, что в рассматриваемом нами графе Шура другие кратности ребер.

называется
$$p^{\uparrow}(\lambda,\nu) := \frac{M_{n+1}(\nu)}{M_n(\lambda)} p^{\downarrow}(\nu,\lambda). \tag{2.6}$$

Переходная функция вверх зависит от выбора когерентной системы мер. Кроме того, $\{M_n\}$ и $p^{\uparrow}$ также согласованы:

$$M_{n+1}(\nu) = \sum_{\substack{\lambda:\lambda\nearrow\nu \\ M_n(\lambda)\neq 0}} p^{\uparrow}(\lambda,\nu) M_n(\lambda) \quad \text{для всех } n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ и } \nu\in\mathbb{S}_{n+1}. \tag{2.7}$$

Определение 2.2. *Система вероятностных мер M_n на $\mathbb{S}_n$ называется невырожденной, если $M_n(\lambda) > 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\lambda \in \mathbb{S}_n$.*

Пусть $\{M_n\}$ – невырожденная когерентная система на $\mathbb{S}$. Для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ определим марковскую цепь T_n на множестве $\mathbb{S}_n$ со следующей матрицей переходов:

$$T_n(\lambda,\widetilde{\lambda}) := \sum_{\nu:|\nu|=n+1} p^{\uparrow}(\lambda,\nu) p^{\downarrow}(\nu,\widetilde{\lambda}), \quad \lambda,\widetilde{\lambda}\in\mathbb{S}_n. \tag{2.8}$$

Данная матрица переходов является композицией переходных функций вверх (из $\mathbb{S}_n$ в $\mathbb{S}_{n+1}$) и вниз (из $\mathbb{S}_{n+1}$ обратно в $\mathbb{S}_n$). Из (2.5)–(2.7) следует, что M_n является стационарной мерой для T_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Можно легко показать, что матрица $\big[M_n(\lambda)T_n(\lambda,\widetilde{\lambda})\big]_{\lambda,\widetilde{\lambda}\in\mathbb{S}_n}$ является симметричной. По определению, это означает, что цепь T_n обратима относительно меры M_n.

2.3. Мультипликативные меры

Здесь приведены некоторые результаты статьи [2] о мультипликативных мерах на графе Шура.

Определение 2.3. *Мерой Планшереля на $\mathbb{S}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, называется*

$$\mathrm{Pl}_n(\lambda) := \frac{\big(\mathsf{h}(\lambda)\big)^2}{n!} 2^{\ell(\lambda)-n}, \quad \lambda\in\mathbb{S}_n, \tag{2.9}$$

где $\mathsf{h}(\lambda)$ определено в (2.3).

Меры $\{\mathrm{Pl}_n\}$ образуют невырожденную когерентную систему на $\mathbb{S}$.

Определение 2.4. *Система вероятностных мер M_n на $\mathbb{S}_n$ называется мультипликативной, если*

$$M_n(\lambda) = \mathrm{Pl}_n(\lambda) \cdot \frac{1}{Z(n)} \cdot \prod_{\square\in\lambda} f\left(\mathrm{i}(\square), \mathrm{j}(\square)\right) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ и } \lambda \in \mathbb{S}_n \tag{2.10}$$

для некоторых функций $f\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^2 \to \mathbb{C}$ и $Z\colon \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{C}$. Здесь произведение берется по всем клеткам сдвинутой диаграммы λ, а через $\mathrm{i}(\square)$ и $\mathrm{j}(\square)$ обозначены номер строки и номер столбца клетки $\square$, соответственно.[10]

Теорема 2.5 (Бородин [2]). *Невырожденная мультипликативная система вероятностных мер M_n на $\mathbb{S}_n$ является когерентной тогда и только тогда, когда функции f и Z в (2.10) имеют вид*

$$\begin{aligned} f(i,j) = f_\alpha(i,j) &:= (j-i)(j-i+1) + \alpha, \\ Z(n) = Z_\alpha(n) &:= \alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2n-2) \end{aligned} \tag{2.11}$$

для некоторого $\alpha \in (0, +\infty]$.[11]

Мультипликативные когерентные меры будем обозначать через $\{M_n^\alpha\}$. Переходная функция вверх, соответствующая $\{M_n^\alpha\}$, имеет вид

$$p_\alpha^\uparrow(\lambda, \nu) = \frac{\mathrm{c}(\nu/\lambda)\left(\mathrm{c}(\nu/\lambda)+1\right)+\alpha}{2|\lambda|+\alpha} \cdot \frac{\mathsf{h}(\nu)}{\mathsf{h}(\lambda)\left(|\lambda|+1\right)}. \tag{2.12}$$

где $\alpha \in (0, +\infty]$ и $\mathrm{c}(\square) := \mathrm{j}(\square) - \mathrm{i}(\square)$ – *содержание* клетки $\square$.

Замечание 2.6 Можно рассматривать *вырожденные мультипликативные меры*, которые “живут” не на всем графе $\mathbb{S}$, а на его некотором конечном подграфе. Фиксируем некоторое $N = 2, 3, \dots$ и рассмотрим конечный подграф $\mathbb{S}(N) := \{\lambda \in \mathbb{S}\colon \lambda_1 \leqslant N\} \subset \mathbb{S}$. Можно легко проверить, что при $\alpha = -N(N+1)$ формулы (2.10)–(2.11) определяют когерентную систему мер на $\mathbb{S}(N)$.[12] Также видно, что на $\mathbb{S}(N)$ система мер $\left\{M_n^{-N(N+1)}\right\}$ уже является невырожденной.

Определение 2.7. *В дальнейшем мы считаем, что $\alpha \in (0, +\infty)$. Под T_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, всюду далее понимается переходный оператор (за один шаг) n-й марковской цепи вверх/вниз на $\mathbb{S}_n$, построенной по мультипликативной когерентной системе мер $\{M_n^\alpha\}$. Оператор T_n действует на функции на $\mathbb{S}_n$.*

---

[10] Номер строки отсчитывается сверху вниз, а номер столбца – слева направо.

[11] Случай $\alpha = +\infty$ соответствует мере Планшереля.

[12] Определение когерентной системы на $\mathbb{S}(N)$ можно дать аналогично определению 2.1.

3. Перемежающиеся координаты сдвинутых диаграмм Юнга

В этом разделе определяются перемежающиеся координаты сдвинутых диаграмм Юнга, которые аналогичны перемежающимся координатам обычных диаграмм Юнга. Последние были введены С. Керовым [11]. Оказывается, что через координаты Керова сдвинутых диаграмм Юнга можно удобно записать переходную функцию вверх $p_\infty^\uparrow$, связанную с мерами Планшереля, а также переходную функцию вниз $p^\downarrow$. Данный подход похож на [11]. Результаты [11] используются в [19] для исследования цепей вверх/вниз, соответствующих z-мерам на графе Юнга с кратностями Джека, однако в случае графа Шура возникают некоторые существенные отличия. Доказательства утверждений, приведенных в данном разделе, можно найти в [20, §3].

Пусть $\lambda \in \mathbb{S}_n$, $n \geqslant 1$. Через $X(\lambda)$ обозначим множество $\{\mathrm{c}(\nu/\lambda)\colon \nu \searrow \lambda\}$. Другими словами, $X(\lambda)$ – множество содержаний всех клеток, которые могут быть добавлены к диаграмме λ. Для любого $x \in X(\lambda)$ существует единственная сдвинутая диаграмма $\nu \searrow \lambda$, такая что $\mathrm{c}(\nu/\lambda) = x$. Обозначим ее через $\lambda + \square_+(x)$. Подобным образом, пусть $Y(\lambda) := \{\mathrm{c}(\lambda/\mu)\colon \mu \nearrow \lambda\}$ – множество содержаний всех клеток, которые могут быть удалены из λ. Для любого $y \in Y(\lambda)$ существует единственная диаграмма $\mu \nearrow \lambda$, для которой $\mathrm{c}(\lambda/\mu) = y$. Обозначим ее через $\lambda - \square_-(y)$. Для $\lambda = \varnothing$ положим по определению $X(\varnothing) := \{0\}$, $Y(\varnothing) := \varnothing$. Предполагаем, что множества $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ записаны в возрастающем порядке.

Определение 3.1. *Числа $[X(\lambda); Y(\lambda)]$ называются координатами Керова сдвинутой диаграммы Юнга λ.*

Предложение 3.2 (Свойство перемежевания). *Пусть λ – сдвинутая диаграмма Юнга.*

(a) *Если λ содержит строку длины 1, то для некоторого целого $d \geqslant 1$,*

$$X(\lambda) = \{x_1, \dots, x_d\}, \quad Y(\lambda) = \{0, y_2, \dots, y_d\} \tag{3.1}$$

и

$$0 = y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \dots < y_d < x_d. \tag{3.2}$$

(b) *Если λ не содержит строки длины 1, то для некоторого целого $d \geqslant 0$,*[13]

$$X(\lambda) = \{0, x_1, \dots, x_d\}, \qquad Y(\lambda) = \{y_1, \dots, y_d\} \tag{3.3}$$

[13] Заметим, что $d = 0$ только для $\lambda = \varnothing$.

и
$$0 = x_0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \cdots < y_d < x_d. \tag{3.4}$$

Замечание 3.3. В случае обычных диаграмм Юнга [11, 19] число элементов в $X(\lambda)$ всегда на единицу больше, чем число элементов в $Y(\lambda)$. Для случая сдвинутых диаграмм это не всегда так. Положим $X'(\lambda) := X(\lambda) \setminus \{0\}$. Ясно, что в $X'(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ всегда одинаковое число элементов.

Замечание 3.4. Можно показать, что сдвинутая диаграмма λ однозначно определяется своими координатами Керова, или, что то же самое, парой последовательностей $X'(\lambda)$ и $Y(\lambda)$.

Предложение 3.5. *Для всех $\lambda \in \mathbb{S}$ выполнено*
$$\sum_{x \in X(\lambda)} x(x+1) - \sum_{y \in Y(\lambda)} y(y+1) = 2|\lambda|. \tag{3.5}$$

Перейдем к выражению переходных функций на графе Шура через координаты Керова.

Пусть λ – сдвинутая диаграмма Юнга, v – комплексная переменная. Положим
$$\mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda) := \frac{\prod\limits_{y \in Y(\lambda)} (v - y(y+1))}{v \cdot \prod\limits_{x \in X'(\lambda)} (v - x(x+1))}. \tag{3.6}$$

Из замечания 3.3 следует, что степень знаменателя всегда на единицу больше степени числителя. В силу предложения 3.2, если λ содержит строку длины 1, то числитель и знаменатель $\mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda)$ можно поделить на v, а если λ не содержит строку длины 1, то дробь в правой части (3.6) несократима. В любом случае, знаменатель несократимой записи этой дроби равен $\prod\limits_{x \in X(\lambda)} (v - x(x+1))$.

Пусть $\theta_x^{\uparrow}(\lambda)$, $x \in X(\lambda)$, – коэффициенты разложения $\mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda)$ в сумму неприводимых дробей:
$$\mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda) = \sum_{x \in X(\lambda)} \frac{\theta_x^{\uparrow}(\lambda)}{v - x(x+1)}. \tag{3.7}$$

Предложение 3.6. *Для любой сдвинутой диаграммы λ и всех $x \in X(\lambda)$ выполнено*

$$\theta_x^{\uparrow}(\lambda) = p_{\infty}^{\uparrow}(\lambda, \lambda + \square_+(x)), \tag{3.8}$$

где $p_{\infty}^{\uparrow}$ – переходная функция вверх, соответствующая когерентной системе мер Планшереля на графе Шура (§2).

Заметим, что теперь (2.12) можно переписать в виде (здесь $\alpha \in (0, +\infty]$):

$$p_{\alpha}^{\uparrow}(\lambda, \lambda + \square_+(x)) = \frac{x(x+1)+\alpha}{2|\lambda|+\alpha} \cdot \theta_x^{\uparrow}(\lambda) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{S} \quad \text{и} \quad x \in X(\lambda). \tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим переходную функцию вниз.

Пусть $\lambda \in \mathbb{S}$ и v – комплексная переменная. Положим

$$\mathcal{R}^{\downarrow}(v; \lambda) := \frac{1}{v\mathcal{R}^{\uparrow}(v; \lambda)} = \frac{\prod\limits_{x \in X'(\lambda)} (v - x(x+1))}{\prod\limits_{y \in Y(\lambda)} (v - y(y+1))}. \tag{3.10}$$

Заметим, что и в числителе, и в знаменателе слагаемые с v в максимальной степени равны v^d, где $d \geqslant 0$ – число элементов в $X'(\lambda)$.

Пусть $\theta_y^{\downarrow}(\lambda)$, $y \in Y(\lambda)$ – коэффициенты следующего разложения $\mathcal{R}^{\downarrow}(v; \lambda)$ в сумму неприводимых дробей:

$$\mathcal{R}^{\downarrow}(v; \lambda) = 1 - \sum_{y \in Y(\lambda)} \frac{\theta_y^{\downarrow}(\lambda)}{v - y(y+1)}. \tag{3.11}$$

Предложение 3.7. *Для всех непустых диаграмм $\lambda \in \mathbb{S}$ выполнено*

$$\theta_y^{\downarrow}(\lambda) = 2|\lambda| \cdot p^{\downarrow}(\lambda, \lambda - \square_-(y)), \qquad y \in Y(\lambda), \tag{3.12}$$

где $p^{\downarrow}(\cdot, \cdot)$ – переходная функция вниз (§2.2).

4. Дважды симметрические функции

4.1. Алгебра дважды симметрических функций

Пусть Λ – алгебра симметрических функций (с действительными коэффициентами) от формальных переменных $y_1, y_2, \ldots$. Алгебра Λ

свободно порождена (как коммутативная алгебра с единицей) суммами Ньютона $p_k := \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^k$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, что можно записать как $\Lambda = \mathbb{R}[p_1, p_2, p_3, \dots]$. Через Γ обозначим подалгебру в Λ, порожденную суммами Ньютона с нечетными номерами: $\Gamma = \mathbb{R}[p_1, p_3, p_5, \dots]$. Алгебру Γ будем называть *алгеброй дважды симметрических функций.* В Λ существует естественная фильтрация по степеням полиномов в формальных переменных y_i, которая определяется равенствами $\deg p_k = k$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Подалгебра $\Gamma \subset \Lambda$ наследует эту фильтрацию. Таким образом, фильтрацию в Γ можно определить, полагая $\deg p_{2m-1} = 2m-1$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Другими словами, $\Gamma = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Gamma^{(m)}$, $\Gamma^{(0)} \subset \Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(2)} \subset \dots \subset \Gamma$, где $\Gamma^{(m)}$ – конечномерное подпространство в Γ, состоящее из элементов степени $\leqslant m$, то есть, $\Gamma^{(0)} = \mathbb{R}1$ и $\Gamma^{(m)}$ – линейная оболочка функций $\{p_1^{r_1} p_3^{r_3} \dots : r_1 + 3r_3 + \dots \leqslant m\}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Конечные произведения вида $p_1^{r_1} p_3^{r_3} \dots$ образуют базис Γ как векторного пространства над $\mathbb{R}$. Этот базис индексируется разбиениями, все компоненты которых нечетные.[14] Каждый элемент $p_1^{r_1} p_3^{r_3} \dots$ является однородным. Нам потребуется еще один базис в Γ, состоящий из однородных функций, который индексируется строгими разбиениями.[15]

Определение 4.1 (Q-функции Шура). *Пусть*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0, 0, \dots)$$

– строгое разбиение. Для всех $n \geqslant \ell(\lambda)$ положим

$$R_{\lambda|n}(y_1, \dots, y_n) := y_1^{\lambda_1} \dots y_{\ell(\lambda)}^{\lambda_{\ell(\lambda)}} \cdot \prod_{\substack{i \leqslant \ell(\lambda) \\ i<j\leqslant n}} \frac{y_i + y_j}{y_i - y_j}. \tag{4.1}$$

Если $n \geqslant \ell(\lambda)$, положим[16]

$$\mathcal{Q}_\lambda(y_1, \dots, y_n, 0, \dots) := \frac{2^{\ell(\lambda)}}{(n-\ell(\lambda))!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} R_{\lambda|n}(y_{w(1)}, \dots, y_{w(n)}), \tag{4.2}$$

[14] Действительно, элементу базиса $p_1^{r_1} p_3^{r_3} \dots$ можно поставить в соответствие разбиение с r_1 единицами, r_3 тройками, и так далее.

[15] Как известно, для каждого $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ число строгих разбиений m равно числу разбиений m на нечетные слагаемые.

[16] Здесь $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа.

а для $n < \ell(\lambda)$ *положим* $\mathcal{Q}_\lambda(y_1, \dots, y_n, 0, \dots) := 0$. *Из результатов* [10] *следует, что выражения* $\mathcal{Q}_\lambda(y_1, \dots, y_n, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, *определяют дважды симметрическую функцию* $\mathcal{Q}_\lambda \in \Gamma$.[17] *Функции* $\mathcal{Q}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{S}$, *называются* Q*-функциями Шура.*

Каждая Q-функция Шура $\mathcal{Q}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{S}$, является однородным элементом алгебры Γ степени $|\lambda|$. Набор $\{\mathcal{Q}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{S}}$ является базисом Γ как линейного пространства над $\mathbb{R}$.

Замечание 4.2 Подалгебра в Λ, порожденная суммами Ньютона с нечетными номерами, рассматривалась многими авторами, однако для нее не существует единого общепринятого названия и обозначения. В [10] и [17] она обозначается через Γ, в [9] – через Δ, в [25, 26] – через Ω, а в недавней работе [1] – через $\mathcal{D}$. В [10] она называется алгеброй суперсимметрических функций, а в [1] – алгеброй дважды симметрических (doubly symmetric) функций. В данной работе мы используем последнее название, а обозначаем эту алгебру через Γ.

Мы не употребляем термин "суперсимметрические функции", так как он уже использовался Стембриджем [24] в другом смысле. А именно, он изучал алгебру с единицей, порожденную следующими *суперсимметрическими суммами Ньютона* от двух бесконечных наборов переменных u_i и v_j:

$$p_k(u_1, u_2, \dots; v_1, v_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^k - \sum_{j=1}^{\infty} v_j^k, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{4.3}$$

Алгебру дважды симметрических функций Γ, определенную выше, можно рассматривать как алгебру, порожденную суперсимметрическими суммами Ньютона от переменных $\{y_1, y_2, \dots\}$ и $\{-y_1, -y_2, \dots\}$.

Также стоит отметить, что алгебра Γ состоит из всех $f \in \Lambda$, таких что для всех $1 \leqslant i < j$ выражение

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, z, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, -z, y_{j+1}, \dots) \tag{4.4}$$

не зависит от z (здесь z – новая формальная переменная).[18]

[17] Отметим, что в [10] рассматриваются P-функции Шура, которые связаны с Q-функциями следующим образом: $\mathcal{P}_\lambda = 2^{-\ell(\lambda)}\mathcal{Q}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{S}$.

[18] Ясно, что суммы Ньютона с нечетными номерами удовлетворяют этому свойству, а с четными номерами – нет. Тот факт, что любая симметрическая функция $f \in \Lambda$, удовлетворяющая этому свойству, является полиномом от $p_1, p_3, \dots$, следует из общего результата Стембриджа [24] о суперсимметрических функциях.

Более подробно о дважды симметрических функциях и Q-функциях Шура см. [17, Ch. III, §8] (в издании книги Макдональда на русском языке [29] этого раздела нет), а также [24, 9, 10].

4.2. Дважды симметрические функции и сдвинутые диаграммы Юнга

Через $\mathrm{Fun}(\mathfrak{X})$ обозначим алгебру действительнозначных функций на множестве $\mathfrak{X}$. Рассмотрим вложение алгебры дважды симметрических функций Γ в алгебру $\mathrm{Fun}(\mathbb{S})$, определенное на суммах Ньютона с нечетными номерами (которые порождают Γ) следующим образом:

$$p_k \to p_k(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^k, \quad k = 1, 3, 5, \dots . \tag{4.5}$$

Будем отождествлять алгебру Γ с ее образом в $\mathrm{Fun}(\mathbb{S})$ при этом вложении. Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о функции на $\mathbb{S}$, будем писать $f(\lambda)$, где $f \in \Gamma$. Через f_n обозначим ограничение функции $f(\cdot)$ на $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}$. Легко проверить, что алгебра $\Gamma \subset \mathbb{S}$ разделяет точки $\mathbb{S}$, а значит, для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ функции вида f_n, где $f \in \Gamma$, исчерпывают конечномерное пространство $\mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{S}$, и u – комплексная переменная. Положим

$$\varphi(u;\lambda) := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{u+\lambda_i}{u-\lambda_i}. \tag{4.6}$$

Это произведение на самом деле конечно, так как в λ лишь конечное число ненулевых компонент. Также ясно, что $\varphi(u;\lambda)$ – рациональная функция от u, принимающая значение 1 при $u = \infty$.

Предложение 4.3. *Алгебра $\Gamma \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{S})$ совпадает с коммутативной подалгеброй (с единицей) в $\mathrm{Fun}(\mathbb{S})$, порожденной коэффициентами разложения Тейлора функции $\varphi(u;\lambda)$ (или, что эквивалентно, функции $\log\varphi(u;\lambda)$) в $u = \infty$ по степеням u^{-1}.*

Доказательство. Разложение Тейлора функции $\log\varphi(u;\lambda)$ в $u = \infty$ имеет вид $\log\varphi(u;\lambda) = 2\sum_k \frac{p_k(\lambda)}{k} u^{-k}$, где сумма ведется по нечетным $k \geqslant 1$, а $p_k(\lambda)$ определены в (4.5). Функции $p_1, p_3, \dots$ порождают алгебру Γ. $\square$

Пусть v – комплексная переменная, положим

$$\Phi(v;\lambda) := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v-\lambda_i(\lambda_i-1)}{v-\lambda_i(\lambda_i+1)}. \tag{4.7}$$

Это произведение также на самом деле конечно. Ясно, что $\Phi(v;\lambda)$ – рациональная функция от v, принимающая значение 1 при $v=\infty$. Легко проверить, что $\Phi(u^2-u;\lambda)=\frac{\varphi(u-1;\lambda)}{\varphi(u;\lambda)}$.

Определение 4.4. *Через $\mathbf{p}_m(\cdot),\mathbf{g}_m(\cdot),\hat{\mathbf{g}}_m(\cdot)\in\operatorname{Fun}(\mathbb{S})$, $m\in\mathbb{Z}_{>0}$, обозначим коэффициенты следующих разложений Тейлора в $v=\infty$ по степеням v^{-1}:*

$$\begin{aligned}\log\Phi(v;\lambda)&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathbf{p}_m(\lambda)}{m}v^{-m};\\ \Phi(v;\lambda)&=1+\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{g}_m(\lambda)v^{-m};\\ \frac{1}{\Phi(v;\lambda)}&=1-\sum_{m=1}^{\infty}\hat{\mathbf{g}}_m(\lambda)v^{-m}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Напомним, что в Γ есть естественная фильтрация (§4.1), которая определяется равенствами $\deg p_{2m-1}=2m-1$, $m=1,2,\dots$.

Предложение 4.5. *Функции $\mathbf{p}_m(\lambda)$ лежат в алгебре Γ. Более точно,*

$$\mathbf{p}_m(\lambda)=2m\cdot p_{2m-1}(\lambda)+\dots,\quad m\in\mathbb{Z}_{>0},\tag{4.9}$$

где остаток $\mathbf{p}_m(\lambda)-2m\cdot p_{2m-1}(\lambda)$ является линейной комбинацией функций $p_{2l-1}(\lambda)$, $1\leqslant l\leqslant m-1$, и таким образом имеет степень $2m-3$.

Доказательство. С одной стороны,

$$\begin{aligned}\log\Phi(u^2-u;\lambda)&=\log\varphi(u-1;\lambda)-\log\varphi(u;\lambda)\\ &=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_{2k-1}(\lambda)}{2k-1}\left(\frac{1}{(u-1)^{2k-1}}-\frac{1}{u^{2k-1}}\right).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Заметим, что $(u-1)^{-2k+1}-u^{-2k+1}=(2k-1)u^{-2k}(1+k/u+\dots)$, где точками обозначены слагаемые, содержащие $u^{-2},u^{-3},\dots$. С другой стороны, по определению 4.4 имеем

$$\log\Phi(u^2-u;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathbf{p}_m(\lambda)}{m}\frac{1}{(u^2-u)^m}\tag{4.11}$$

Заметим, что $(u^2-u)^{-m}=u^{-2m}\left(1-m/u+\dots\right)$, где точками снова обозначены слагаемые с $u^{-2}, u^{-3}, \dots$. Таким образом, получаем тождество:

$$2\sum_{k=1}^{\infty}u^{-2k}p_{2k-1}(\lambda)\left(1+\frac{k}{u}+\dots\right)=\sum_{m=1}^{\infty}u^{-2m}\frac{\mathbf{p}_m(\lambda)}{m}\left(1-\frac{m}{u}+\dots\right). \tag{4.12}$$

Осталось сравнить коэффициенты при u^{-2m} в обеих частях. □

Здесь и далее мы иногда для удобства будем опускать аргумент λ у некоторых функций.

Предложение 4.6. *Имеем* $\mathbf{g}_1=\hat{\mathbf{g}}_1=\mathbf{p}_1$ *и*

$$k\mathbf{g}_k=\mathbf{p}_k+\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{g}_1+\dots+\mathbf{p}_1\mathbf{g}_{k-1}, \quad \hat{\mathbf{g}}_k=\mathbf{g}_k-\mathbf{g}_{k-1}\hat{\mathbf{g}}_1-\dots-\mathbf{g}_1\hat{\mathbf{g}}_{k-1} \tag{4.13}$$

для всех $k=2,3,\dots$.

Доказательство. Предложение доказывается так же, как соотношения между полными и элементарными симметрическими функциями в [29, Глава I, §2]. □

Следствие 4.7. *Каждый из трех наборов* $\{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\dots\}$, $\{\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3,\dots\}$ *и* $\{\hat{\mathbf{g}}_1,\hat{\mathbf{g}}_2,\hat{\mathbf{g}}_3,\dots\}$ *является набором алгебраически независимых порождающих алгебры* Γ *(как коммутативной алгебры с единицей). При отождествлении* Γ *с каждой из трех следующих алгебр полиномов*

$$\mathbb{R}\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots\right], \quad \mathbb{R}\left[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\dots\right] \quad \text{и} \quad \mathbb{R}\left[\hat{\mathbf{g}}_1,\hat{\mathbf{g}}_2,\dots\right], \tag{4.14}$$

фильтрация в Γ *определяется соответственно равенствами*

$$\begin{aligned}&\deg\mathbf{p}_m(\lambda)=2m-1,\\&\deg\mathbf{g}_m(\lambda)=2m-1,\\&\deg\hat{\mathbf{g}}_m(\lambda)=2m-1,\quad m\in\mathbb{Z}_{>0}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Предложение 4.8. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{S}$ *с координатами Керова* $[X(\lambda);Y(\lambda)]$ *(§3). Тогда*

$$\Phi(v;\lambda)=\frac{\prod_{y\in Y(\lambda)}(v-y(y+1))}{\prod_{x\in X'(\lambda)}(v-x(x+1))}=v\cdot\mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda), \tag{4.16}$$

где $\mathcal{R}^{\uparrow}$ *определено по формуле* (3.6).

Доказательство. Предложение доказывается комбинаторными рассуждениями, похожими на доказательство [20, Prop. 3.7]. □

Используя это предложение, можно выразить функции $\mathbf{p}_m, \mathbf{g}_m, \hat{\mathbf{g}}_m$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ через координаты Керова:

Предложение 4.9. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{S}$ *и* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Тогда*[19]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m(\lambda) &= \sum_{x \in X(\lambda)} (x(x+1))^m - \sum_{y \in Y(\lambda)} (y(y+1))^m ; \\ \mathbf{g}_m(\lambda) &= \sum_{x \in X(\lambda)} \theta_x^{\uparrow}(\lambda) \cdot (x(x+1))^m ; \\ \hat{\mathbf{g}}_m(\lambda) &= \sum_{y \in Y(\lambda)} \theta_y^{\downarrow}(\lambda) \cdot (y(y+1))^{m-1} . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Доказательство. Утверждение о $\mathbf{p}_m(\lambda)$ напрямую следует из предложения 4.8. Докажем второе утверждение. По определению $\theta_x^{\uparrow}$ имеем

$$\begin{aligned} v \cdot \mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda) = v \sum_{x \in X(\lambda)} \frac{\theta_x^{\uparrow}(\lambda)}{v - x(x+1)} &= \sum_{x \in X(\lambda)} \frac{\theta_x^{\uparrow}(\lambda)}{1 - \frac{x(x+1)}{v}} \\ &= \sum_{x \in X(\lambda)} \theta_x^{\uparrow}(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x(x+1)}{v} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{-k} \sum_{x \in X(\lambda)} \theta_x^{\uparrow}(\lambda) \cdot (x(x+1))^k . \end{aligned} \tag{4.18}$$

С другой стороны, из предложения 4.8 следует, что $v \cdot \mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda) = \Phi(v;\lambda)$. Остается сравнить определение функций $\mathbf{g}_m$ с формулой для $v \cdot \mathcal{R}^{\uparrow}(v;\lambda)$ выше. Третье утверждение доказывается аналогично. □

Из предложений 3.5, 4.6 и 4.9 следует, что

$$\mathbf{p}_1(\lambda) = \mathbf{g}_1(\lambda) = \hat{\mathbf{g}}_1(\lambda) = 2|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{S}. \tag{4.19}$$

[19] Величины $\{\theta_x^{\uparrow}(\lambda)\}_{x \in X(\lambda)}$ и $\{\theta_y^{\downarrow}(\lambda)\}_{y \in Y(\lambda)}$ были определены выше в §3.

Лемма 4.10. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{S}$ *с координатами Керова* $[X(\lambda); Y(\lambda)]$. *Пусть* $x \in X(\lambda)$ *и* $y \in Y(\lambda)$. *Тогда*

$$\frac{\Phi(v; \lambda + \square_+(x))}{\Phi(v; \lambda)} = \frac{(v - x(x+1))^2}{(v - x(x+1))^2 - 2(v + x(x+1))} \tag{4.20}$$

и

$$\frac{\Phi(v; \lambda - \square_-(y))}{\Phi(v; \lambda)} = \frac{(v - y(y+1))^2 - 2(v + y(y+1))}{(v - y(y+1))^2}. \tag{4.21}$$

Доказательство. Это напрямую следует из предложения 4.8 и определений диаграмм $\lambda + \square_+(x)$ и $\lambda - \square_-(y)$ (§3). $\square$

5. Операторы вниз и вверх в дифференциальной форме

Переходный оператор T_n марковской цепи вверх/вниз на n-м этаже можно записать как композицию операторов вниз и вверх. В этом разделе мы вычислим эти два оператора в дифференциальной форме. Данный подход похож на [19], однако в нашей ситуации есть некоторые существенные отличия.

5.1. Определение операторов вниз и вверх

Для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $\alpha \in (0, +\infty)$ запишем оператор T_n как композицию переходных операторов вниз $D_{n+1,n}\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_{n+1})$ и вверх $U_{n,n+1}\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_{n+1}) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$, действующих на функции:

$$\begin{aligned} (D_{n+1,n} f_n)(\lambda) &:= \sum_{\mu : \mu \nearrow \lambda} p^{\downarrow}(\lambda, \mu) f_n(\mu), \ \lambda \in \mathbb{S}_{n+1}; \\ (U_{n,n+1} f_{n+1})(\nu) &:= \sum_{\varkappa : \varkappa \searrow \nu} p^{\uparrow}_{\alpha}(\nu, \varkappa) f_{n+1}(\varkappa), \ \nu \in \mathbb{S}_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $p^{\downarrow}$ и $p^{\uparrow}_{\alpha}$ – переходные функции вниз и вверх, определенные в §2. Заметим, что оператор $D_{n+1,n}$ не зависит от α, а $U_{n,n+1}$ – зависит.

Замечание 5.1. Операторы $D_{n+1,n}$ и $U_{n,n+1}$, определенные выше, являются сопряженными к соответствующим операторам, действующим на меры. Последние операторы действуют в соответствии со своими названиями. Например, $D^*_{n+1,n}\colon \mathcal{M}(\mathbb{S}_{n+1}) \to \mathcal{M}(\mathbb{S}_n)$, где через $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ обозначается пространство мер на $\mathfrak{X}$.

Ясно, что переходный оператор n-й марковской цепи вверх/вниз можно записать в виде $T_n = U_{n,n+1} \circ D_{n+1,n}\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$.

5.2. Формулировка теоремы

Отождествим Γ с алгеброй полиномов $\mathbb{R}[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots]$. Напомним, что в Γ есть фильтрация (§4.1), которая определяется равенствами $\deg \mathbf{g}_m = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Определение 5.2. *Оператор* $R\colon \Gamma \to \Gamma$ *имеет степень* $\leqslant r$, *(где* $r \in \mathbb{Z}$*), если* $\deg(Rf) \leqslant \deg f + r$ *для всех* $f \in \Gamma$.

Замечание 5.3. Любой оператор в алгебре полиномов (от конечного или бесконечного набора переменных) может быть записан как дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами, то есть, как формально бесконечная сумма дифференциальных мономов. Этот факт известен и может быть легко доказан. Мы его не используем, однако его полезно иметь в виду при чтении данного раздела.

Напомним, что через f_n обозначается ограничение функции $f \in \Gamma \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{S})$ на $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}$.

Теорема 5.4. (1) *Существует единственный оператор* $D\colon \Gamma \to \Gamma$, *такой что*

$$D_{n+1,n} f_n = \frac{1}{n+1}(Df)_{n+1} \tag{5.2}$$

для всех $f \in \Gamma$ *и* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. *Его степень равна* 1 *и он имеет вид*

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 &+ \sum_{r,s \geqslant 1} (2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s} \\ &- \sum_{r \geqslant 1} (2r-1)\mathbf{g}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} + \sum_{r,s \geqslant 1} (r+s)\mathbf{g}_r \mathbf{g}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}} \\ &+ \text{операторы степени} \leqslant (-2); \end{aligned} \tag{5.3}$$

(2) *При каждом фиксированном* $\alpha \in (0, +\infty)$ *существует единственный оператор* $U\colon \Gamma \to \Gamma$, *такой что*

$$U_{n,n+1} f_{n+1} = \frac{1}{n + \alpha/2}(Uf)_n \tag{5.4}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *и* $f \in \Gamma$. *Его степень также равна* 1 *и он имеет вид*

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 + \frac{1}{2}\alpha + \alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \sum_{r,s\geqslant 1}(2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s} \\ + \sum_{r\geqslant 1}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} + \sum_{r,s\geqslant 1}(r+s-1)\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}} \\ + \text{операторы степени} \leqslant (-2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Схема доказательства. Функции $\mathbf{g}_k \in \Gamma$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, порождают алгебру Γ. Вместо прямого вычисления действия операторов D и U на эти функции мы будем рассматривать их действие на произведения вида $\Phi(v_1;\lambda)\Phi(v_2;\lambda)\dots$, где $v_1, v_2, \dots$ – комплексные переменные в конечном числе, а $\Phi(v;\lambda)$ определено в (4.7). Из определения 4.4 следует, что произведения вида $\Phi(v_1;\lambda)\Phi(v_2;\lambda)\dots$ содержат в качестве коэффициентов при различных степенях $v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots$ всевозможные произведения функций $\mathbf{g}_k$. Эти произведения, в свою очередь, образуют линейный базис в Γ. Таким образом, мы будем знать, как действуют D и U на этот базис, если вычислим их действие на $\Phi(v_1;\lambda)\Phi(v_2;\lambda)\dots$. Последнее действие можно записать в удобном виде, и из этого извлечь все необходимые сведения.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству теоремы 5.4.

5.3. Действие D и U на производящие функции

Из определения 4.4 следует, что для любого конечного набора комплексных переменных $v_1, v_2, \dots$ (удобно явно не указывать их число) имеем

$$\Phi(v_1;\lambda)\Phi(v_2;\lambda)\dots = \sum_{\rho} m_\rho(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots)\mathbf{g}_\rho(\lambda), \tag{5.6}$$

где сумма ведется по всем обычным (то есть, не обязательно строгим) разбиениям ρ, таким что $\ell(\rho)$ не превышает число переменных v_i,[20] m_ρ – мономиальная симметрическая функция [29, Глава I, §2], и $\mathbf{g}_\rho = \mathbf{g}_{\rho_1}\dots\mathbf{g}_{\rho_{\ell(\rho)}}$. Удобно положить $\mathbf{g}_0 := 1$.

Можно считать (5.6) производящей функцией элементов $\mathbf{g}_\rho$, которые составляют линейный базис в Γ. Вычисляя действие операторов

[20] Заметим, что $m_\rho(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots)$ отлично от нуля только если $\ell(\rho)$ не превышает число переменных v_i, поэтому здесь и в суммах, аналогичных (5.6) далее мы можем считать, что ρ пробегает *все* обычные разбиения.

$D_{n+1,n}$ и $U_{n,n+1}$ на левую часть (5.6), мы узнаем, как они действуют в базисе $\{\mathbf{g}_\rho\}$. Иногда будет удобно опускать аргумент λ в $\Phi(v;\lambda)$. По определению оператора $U_{n,n+1}$,

$$\begin{aligned}&\left(U_{n,n+1}\Big(\prod_l \Phi(v_l)\Big)_{n+1}\right)(\lambda)\\&=\sum_{x\in X(\lambda)} p_\alpha^{\uparrow}(\lambda,\lambda+\square_+(x))\prod_l \Phi(v_l;\lambda+\square_+(x)),\quad \lambda\in\mathbb{S}_n.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Используя (3.9) и лемму 4.10, получаем (заметим, что здесь $|\lambda|=n$):

$$\left((n+\alpha/2)U_{n,n+1}\Big(\prod_l \Phi(v_l)\Big)_{n+1}\right)(\lambda)=F^{\uparrow}(v_1,v_2,\dots;\lambda)\cdot\prod_l \Phi(v_l;\lambda),\tag{5.8}$$

где

$$\begin{aligned}&F^{\uparrow}(v_1,v_2,\dots;\lambda)\\&:=\sum_{x\in X(\lambda)}\frac{x(x+1)+\alpha}{2}\prod_l\frac{(v_l-x(x+1))^2}{(v_l-x(x+1))^2-2(v_l+x(x+1))}\theta_x^{\uparrow}(\lambda).\end{aligned}\tag{5.9}$$

Аналогично для оператора $D_{n+1,n}$:

$$\begin{aligned}&\left(D_{n+1,n}\Big(\prod_l \Phi(v_l)\Big)_{n}\right)(\lambda)\\&=\sum_{y\in Y(\lambda)} p^{\downarrow}(\lambda,\lambda-\square_-(y))\prod_l \Phi(v_l;\lambda-\square_-(y)),\quad \lambda\in\mathbb{S}_{n+1}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Используя предложение 3.7 и лемму 4.10, получаем (здесь уже $|\lambda|=n+1$):

$$\left((n+1)D_{n+1,n}\Big(\prod_l \Phi(v_l)\Big)_{n}\right)(\lambda)=F^{\downarrow}(v_1,v_2,\dots;\lambda)\cdot\prod_l \Phi(v_l;\lambda),\tag{5.11}$$

где

$$F^{\downarrow}(v_1, v_2, \dots; \lambda) := \sum_{y \in Y(\lambda)} \frac{1}{2} \prod_l \frac{(v_l - y(y+1))^2 - 2(v_l + y(y+1))}{(v_l - y(y+1))^2} \theta_y^{\downarrow}(\lambda). \tag{5.12}$$

Из (5.8) и (5.11) следует существование искомых операторов D и U, таких что выполнено (5.4) и (5.2) соответственно. Их единственность вытекает из инъективности вложения $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{S})$, определенного в §4.2. Таким образом, остается получить формулы (5.3) и (5.5), в этом состоит главная часть теоремы 5.4.

Лемма 5.3. *Как функции от λ, $F^{\uparrow}(v_1, v_2, \dots; \lambda)$ и $F^{\downarrow}(v_1, v_2, \dots; \lambda)$ лежат в алгебре Γ. Более точно, оба этих выражения можно рассматривать как элементы $\Gamma\big[\big[v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots\big]\big]$.*

Доказательство. Заметим, что произведения по l в (5.9) и (5.12) можно рассматривать как элементы $\mathbb{R}[x(x+1)]\big[\big[v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots\big]\big]$ и $\mathbb{R}[y(y+1)]\big[\big[v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots\big]\big]$ соответственно.[21] Далее, пусть $f\,(x(x+1))$ – полином от $x(x+1)$. Тогда выражение $\sum\limits_{x \in X(\lambda)} f\,(x(x+1))\,\theta_x^{\uparrow}(\lambda)$ как функция от λ принадлежит Γ (предложение 4.9). Остается подходящим образом выбрать $f\,(x(x+1))$, см. (5.9). Утверждение про $F^{\downarrow}$ доказывается аналогично. □

Таким образом,

$$\begin{aligned} U(\Phi(v_1)\Phi(v_2)\dots) &= F^{\uparrow}(v_1, v_2, \dots)\Phi(v_1)\Phi(v_2)\dots; \\ D(\Phi(v_1)\Phi(v_2)\dots) &= F^{\downarrow}(v_1, v_2, \dots)\Phi(v_1)\Phi(v_2)\dots. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Эти формулы содержат в сжатом виде всю информацию о действии операторов D и U на базисные элементы $\mathbf{g}_\rho$. В следующем подразделе, используя (5.6) и предложение 4.9, мы получим из (5.13) некоторые явные формулы для $D\mathbf{g}_\rho$ и $U\mathbf{g}_\rho$.

5.4. Действие D и U в базисе $\{\mathbf{g}_\rho\}$

Для начала введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть v и ξ – комплексные переменные. Рассмотрим следующие разложения

[21] Здесь и далее через $\mathbb{R}\,[z(z+1)]$ мы обозначаем алгебру полиномов от $z(z+1)$.

в $v=\infty$ по степеням v^{-1}:

$$\begin{aligned} \frac{(v-\xi)^2}{(v-\xi)^2-2(v+\xi)} &= \sum_{s=0}^{\infty} a_s(\xi) v^{-s}, \quad a_s \in \mathbb{R}[\xi]; \\ \frac{(v-\xi)^2-2(v+\xi)}{(v-\xi)^2} &= \sum_{s=0}^{\infty} b_s(\xi) v^{-s}, \quad b_s \in \mathbb{R}[\xi]. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Лемма 5.6. *Имеем $a_0(\xi)=b_0(\xi)\equiv 1$, а для $s\geqslant 1$ полиномы $a_s(\xi)$ и $b_s(\xi)$ имеют степень $s-1$ по ξ. Более точно, $b_s(\xi)=-2(2s-1)\xi^{s-1}$, а $a_s(\xi)$ имеет вид*

$$a_s(\xi) = 2(2s-1)\xi^{s-1} + \text{слагаемые с } \ \xi \ \text{ в степени } \ \leqslant (s-2). \tag{5.15}$$

Доказательство. Полиномы $b_s(\xi)$ можно вычислить явно, раскладывая функцию $\frac{(v-\xi)^2-2(v+\xi)}{(v-\xi)^2}$ в ряд Тейлора по степеням v^{-1} (в точке $v=\infty$). Далее, так как $(\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s(\xi)v^{-s})(\sum\limits_{s=0}^{\infty} b_s(\xi)v^{-s})=1$, то $a_0(\xi)=1$ и для $s\geqslant 1$ член максимальной степени в $a_s(\xi)$ равен $2(2s-1)\xi^{s-1}$. $\square$

Для обычного разбиения $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{\ell(\sigma)})$ положим

$$a_\sigma(\xi) := \prod_{i=1}^{\ell(\sigma)} a_{\sigma_i}(\xi), \quad b_\sigma(\xi) := \prod_{i=1}^{\ell(\sigma)} b_{\sigma_i}(\xi). \tag{5.16}$$

Используя (5.14) и определение выше, получим следующие выражения для произведений по l в (5.9) и (5.12):

$$\begin{aligned} \prod_l \frac{(v_l-x(x+1))^2}{(v_l-x(x+1))^2-2(v_l+x(x+1))} &= \sum_\sigma a_\sigma(x(x+1)) m_\sigma(v_1^{-1},v_2^{-1},\dots); \\ \prod_l \frac{(v_l-y(y+1))^2-2(v_l-y(y+1))}{(v_l-y(y+1))^2} &= \sum_\sigma b_\sigma(y(y+1)) m_\sigma(v_1^{-1},v_2^{-1},\dots). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Здесь суммирования в правых частях ведутся по всем обычным разбиениям.

Определим линейные отображения

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\left[x(x+1)\right] &\to \Gamma, \quad f \mapsto \langle f\rangle^{\uparrow}; \\ \mathbb{R}\left[y(y+1)\right] &\to \Gamma, \quad h \mapsto \langle h\rangle^{\downarrow} \end{aligned} \tag{5.18}$$

по формулам

$$\Big\langle (x(x+1))^m \Big\rangle^{\uparrow} := \mathbf{g}_m, \quad \Big\langle (y(y+1))^m \Big\rangle^{\downarrow} := \hat{\mathbf{g}}_{m+1}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \tag{5.19}$$

где полагаем $\mathbf{g}_0 = 1$. Это определение подсказано предложением 4.9.

Наконец, пусть $c^{\rho}_{\sigma\tau}$ – структурные константы алгебры симметрических функций Λ в базисе мономиальных симметрических функций:

$$m_\sigma m_\tau = \sum_{\rho} c^{\rho}_{\sigma\tau} m_\rho. \tag{5.20}$$

Отметим, что $c^{\rho}_{\sigma\tau}$ отлично от нуля, только если $|\rho| = |\sigma| + |\tau|$.

Теперь мы можем вычислить $U\mathbf{g}_\rho$ и $D\mathbf{g}_\rho$.

Лемма 5.7. *Во введенных выше обозначениях имеем*

$$\begin{aligned} U\mathbf{g}_\rho &= \sum_{\sigma,\tau:|\sigma|+|\tau|=|\rho|} \frac{1}{2} c^{\rho}_{\sigma\tau} \Big\langle \big(x(x+1)+\alpha\big)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big) \Big\rangle^{\uparrow} \mathbf{g}_\tau; \\ D\mathbf{g}_\rho &= \sum_{\sigma,\tau:|\sigma|+|\tau|=|\rho|} \frac{1}{2} c^{\rho}_{\sigma\tau} \Big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big) \Big\rangle^{\downarrow} \mathbf{g}_\tau. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}(v_1, v_2, \dots) &= \sum_\sigma F^{\uparrow}_\sigma \cdot m_\sigma(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots), \quad F^{\uparrow}_\sigma \in \Gamma; \\ F^{\downarrow}(v_1, v_2, \dots) &= \sum_\sigma F^{\downarrow}_\sigma \cdot m_\sigma(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots), \quad F^{\downarrow}_\sigma \in \Gamma, \end{aligned} \tag{5.22}$$

где суммирования ведутся по всем обычным разбиениям σ.

Используя (5.6), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_\rho m_\rho(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots) U\mathbf{g}_\rho \\ &= \Big(\sum_\sigma F^{\uparrow}_\sigma m_\sigma(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots)\Big)\Big(\sum_\tau m_\tau(v_1^{-1}, v_2^{-1}, \dots)\mathbf{g}_\tau\Big), \end{aligned} \tag{5.23}$$

откуда следует, что

$$U\mathbf{g}_\rho = \sum_{\sigma,\tau:|\sigma|+|\tau|=|\rho|} c^{\rho}_{\sigma\tau} F^{\uparrow}_\sigma \mathbf{g}_\tau. \tag{5.24}$$

Аналогично получаем

$$D\mathbf{g}_\rho = \sum_{\sigma,\tau:|\sigma|+|\tau|=|\rho|} c^\rho_{\sigma\tau} F^\downarrow_\sigma \mathbf{g}_\tau. \tag{5.25}$$

Равенства

$$F^\uparrow_\sigma = \Big\langle \frac{1}{2}\big(x(x+1)+\alpha\big)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\Big\rangle^\uparrow; \quad F^\downarrow_\sigma = \Big\langle \frac{1}{2} b_\sigma\big(y(y+1)\big)\Big\rangle^\downarrow \tag{5.26}$$

напрямую следуют из (5.9), (5.12) и (5.17). □

В следующих двух подразделах мы последовательно вычислим операторы D и U в дифференциальной форме.

5.5 Оператор D в дифференциальной форме

С помощью леммы 5.7 можно записать

$$D = \sum_\sigma D_\sigma, \quad D_\sigma \mathbf{g}_\rho := \sum_{\tau:|\tau|=|\rho|-|\sigma|} \frac{1}{2}\Big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\Big\rangle^\downarrow c^\rho_{\sigma\tau}\mathbf{g}_\tau. \tag{5.27}$$

Лемма 5.8. *Пусть $\sigma \neq \varnothing$ – обычное разбиение. Тогда*

$$\deg D_\sigma \leqslant \max_{\rho,\tau}(\ell(\rho) - \ell(\tau) - 2\ell(\sigma) + 1), \tag{5.28}$$

где максимум берется по всем парам (ρ,τ), таким что $c^\rho_{\sigma\tau} \neq 0$.

Имеет место также более грубая оценка:

$$\deg D_\sigma \leqslant -\ell(\sigma) + 1. \tag{5.29}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \deg D_\sigma &\leqslant \max_{\rho,\tau}\big(\deg\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^\downarrow + \deg \mathbf{g}_\tau - \deg \mathbf{g}_\rho\big) \\ &= \max_{\rho,\tau}\big(\deg\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^\downarrow + 2|\tau| - \ell(\tau) - 2|\rho| + \ell(\rho)\big) \\ &\leqslant \max_{\rho,\tau}\big(\deg\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^\downarrow - 2|\sigma| - \ell(\tau) + \ell(\rho)\big), \end{aligned} \tag{5.30}$$

где максимумы берутся по всем парам обычных разбиений (ρ,τ), таким что $c^\rho_{\sigma\tau} \neq 0$. Первый переход в (5.30) следует из определения

$\deg D_\sigma$, второй переход – в силу того, что $\deg \mathbf{g}_m = 2m-1, m = 1, 2, \dots$ (следствие 4.7), и поэтому $\deg \mathbf{g}_\rho = 2|\rho| - \ell(\rho)$ и $\deg \mathbf{g}_\tau = 2|\tau| - \ell(\tau)$ для всех обычных разбиений ρ и τ; и третий переход возможен потому что $c^\rho_{\sigma\tau} \neq 0$ только если $|\rho| = |\sigma| + |\tau|$.

По предположению, $\sigma \neq \varnothing$, и поэтому $\ell(\sigma) \geqslant 1$, то есть, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell(\sigma)})$, где $\sigma_i \geqslant 1$ для $i = 1, \dots, \ell(\sigma)$. Запишем $\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^{\downarrow}$ более подробно:

$$\begin{aligned}&\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^{\downarrow}\\&= \left\langle \prod_{i=1}^{\ell(\sigma)} b_{\sigma_i}\big(y(y+1)\big) \right\rangle^{\downarrow} = \left\langle \prod_{i=1}^{\ell(\sigma)} -2(2\sigma_i - 1)\big(y(y+1)\big)^{\sigma_i - 1} \right\rangle^{\downarrow}.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Видно, что полином $b_\sigma\big(y(y+1)\big)$ имеет степень $|\sigma| - \ell(\sigma)$ по $y(y+1)$, и поэтому величина $\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^{\downarrow}$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с $\hat{\mathbf{g}}_{|\sigma|-\ell(\sigma)+1}$ (предложение 4.9). Заметим, что $\deg \hat{\mathbf{g}}_{|\sigma|-\ell(\sigma)+1} = 2|\sigma| - 2\ell(\sigma) + 1$, и поэтому

$$\deg D_\sigma \leqslant \max_{\rho,\tau} \big(2|\sigma| - 2\ell(\sigma) + 1 - 2|\sigma| - \ell(\tau) + \ell(\rho)\big), \tag{5.32}$$

что дает первое утверждение леммы. Вторая оценка следует из того, что $c^\rho_{\sigma\tau} \neq 0$ влечет $\ell(\rho) \leqslant \ell(\sigma) + \ell(\tau)$. $\square$

Из второй оценки предыдущей леммы получаем:

Следствие 5.9. *Если $\ell(\sigma) \geqslant 3$, то $\deg D_\sigma \leqslant -2$.*

Отсюда следует, что достаточно исследовать операторы D_σ с $\ell(\sigma) = 0$ (то есть, $\sigma = \varnothing$), $\ell(\sigma) = 2$, и $\ell(\sigma) = 1$. Следующие три леммы последовательно рассматривают эти случаи.

Лемма 5.10. $D_\varnothing = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1$.

Доказательство. Предположим, что $\sigma = \varnothing$ в (5.27). Тогда $\tau = \rho$ и $c^\rho_{\sigma\tau} = 1$. Более того, так как $b_\sigma = 1$, то $\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^{\downarrow} = \langle 1\rangle^{\downarrow} = \hat{\mathbf{g}}_1$. Согласно предложению 4.6, $\hat{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{g}_1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.11.

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=2} D_\sigma = \sum_{r,s\geqslant 1} (2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s}&\\ + \text{операторы степени} \leqslant (-2).&\end{aligned} \tag{5.33}$$

Доказательство. Пусть в (5.27) выполнено $\ell(\sigma) = 2$, то есть, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant 1$. Согласно лемме 5.8, должно быть $\ell(\rho) = \ell(\tau) + 2$, иначе соответствующий вклад в D_σ имеет степень $\leqslant -2$. Поэтому

$$\sigma_1 = \rho_i, \quad \sigma_2 = \rho_j, \quad \tau = \big(\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{j-1}, \rho_{j+1}, \dots, \rho_{\ell(\rho)}\big) \tag{5.34}$$

для некоторых $1 \leqslant i < j \leqslant \ell(\rho)$. Из леммы 5.6 следует, что $\big\langle b_\sigma\left(y(y+1)\right)\big\rangle^{\downarrow} = 4(2\sigma_1 - 1)(2\sigma_2 - 1)\hat{\mathbf{g}}_{\sigma_1+\sigma_2-1}$. Поэтому

$$\left(\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=2} D_\sigma\right)\mathbf{g}_\rho = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant \ell(\rho)} 2(2\rho_i - 1)(2\rho_j - 1)c^\rho_{\sigma\tau}\hat{\mathbf{g}}_{\rho_i+\rho_j-1}\mathbf{g}_{\rho\setminus\{\rho_i,\rho_j\}}. \tag{5.35}$$

Заметим, что для таких ρ, σ и τ, как описано выше, мы имеем

$$c^\rho_{\sigma\tau}\mathbf{g}_{\rho\setminus\{\rho_i,\rho_j\}}\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_\rho}{\partial \mathbf{g}_{\rho_i}\partial \mathbf{g}_{\rho_j}}, & \text{если } \rho_i \neq \rho_j; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{g}_\rho}{\partial \mathbf{g}^2_{\rho_i}}, & \text{если } \rho_i = \rho_j. \end{cases}. \tag{5.36}$$

Значит, можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma:\ell(\sigma)=2} D_\sigma = &\sum_{r_1>r_2\geqslant 1} 2(2r_1 - 1)(2r_2 - 1)\hat{\mathbf{g}}_{r_1+r_2-1}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_{r_1}\mathbf{g}_{r_2}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{r\geqslant 1} 2(2r-1)^2\hat{\mathbf{g}}_{2r-1}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}^2_r}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Используя предложение 4.6, мы можем заменить каждое $\hat{\mathbf{g}}_k$ выше на $\mathbf{g}_k$ – это влияет только на слагаемые степени $\leqslant -2$ в D. Сделав эту замену, мы получим искомое выражение. □

Лемма 5.12.

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma:\ell(\sigma)=1} D_\sigma = &-\sum_{r\geqslant 1}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} \\ &+ \sum_{r,s\geqslant 1}(r+s)\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}} + \text{операторы степени } \leqslant (-2). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Доказательство. Пусть $\ell(\sigma) = 1$ в (5.27), то есть, $\sigma = (s)$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Из леммы 5.8 вытекает, что либо $\ell(\rho) = \ell(\tau) + 1$, либо $\ell(\rho) = \ell(\tau)$. Рассмотрим оба случая по отдельности.

Пусть сначала $\ell(\rho)=\ell(\tau)+1$. Это значит, что

$$s=\rho_i, \quad \tau=(\rho_1,\dots,\rho_{i-1},\rho_{i+1},\dots,\rho_{\ell(\rho)}) \tag{5.39}$$

для некоторого $1\leqslant i\leqslant \ell(\rho)$. По лемме 5.6, $\big\langle b_\sigma\big(y(y+1)\big)\big\rangle^{\downarrow}=-2(2s-1)\hat{\mathbf{g}}_s$. Поэтому случай $\ell(\rho)=\ell(\tau)+1$ дает следующие слагаемые: $-\sum\limits_{i=1}^{\ell(\rho)}(2\rho_i-1)c^{\rho}_{\sigma\tau}\hat{\mathbf{g}}_{\rho_i}\mathbf{g}_{\rho\setminus\{\rho_i\}}$. Заметим, что в этом случае $c^{\rho}_{\sigma\tau}\mathbf{g}_{\rho\setminus\{\rho_i\}}=\partial\mathbf{g}_\rho/\partial\mathbf{g}_{\rho_i}$, поэтому в итоге мы получаем слагаемые $-\sum\limits_{r\geqslant1}(2r-1)\hat{\mathbf{g}}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}$, которые входят в $\sum\limits_{\sigma:\ell(\sigma)=1}D_\sigma$.

Теперь предположим, что $\ell(\rho)=\ell(\tau)$. Это значит, что τ получается из ρ путем вычитания s из одной из компонент (обозначим ее через $\rho_i=r$); кроме того, должно быть $r\geqslant s+1$. Это дает слагаемые

$$-\sum_{\substack{r\geqslant2\\1\leqslant s\leqslant r-1}}(2s-1)\hat{\mathbf{g}}_s\mathbf{g}_{r-s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}. \tag{5.40}$$

Итак, мы получаем

$$\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=1}D_\sigma=-\sum_{r\geqslant1}(2r-1)\hat{\mathbf{g}}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}-\sum_{r\geqslant2,\ 1\leqslant s\leqslant r-1}(2s-1)\hat{\mathbf{g}}_s\mathbf{g}_{r-s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}. \tag{5.41}$$

Остается выразить все $\hat{\mathbf{g}}_k$ через $\{\mathbf{g}_i\}$ (используя предложение 4.6). Чтобы замена влияла только на члены степени $\leqslant(-2)$ в D, в первой сумме выше она должна быть сделана так:

$$\hat{\mathbf{g}}_r\to\mathbf{g}_r-\mathbf{g}_{r-1}\mathbf{g}_1-\dots-\mathbf{g}_1\mathbf{g}_{r-1}+\text{слагаемые степени }\leqslant(2r-2),\qquad r=1,2,\dots, \tag{5.42}$$

а во второй – так:

$$\hat{\mathbf{g}}_s\to\mathbf{g}_s+\text{ слагаемые степени }\leqslant(2s-1),\quad s=1,2,\dots. \tag{5.43}$$

Искомое выражение получается после несложного преобразования. □

Формула (5.3) в теореме 5.4 следует из лемм 5.10, 5.11 и 5.12.

5.6 Оператор U в дифференциальной форме

Вычисление оператора U в дифференциальной форме похоже на вычисление D, однако из-за следующих двух особенностей мы проведем его подробно:

- Присутствие дополнительного множителя $x(x+1)+\alpha$ в выражении для $U\mathbf{g}_\rho$ по сравнению с выражением для $D\mathbf{g}_\rho$ в (5.21).
- Формула $\deg\langle (y(y+1))^m\rangle^{\downarrow} = 2m+1$, которая используется в вычислении D, справедлива для всех $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, тогда как соответствующая формула для U, $\deg\langle (x(x+1))^m\rangle^{\uparrow} = 2m-1$, верна только при $m>0$. Поэтому при вычислении U требуется отдельно рассматривать случай $m=0$.

Удобно представить U с использованием леммы 5.7 как $U = \sum\limits_{\sigma}(U_\sigma^0 + U_\sigma^1)$, где сумма ведется по всем обычным разбиениям,

$$U_\sigma^0 \mathbf{g}_\rho := \frac{\alpha}{2} \sum_{\tau : |\tau| = |\rho| - |\sigma|} c_{\sigma\tau}^{\rho} \big\langle a_\sigma\big(x(x+1)\big)\big\rangle^{\uparrow} \mathbf{g}_\tau \tag{5.44}$$

и

$$U_\sigma^1 \mathbf{g}_\rho := \frac{1}{2} \sum_{\tau : |\tau| = |\rho| - |\sigma|} c_{\sigma\tau}^{\rho} \big\langle x(x+1) \cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\big\rangle^{\uparrow} \mathbf{g}_\tau. \tag{5.45}$$

Замечание 5.13. Разложение $U = U^0 + U^1$ похоже на соответствующее разложение $U_{\theta,z,z'} = U^0_{\theta,z,z'} + U^1_{\theta,z,z'} + U^2_{\theta,z,z'}$ оператора перехода вверх в [19, §6.5]. Оператор $U_{\theta,z,z'}$ строится по z-мерам на графе Юнга с кратностями Джека [19, Thm. 6.1 (ii)] (так же, как наш оператор U соответствует мультипликативным мерам на графе Шура, см. §5.1). Разница в количестве слагаемых возникает из-за того, что формула [19, (4.3)] для переходной функции вверх для z-мер включает члены нулевой, первой и второй степени координат Керова (обычной диаграммы Юнга), тогда как у нас в (3.9) содержатся только члены с нулевой и первой степенью выражения $x(x+1)$. Как видно из сравнения нашего предложения 4.9 с леммой 5.11 из [19], выражение $x(x+1)$ играет в нашей ситуации ту же роль, что просто координата x в [19].

Лемма 5.14 (Ср. с леммой 5.8). *Пусть $\sigma \neq \varnothing$ – обычное разбиение, тогда*

$$\deg U_\sigma^1 \leqslant \max_{\rho,\tau}(\ell(\rho) - \ell(\tau) - 2\ell(\sigma) + 1), \tag{5.46}$$

где максимум берется по всем парам (ρ,τ), для которых $c_{\sigma\tau}^{\rho} \neq 0$.

Имеет место также более грубая оценка:

$$\deg U^1_\sigma \leqslant -\ell(\sigma)+1. \tag{5.47}$$

Случай U^0_σ будет рассмотрен отдельно, см. лемму 5.16 ниже.

Доказательство. Рассуждая как в лемме 5.8, мы получаем оценку

$$\deg U^1_\sigma \leqslant \max_{\rho,\tau}\left(\Big\langle x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\Big\rangle^{\uparrow} - 2|\sigma| - \ell(\tau)+\ell(\rho)\right). \tag{5.48}$$

Остается вычислить $\deg\big\langle x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\big\rangle^{\uparrow}$. Заметим, что полином $x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)$ имеет степень $\geqslant 1$ по $x(x+1)$, поэтому по лемме 5.6 и предложению 4.9,

$$\deg\Big\langle x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\Big\rangle^{\uparrow} = \deg\Big\langle \big(x(x+1)\big)^{|\sigma|-\ell(\sigma)+1}\Big\rangle^{\uparrow} = 2|\sigma|-2\ell(\sigma)+1, \tag{5.49}$$

что дает первую оценку. Вторая оценка получается также, как в лемме 5.8. □

Из второй оценки леммы получаем:

Следствие 5.15 (ср. со следствием 5.9)**.** *Если* $\ell(\sigma)\geqslant 3$, *то* $\deg U^1_\sigma \leqslant -2$.

В следующей лемме мы разберемся с оператором $\sum\limits_\sigma U^0_\sigma$.

Лемма 5.16.

$$\sum_\sigma U^0_\sigma = \frac{\alpha}{2} + \alpha\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \text{операторы степени } \leqslant(-2). \tag{5.50}$$

Доказательство. Если $\sigma=\varnothing$ в (5.44), то $\rho=\tau$ и $c^\rho_{\sigma\tau}=1$, и мы получим $U^0_\sigma\mathbf{g}_\rho = \frac{\alpha}{2}c^\rho_{\sigma\tau}\langle 1\rangle^{\uparrow}\mathbf{g}_\rho = \frac{\alpha}{2}\mathbf{g}_\rho$ (ср. с леммой 5.10).

Теперь предположим, что $\sigma\neq\varnothing$. Тогда $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_{\ell(\sigma)})$, и $\ell(\sigma)\geqslant 1$. Рассуждая как в лемме 5.14, можно получить оценку

$$\begin{aligned}\deg U^0_\sigma &\leqslant \max_{\rho,\tau}\left(\deg\big\langle a_\sigma\big(x(x+1)\big)\big\rangle^{\uparrow} + 2|\tau| - \ell(\tau) - 2|\rho| + \ell(\rho)\right)\\ &\leqslant \max_{\rho,\tau}\left(\deg\big\langle a_\sigma\big(x(x+1)\big)\big\rangle^{\uparrow} - 2|\sigma| + \ell(\sigma)\right),\end{aligned} \tag{5.51}$$

где максимум берется по всем парам (ρ,τ), для которых $c^{\rho}_{\sigma\tau}\neq 0$. Второе неравенство в (5.51) имеет место, так как $\ell(\rho)-\ell(\tau)\leqslant\ell(\sigma)$.

Если степень полинома $a_\sigma\bigl(x(x+1)\bigr)$ больше единицы, то по лемме 5.6 и предложению 4.9,

$$\deg\bigl\langle a_\sigma\bigl(x(x+1)\bigr)\bigr\rangle^{\uparrow}=\deg\bigl(\mathbf{g}_{|\sigma|-\ell(\sigma)}\bigr)=2|\sigma|-2\ell(\sigma)-1, \tag{5.52}$$

что влечет

$$\deg U^0_\sigma\leqslant-\ell(\sigma)-1\leqslant-2. \tag{5.53}$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma\neq\varnothing$ и полином $a_\sigma\bigl(x(x+1)\bigr)$ имеет нулевую степень. Это возможно только если $\sigma_1=\dots=\sigma_{\ell(\sigma)}=1$, и для $\deg U^0_\sigma$ получаем оценку $\deg U^0_\sigma\leqslant-\ell(\sigma)$.

Если $\ell(\sigma)\geqslant 2$, то заведомо $\deg U^0_\sigma\leqslant -2$.

Наконец, рассмотрим случай $\sigma=(1)$. Есть две возможности: либо $\ell(\rho)=\ell(\tau)+1$, либо $\ell(\rho)=\ell(\tau)$. В последнем случае оценку для $\deg U^0_\sigma$ можно уточнить, так как величина $\ell(\rho)-\ell(\tau)=0$ строго меньше, чем $\ell(\sigma)=1$. Мы снова получаем $\deg U^0_\sigma\leqslant-2$.

Таким образом, существенный вклад возникает только когда $\sigma=(1)$, $\rho_{\ell(\rho)}=1$ и $\tau=(\rho_1,\dots,\rho_{\ell(\rho)-1})$ (то есть, τ получается из ρ удалением единичной компоненты). Это дает слагаемое $U^0_\sigma\mathbf{g}_\rho=\alpha\partial\mathbf{g}_\rho/\partial\mathbf{g}_1$. □

В следующих леммах 5.17, 5.18 и 5.19 мы разберемся с оператором $\sum_\sigma U^1_\sigma$, последовательно рассматривая случаи $\ell(\sigma)=0$, $\ell(\sigma)=2$, и $\ell(\sigma)=1$ (из следствия 5.15 вытекает, что этого достаточно). Они похожи на леммы 5.10, 5.11 и 5.12 соответственно.

Лемма 5.17. $U^1_\varnothing=\frac12\mathbf{g}_1$.

Доказательство. Лемма может быть доказана так же, как лемма 5.10. Стоит только отметить, что $\bigl\langle x(x+1)\cdot a_\varnothing\bigl(x(x+1)\bigr)\bigr\rangle^{\uparrow}=\bigl\langle x(x+1)\bigr\rangle^{\uparrow}=\mathbf{g}_1$ в (5.45), и поэтому $U^1_\varnothing$ совпадает с умножением на $\mathbf{g}_1/2$. □

Лемма 5.18.

$$\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=2}U^1_\sigma=\sum_{r,s\geqslant 1}(2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_r\partial\mathbf{g}_s}+\text{операторы степени }\leqslant(-2). \tag{5.54}$$

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство леммы 5.11, но вместо леммы 5.8 мы ссылаемся на аналогичную ей (для оператора U) лемму 5.14.

Пусть $\ell(\sigma) = 2$ в (5.45), то есть, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ и $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant 1$. По лемме 5.6 и предложению 4.9,

$$\begin{aligned}&\Big\langle x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\Big\rangle^{\uparrow}\\&= 4(2\sigma_1-1)(2\sigma_2-1)\mathbf{g}_{\sigma_1+\sigma_2-1} + \text{ слагаемые степени } \leqslant (2|\sigma|-5).\end{aligned} \tag{5.55}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Bigg(\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=2} U^1_\sigma\Bigg)\mathbf{g}_\rho = &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant \ell(\rho)} 2(2\rho_i-1)(2\rho_j-1)c^{\rho}_{\sigma\tau}\mathbf{g}_{\rho_i+\rho_j-1}\mathbf{g}_{\rho\setminus\{\rho_i,\rho_j\}}\\&+ \text{ слагаемые степени } \leqslant (2|\rho|-\ell(\rho)-3),\end{aligned} \tag{5.56}$$

и остается только сослаться на (5.36). □

Лемма 5.19.

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma:\ell(\sigma)=1} U^1_\sigma = \sum_{r\geqslant 1}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} + \sum_{r,s\geqslant 1}(r+s-1)\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}}\\+ \text{операторы степени } \leqslant (-2).\end{aligned} \tag{5.57}$$

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство леммы 5.12, и снова вместо леммы 5.8 мы ссылаемся на аналогичную ей (для оператора U) лемму 5.14.

Пусть $\ell(\sigma) = 1$ в (5.45), то есть, $\sigma = (s)$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Возможны два случая: $\ell(\rho) = \ell(\tau) + 1$ или $\ell(\rho) = \ell(\tau)$.

Пусть сначала $\ell(\rho) = \ell(\tau) + 1$. По лемме 5.6 и предложению 4.9,

$$\Big\langle x(x+1)\cdot a_\sigma\big(x(x+1)\big)\Big\rangle^{\uparrow} = 2(2s-1)\mathbf{g}_s + \text{ слагаемые степени } \leqslant (2s-3). \tag{5.58}$$

Это дает слагаемые

$$\sum_{r\geqslant 1}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} + \text{ операторы степени } \leqslant (-2). \tag{5.59}$$

Если же $\ell(\rho)=\ell(\tau)$, то аналогично доказательству леммы 5.12, мы получаем слагаемые

$$\sum_{\substack{r\geqslant 2\\ 1\leqslant s\leqslant r-1}}(2s-1)\mathbf{g}_s\mathbf{g}_{r-s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}+\text{ операторы порядка }\leqslant -2. \tag{5.60}$$

Искомая формула получается после несложных преобразований. □

Формула 5.5 в теореме 5.4 следует из лемм 5.16, 5.17, 5.18 и 5.19. Таким образом, теорема 5.4 полностью доказана.

6. Операторы T_n в дифференциальной форме

Выше были определены $T_n\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)\to\mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ – переходные операторы марковских цепей вверх/вниз, соответствующих мультипликативным мерам на графе Шура (§2). В этом разделе мы докажем следующую формулу для T_n:

Теорема 6.1. *Существует единственный оператор $\widetilde{B}\colon\Gamma\to\Gamma$, такой что*

$$(T_n-\mathbf{1})f_n=\frac{(\widetilde{B}f)_n}{(n+\alpha/2)(n+1)}\quad \textit{для всех } f\in\Gamma. \tag{6.1}$$

Отождествим Γ с алгеброй полиномов $\mathbb{R}[p_1,p_3,p_5,\dots]$. Оператор $\widetilde{B}$ имеет нулевую степень, его максимальная однородная компонента равна

$$\begin{aligned}B=&\sum_{i,j=2}^{\infty}(2i-1)(2j-1)(p_1p_{2i+2j-3}-p_{2i-1}p_{2j-1})\frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1}\partial p_{2j-1}}\\&+2\sum_{i,j=1}^{\infty}(2i+2j-1)p_1p_{2i-1}p_{2j-1}\frac{\partial}{\partial p_{2i+2j-1}}\\&-\sum_{i=2}^{\infty}(2i-1)\Big(2i-2+\frac{\alpha}{2}\Big)p_{2i-1}\frac{\partial}{\partial p_{2i-1}}.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Под максимальной однородной компонентой оператора $\widetilde{B}$ мы понимаем единственный оператор $B\colon\Gamma\to\Gamma$ (нулевой степени), такой что

$$\widetilde{B}=B+\text{ операторы степени }\leqslant(-1). \tag{6.3}$$

Сначала выпишем важное следствие данной теоремы, вытекающее из того, что в формуле (6.2) для B нет частных производных по p_1.

Следствие 6.2. *Оператор* $B\colon \Gamma \to \Gamma$ *коммутирует с оператором умножения на* $p_1 \in \Gamma$.

В оставшейся части раздела мы докажем теорему 6.1.

Заметим, что

$$(T_n - \mathbf{1})f_n = \frac{\left((UD - \frac{1}{4}(\mathbf{g}_1 + \alpha)(\mathbf{g}_1 + 2))f\right)_n}{(n + \alpha/2)(n+1)} \tag{6.4}$$

для всех $f \in \Gamma$, см. §5.1, теорему 5.4 и формулу (4.19). Поэтому $\widetilde{B} = UD - \frac{1}{4}(\mathbf{g}_1 + \alpha)(\mathbf{g}_1 + 2)$, и единственность $\widetilde{B}$ следует из того, что вложение $\Gamma \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{S})$ инъективно.

Используя теорему 5.4, можно записать $\widetilde{B}$ как формальный дифференциальный оператор в алгебре $\Gamma = \mathbb{R}[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots]$, следующим образом:

Лемма 6.3.

$$\begin{aligned}\widetilde{B} = &\sum_{r,s=2}^{\infty} (2r-1)(2s-1)(\mathbf{g}_1\mathbf{g}_{r+s-1} - \mathbf{g}_r\mathbf{g}_s)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s} \\ &+ \sum_{r,s=1}^{\infty} (r+s-1/2)\mathbf{g}_1\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}} \\ &- \sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\left(2r-2+\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} + \text{операторы степени} \quad \leqslant (-1).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Отметим, что хотя операторы U и D имеют степень 1, степень $\widetilde{B}$ равна 0, а не 2, как могло бы быть. Это связано с тем, что члены второй и первой степени в $\widetilde{B}$ оказываются нулевыми.

Доказательство. Запишем

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 + U_0 + U_{-1} + \dots, \quad D = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 + D_0 + D_{-1} + \dots, \tag{6.6}$$

где точками обозначены слагаемые степени $\leqslant (-2)$, и где

$$U_0 := \frac{1}{2}\alpha + \sum_{r=1}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r}, \quad D_0 := -\sum_{r=1}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} \tag{6.7}$$

(это члены нулевой степени),

$$
\begin{aligned}
U_{-1} &:= \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \sum_{r,s=1}^{\infty} (2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s} \\
&+ \sum_{r,s=1}^{\infty} (r+s-1)\mathbf{g}_r \mathbf{g}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}}, \qquad (6.8) \\
D_{-1} &:= \sum_{r,s=1}^{\infty} (2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{g}_r \partial \mathbf{g}_s} + \sum_{r,s=1}^{\infty} (r+s)\mathbf{g}_r \mathbf{g}_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_{r+s}}
\end{aligned}
$$

(это члены степени -1). Теперь будем последовательно вычислять оператор $\widetilde{B} = UD - \frac{1}{4}(\mathbf{g}+\alpha)(\mathbf{g}+2)$. Члены степени 2 имеют вид:

$$
\frac{1}{4}\mathbf{g}_1^2 - \frac{1}{4}\mathbf{g}_1^2 = 0. \qquad (6.9)
$$

Члены степени 1 имеют вид:

$$
\frac{1}{2}\mathbf{g}_1 D_0 + \frac{1}{2}U_0 \mathbf{g}_1 - \frac{1}{4}(\alpha+2)\mathbf{g}_1. \qquad (6.10)
$$

Так как оператор $\sum\limits_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r}$ коммутирует с умножением на p_1,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 D_0 + U_0 \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{g}_1 \left(\mathbf{g}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \sum_{r=2}^{\infty} (2r-1)\mathbf{g}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} \right) \\
&+ \left(\frac{\alpha}{2} + \mathbf{g}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \sum_{r=2}^{\infty} (2r-1)\mathbf{g}_r \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_r} \right) \mathbf{g}_1 \\
&= -\mathbf{g}_1^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} + \frac{\alpha}{2}\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}_1} \mathbf{g}_1 = \frac{\alpha}{2}\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1, \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

и члены степени 1 также равны нулю.

Остается вычислить члены степени 0, они равны

$$
\frac{1}{2}\mathbf{g}_1 D_{-1} + U_0 D_0 + \frac{1}{2}U_{-1}\mathbf{g}_1 - \frac{\alpha}{2}. \qquad (6.12)
$$

Заметим, что

$$[U_{-1},\mathbf{g}_1]=\left[\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1},\mathbf{g}_1\right]+\left[\mathbf{g}_1\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_1^2},\mathbf{g}_1\right]+2\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1},\mathbf{g}_1\right]$$
$$=\alpha+2\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}+2\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}. \tag{6.13}$$

Можно легко проверить, что

$$\begin{aligned}
&U_0D_0\\
&=-\left(\frac{\alpha}{2}+\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}+\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}\right)\left(\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}+\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\alpha\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}-\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}-\mathbf{g}_1^2\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_1^2}-2\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_1\mathbf{g}_r\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_1\partial\mathbf{g}_r}\\
&-\frac{\alpha}{2}\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}-\sum_{r,s=2}^{\infty}(2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_r\partial\mathbf{g}_s}\\
&-\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)^2\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}
\end{aligned}\tag{6.14}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(D_{-1}+U_{-1})&=\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}+\sum_{r,s=2}^{\infty}(2r-1)(2s-1)\mathbf{g}_{r+s-1}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_r\partial\mathbf{g}_s}\\
&+\mathbf{g}_1\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_1^2}+2\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{g}_r\partial\mathbf{g}_1}+\sum_{r,s=1}^{\infty}(r+s-1/2)\mathbf{g}_r\mathbf{g}_s\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_{r+s}}.
\end{aligned}\tag{6.15}$$

Теперь мы наконец можем выписать члены степени 0:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbf{g}_1D_{-1}+U_0D_0+\frac{1}{2}U_{-1}\mathbf{g}_1-\frac{\alpha}{2}\\
&=\frac{1}{2}\mathbf{g}_1(D_{-1}+U_{-1})+U_0D_0+\mathbf{g}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_1}+\sum_{r=2}^{\infty}(2r-1)\mathbf{g}_r\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}_r}.
\end{aligned}\tag{6.16}$$

Сопоставляя (6.14), (6.15) и (6.16), получим искомое выражение. □

Теперь остается в выражении для $\widetilde{B}$ из предыдущей леммы заменить неоднородные элементы $\mathbf{g}_k$ на однородные p_{2m-1}, не меняя при этом максимальную однородную компоненту оператора $\widetilde{B}$.

Лемма 6.4. (1) $\mathbf{g}_k = 2p_{2k-1}$+слагаемые степени $\leqslant (2k-1)$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$;
(2) *Пусть* $f \in \Gamma$, *тогда*[22]

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_{2k-1}} + \text{слагаемые степени} \quad \leqslant \big(\deg f - (2k-1)\big), \quad k \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{6.17}$$

Доказательство. Утверждение (1) напрямую следует из предложений 4.5 и 4.6. Для доказательства утверждения (2) заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}_k} = \sum_{l \geqslant k} \frac{\partial(2p_{2l-1})}{\partial \mathbf{g}_k}\frac{\partial f}{\partial(2p_{2l-1})} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p_{2k-1}} + \sum_{l>k}\frac{\partial(2p_{2l-1}-\mathbf{g}_l)}{\partial \mathbf{g}_k}\frac{\partial f}{\partial(2p_{2l-1})}. \tag{6.18}$$

Степень l-го слагаемого в последней сумме оценивается как

$$\leqslant (2l-3)-(2k-1)+\deg f-(2l-1) = \deg f-(2k-1)-2 < \deg f-(2k-1). \tag{6.19}$$

□

Теорема 6.1 следует из лемм 6.3 и 6.4.

7. Предельная диффузия

7.1. Теорема об аппроксимации полугрупп

Здесь мы приведем (в удобной нам форме) общий результат об аппроксимации непрерывных полугрупп дискретными, основанный на результатах [28, 4].

Пусть L и L_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ – банаховы пространства над $\mathbb{R}$, нормы в которых будем обозначать одинаково через $\|\cdot\|$. Пусть $\pi_n\colon L \to L_n$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, – ограниченные линейные вложения, такие что $\sup_n \|\pi_n\| < \infty$.

Определение 7.1. *Говорим, что последовательность* $\{f_n \in L_n\}$ *сходится к элементу* $f \in L$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\pi_n f - f_n\| = 0$. *Обозначается* $f_n \to f$.

В нашей ситуации, описанной ниже в §7.2, также верно

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi_n f\| = \|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in L. \tag{7.1}$$

[22] Заметим, что и $\partial f/\partial \mathbf{g}_k$, и $\partial f/\partial p_{2k-1}$ имеют степень $\big(\deg f - (2k-1)\big)$.

Отсюда следует, что любая последовательность $\{f_n \in L_n\}$ может иметь не более одного предела в L.

Напомним, что оператор D в L называется диссипативным, если $\|(s\mathbf{1}-D)f\| \geqslant s\|f\|$ для всех $s \geqslant 0$ и всех f из области определения D. Здесь $\mathbf{1}$ означает тождественный оператор.

Пусть T_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, – сжимающие операторы в L_n, а $\varepsilon_n > 0$ – последовательность, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Предположим, что существует плотное подпространство $\mathcal{F} \subset L$ и оператор $A\colon \mathcal{F} \to L$, такие что

$$\varepsilon_n^{-1}(T_n - \mathbf{1})\pi_n f \to Af \qquad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{F}. \tag{7.2}$$

Теорема 7.2. *Предположим, что:*

- *Оператор $A\colon \mathcal{F} \to L$ является диссипативным;*
- *Для некоторого $s > 0$ область значений $(s\mathbf{1} - A)$ плотна в L.*

Тогда оператор A замыкаем в L, его замыкание порождает сильно непрерывную сжимающую полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ в L, и

$$T_n^{[\varepsilon_n^{-1}t]}\pi_n f \to T(t)f \qquad \text{для всех } f \in L, \tag{7.3}$$

для всех $t \geqslant 0$ равномерно на ограниченных интервалах.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный оператор $K\colon L \to L$, $K\colon f \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n^{-1}(T_n - \mathbf{1})\pi_n f$ для всех $f \in L$, для которых этот предел существует. Ясно, что $K\,|_{\mathcal{F}} = A$. Так как операторы T_n являются сжимающими, то операторы $\varepsilon_n^{-1}(T_n - \mathbf{1})$ диссипативны. Значит, K также является диссипативным. Оператор K удовлетворяет условиям [28, Thm. 5.3]. Поэтому K замыкаем и его замыкание $\overline{K}$ порождает полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ в L, причем выполняется сходимость (7.3) (а ее равномерность следует из импликации (b)$\Rightarrow$(a) в [4, Ch. 1, Thm. 6.5]). Так как операторы T_n сжимающие, из (7.1) и (7.3) следует, что $T(t)$ также сжимающие. По теореме Хилле–Иосиды (см., напр., [Ch. 1, Thm. 2.6]), диссипативность K влечет сильную непрерывность полугруппы $T(t)$. Так как $\mathcal{F}$ плотно в L и для некоторого $s > 0$ область определения оператора $(s\mathbf{1} - \overline{K})\,|_{\mathcal{F}} = s\mathbf{1} - A$ плотна в L, подпространство $\mathcal{F} \subset L$ является *существенной областью определения (core)* оператора $\overline{K}$ в смысле [4, Ch. 1, Sect. 3]. Из [4, Ch. 1, Prop. 3.1] следует, что оператор A замыкаем в L и $\overline{K} = \overline{A}$. Теорема доказана. $\square$

7.2. Симплекс Ω_+

В качестве L_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, возьмем конечномерные пространства $\mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$ (с супремум-нормой), в качестве T_n – операторы цепей вверх/вниз, построенные по мультипликативным мерам. Ясно, что эти операторы являются сжимающими. Положим $\varepsilon_n := 1/n^2$. Пусть Ω_+ – симплекс (1.1). Это метризуемый сепарабельный компакт. В качестве L возьмем банахово пространство $C(\Omega_+)$ действительнозначных непрерывных функций на Ω_+ с супремум-нормой. Рассмотрим для $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ вложения

$$\iota_n\colon \mathbb{S}_n \hookrightarrow \Omega_+, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, 0, 0, \dots) \mapsto \left(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_\ell}{n}, 0, 0, \dots\right) \in \Omega_+. \tag{7.4}$$

Определим операторы $\pi_n\colon C(\Omega_+) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$, $(\pi_n f)(\lambda) := f(\iota_n(\lambda))$, где $f \in C(\Omega_+)$ и $\lambda \in \mathbb{S}_n$. Ясно, что $\|\pi_n\| \leqslant 1$. Кроме того, так как Ω_+ аппроксимируется множествами $\iota_n(\mathbb{S}_n)$ (в том смысле, что каждое открытое подмножество в Ω_+ имеет непустое пересечение с $\iota_n(\mathbb{S}_n)$ для всех достаточно больших n), выполнено дополнительное условие (7.1).

7.3. Моментные координаты

Каждой точке $\mathsf{x} \in \Omega_+$ поставим с соответствие вероятностную меру $\nu_{\mathsf{x}} := \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i \delta_{\mathsf{x}_i} + \gamma\delta_0$ на $[0,1]$, где $\gamma := 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i$ и δ_s – мера Дирака в точке s. Через $\mathsf{q}_k = \mathsf{q}_k(\mathsf{x})$ обозначим k-й момент меры ν_{x}:

$$\mathsf{q}_k(\mathsf{x}) := \int_0^1 u^k \nu_{\mathsf{x}}(du) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{7.5}$$

Следуя [3], мы называем $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots$ *моментными координатами* точки $\mathsf{x} \in \Omega_+$. Они являются непрерывными функциями на Ω_+.[23] Функции $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots$ алгебраически независимы. Ясно, что и любое подмножество этого набора (например, $\{\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \dots\}$) алгебраически независимо. Пусть $\mathcal{F} \subset C(\Omega_+)$ – подалгебра, свободно порожденная *четными* моментными координатами, $\mathcal{F} := \mathbb{R}[\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \mathsf{q}_6, \dots]$.

---

[23] Отметим, что функция $\mathsf{x} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i$ не является непрерывной.

Предложение 7.3. *Функции* $\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \mathsf{q}_6, \dots$ *разделяют точки* Ω_+. *Более того, любое бесконечное подмножество набора* $\{\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots\}$ *также обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть $\{\mathsf{q}_{k_1}, \mathsf{q}_{k_2}, \dots\} \subset \{\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \dots\}$ – бесконечное подмножество, $k_1 < k_2 < \dots$. Для всех $m = 0, 1, 2, \dots$ имеем:

$$\Big(\mathsf{q}_{k_n}(\mathsf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \mathsf{x}_j^{k_n}\Big)^{1/k_n} = \mathsf{x}_{m+1} \cdot \Big(1 + \sum_{i=m+1}^{\infty} (\mathsf{x}_i/\mathsf{x}_{m+1})^{k_n}\Big)^{1/k_n} \to \mathsf{x}_{m+1} \tag{7.6}$$

при $n \to \infty$ (сходимость поточечная).[24] Используя эту сходимость, можно последовательно восстановить координаты $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3, \dots$ по последовательности $\{\mathsf{q}_{k_1}(\mathsf{x}), \mathsf{q}_{k_2}(\mathsf{x}), \dots\}$. $\square$

Так как подалгебра $\mathcal{F} \subset C(\Omega_+)$ разделяет точки и содержит функцию-константу 1, она плотна в $C(\Omega_+)$.

Пусть $I := (p_1 - 1)\Gamma$ – главный идеал в алгебре Γ (определенной в §4.1), порожденный $(p_1 - 1)$. Положим $\Gamma^\circ := \Gamma/I$. Образ элемента $f \in \Gamma$ в Γ° обозначим через f°. В частности, $p_1^\circ = 1$, и алгебра Γ° свободно порождена (как коммутативная алгебра с единицей) элементами $p_3^\circ, p_5^\circ, p_7^\circ, \dots$. Также заметим, что $\Gamma = \mathbb{R}[p_1, p_3, p_5, p_7, \dots] = I \oplus \mathbb{R}[p_3, p_5, p_7, \dots]$, и поэтому $\mathcal{F} \cong \mathbb{R}[p_3, p_5, p_7, \dots]$.

Соответствие

$$p_{2k+1}^\circ \longleftrightarrow \mathsf{q}_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{7.7}$$

устанавливает изоморфизм Γ° и $\mathcal{F}$. Будем отождествлять элементы $g \in \Gamma^\circ$ и соответствующие им непрерывные функции $g(\mathsf{x})$ на Ω_+. Также любому элементу $\varphi \in \Gamma$ соответствует непрерывная функция $\varphi^\circ(\mathsf{x})$ на Ω_+. Можно сказать, что отображение $\Gamma \to C(\Omega_+)$, $\varphi \mapsto \varphi^\circ(\cdot)$ полностью определяется образами порождающих элементов алгебры Γ:

$$p_1^\circ(\mathsf{x}) :\equiv 1, \quad p_{2k-1}^\circ(\mathsf{x}) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i^{2k-1}, \quad k = 2, 3, \dots. \tag{7.8}$$

7.4. Предельная теорема для когерентных систем

Теорема 7.4. *Пусть* $\{M_n\}$ *– любая когерентная система на* $\mathbb{S}$ *(см. §2.2). Тогда образы* M_n *при* ι_n *слабо сходятся при* $n \to \infty$ *к вероятностной мере* P *на* Ω_+. *Мера* P *называется граничной мерой для* $\{M_n\}$.

[24] Считаем, что при $m = 0$ в левой части нет суммы $\sum_{j=1}^{m}$.

Обратно, $\{M_n\}$ *может быть восстановлена по своей граничной мере:*

$$M_n(\lambda) = 2^{-|\lambda|}\mathsf{h}(\lambda) \int\limits_{\Omega_+} \mathcal{Q}_\lambda^\circ(\mathsf{x})\mathsf{P}(d\mathsf{x}) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ и } \lambda \in \mathbb{S}_n. \quad (7.9)$$

Напомним, что $\mathsf{h}(\lambda)$ определено в (2.3), а $\mathcal{Q}_\lambda^\circ$ – образ в $\mathcal{F}$ дважды симметрической Q-функции Шура (см. §4.1).

Доказательство. Данную теорему можно доказать также как [12, Theorem B] с двумя изменениями: вместо θ-сдвинутых полиномов Джека надо рассматривать Q-функции Шура, а вместо [Theorem 6.1] следует сослаться на формулу размерности косых сдвинутых диаграмм [10]. □

Граничную меру мультипликативной когерентной системы $\{M_n^\alpha\}$ обозначим через $\mathsf{P}^{(\alpha)}$.

7.5. Сходимость генераторов

Здесь мы докажем сходимость операторов $n^2(T_n - \mathbf{1})$ к оператору $A: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. В следующем подразделе, используя эту сходимость и общую теорему 7.2, мы докажем сходимость марковских цепей вверх/вниз к процессу $\mathsf{X}_\alpha(t)$ на Ω_+, порожденному оператором A.

Предложение 7.5. *Имеет место сходимость* (*в смысле определения* 7.1)*:*

$$n^2(T_n - \mathbf{1})\pi_n f \to Af \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}, \quad (7.10)$$

где оператор $A: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ *может быть записан как формальный дифференциальный оператор* (1.3) *в алгебре* $\mathcal{F} = \mathbb{R}[\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \mathsf{q}_6, \dots]$*:*

Сначала докажем две леммы.

Лемма 7.6. *Пусть* $\varphi \in \Gamma$ *и* $\deg \varphi \leqslant m - 1$ *для некоторого* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. *Тогда*

$$\frac{1}{n^m}\varphi_n \to 0, \quad n \to \infty \quad (7.11)$$

в смысле определения 7.1.[25]

Доказательство. Сходимость к нулю значит, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{S}_n} \frac{1}{n^m} |\varphi_n(\lambda)| \to 0, \quad n \to \infty. \quad (7.12)$$

[25]Напомним, что через $(\cdots)_n$ обозначается ограничение функции из алгебры $\Gamma \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{S})$ на $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}$.

Заметим, что для всех $\lambda \in \mathbb{S}_n$ выполняется $\lambda_i \leqslant n$, $i = 1, \dots, \ell(\lambda)$. Поэтому $|\varphi_n(\lambda)| \leqslant \mathrm{Const} \cdot n^{m-1}$. $\square$

Через G обозначим оператор $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2i-1)p_{2i-1}\frac{\partial}{\partial p_{2i-1}}$ в алгебре Γ. На каждой однородной компоненте Γ степени m его действие сводится к умножению на m. Для $s > 0$ обозначим через $s^G\colon \Gamma \to \Gamma$ автоморфизм Γ, который действует умножением на s^m на каждой однородной компоненте Γ степени m.

Лемма 7.7. *Пусть $g \in \Gamma$ и $f = g^\circ \in \mathcal{F}$. Для всех $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнено*

$$\pi_n f = \left(n^{-G} g\right)_n. \tag{7.13}$$

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{S}_n$. Рассмотрим гомоморфизм $\Gamma \to \mathbb{R}$, определенный на порождающих элементах:

$$p_{2m-1} \to \frac{1}{n^{2m-1}} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^{2m-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots. \tag{7.14}$$

С одной стороны, это композиция автоморфизма n^{-G} и отображения $\Gamma \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi_n(\lambda)$. Поэтому $g \in \Gamma$ переходит в $(n^{-G}g)_n(\lambda)$. С другой стороны, так как p_1 переходит в 1, этот гомоморфизм можно рассматривать как композицию канонического гомоморфизма $\Gamma \to \Gamma^\circ$ и отображения $\Gamma^\circ \to \mathbb{R}$, $\psi \mapsto \psi(\iota_n(\lambda))$ (здесь ι_n определено в §7.2). Поэтому $g \in \Gamma$ переходит в $f(\iota_n(\lambda)) = (\pi_n f)(\lambda)$. $\square$

Доказательство предложения 7.5. Фиксируем $f \in \mathcal{F}$ и пусть $f = g^\circ$ для некоторого $g \in \Gamma$. Теорема 6.1 и лемма 7.7 дают

$$n^2(T_n - \mathbf{1})\pi_n(f) = n^2(T_n - \mathbf{1})\left(n^{-G}g\right)_n = \frac{n^2}{(n+\alpha/2)(n+1)}\left(\widetilde{B} n^{-G} g\right)_n. \tag{7.15}$$

Здесь $\widetilde{B}$ – оператор нулевой степени с максимальной однородной компонентой B. Так как степень $(B - \widetilde{B})$ равна -1, мы можем заменить $\widetilde{B}$ на B в (7.15), это будет влиять только на бесконечно малые слагаемые. Мы также можем убрать множитель $\frac{n^2}{(n+\alpha/2)(n+1)}$, стремящийся к единице. Поэтому

$$n^2(T_n - \mathbf{1})\pi_n(f) - (Bn^{-G}g)_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7.16}$$

Оператор $B\colon \Gamma \to \Gamma$ является однородным, поэтому $Bn^{-G} = n^{-G}B$ и по лемме 7.7 получаем $(Bn^{-G}g)_n = (n^{-G}Bg)_n = \pi_n\big((Bg)^\circ\big)$. Оператор $B\colon \Gamma \to \Gamma$ коммутирует с умножением на p_1 (следствие 6.2), поэтому корректно определен оператор $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f \mapsto (Bg)^\circ$, где элемент $g \in \Gamma$ таков, что $f = g^\circ$ (действие A не зависит от выбора g). Так как $\mathcal{F} \cong \mathbb{R}[p_3, p_5, \dots]$, мы получаем (1.3) из (6.2), заменяя p_1 на 1 и каждый элемент p_{2m+1} на q_{2m}, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

Замечание 7.8. В [20, §8.6] также вычислено действие оператора A на функции $\mathcal{Q}^\circ_\lambda(\mathsf{x})$, $\lambda \in \mathbb{S}$:

$$A\mathcal{Q}^\circ_\mu = -|\mu|(|\mu| + \alpha/2 - 1)\mathcal{Q}^\circ_\mu + \sum_{y \in Y(\mu)} \big(y(y+1) + \alpha\big)\mathcal{Q}^\circ_{\mu - \square_-(y)}. \quad (7.17)$$

7.6. Сходимость полугрупп и существование процесса

Чтобы применить теорему 7.2 и доказать существование процесса на Ω_+, остается установить следующее:

Лемма 7.9. (1) *Оператор* $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ (1.3), *построенный в предложении* 7.5, *диссипативен;*

(2) *Для всех* $s > 0$ *область значений* $s\mathbf{1} - A$ *плотна в* $C(\Omega_+)$.[26]

Доказательство(ср. с доказательством предложения 1.4 в [3]). (1) Рассмотрим фильтрацию алгебры $\mathcal{F} = \Gamma/(p_1 - 1)\Gamma$, порожденную фильтрацией в Γ: $\mathcal{F} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(m)}$, и $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \mathcal{F}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{F}$. Ясно, что для каждого фиксированного $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ оператор $\pi_n\colon C(\Omega_+) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$ инъективен на $\mathcal{F}^{(m)}$ для всех достаточно больших n (это верно, так как все $\mathcal{F}^{(m)}$ конечномерны, а множества $\iota_n(\mathbb{S}_n)$ аппроксимируют Ω_+). Поэтому $\mathcal{F}^{(m)}$ можно отождествить с $\pi_n(\mathcal{F}^{(m)})$ для всех достаточно больших n. Так как оператор $\widetilde{B}$ из теоремы 6.1 имеет нулевой порядок, то T_n не повышает степени функций. Поэтому T_n можно рассматривать как оператор в $\mathcal{F}^{(m)}$. Из сходимости $n^2(T_n - \mathbf{1}) \to A$ (предложение 7.5) следует, что $n^2(T_n - \mathbf{1})$ сходится к A в каждом конечномерном пространстве $\mathcal{F}^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Каждый оператор $n^2(T_n - \mathbf{1})$ диссипативен, так как T_n – оператор перехода n-й марковской цепи вверх/вниз. Так как супремум-нормы пространств $\mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n)$ сходятся к супремум-норме в $C(\Omega_+)$, оператор A также является диссипативным.

[26] Хотя достаточно доказать это для какого-то $s > 0$, но мы это сделаем сразу для всех s.

(2) Для всех m и $s > 0$ оператор $s\mathbf{1} - A$ отображает $\mathcal{F}^{(m)}$ в себя (это вытекает из утверждения (1)). Поэтому $(s\mathbf{1} - A)\mathcal{F} = \mathcal{F}$, то есть, область значений $s\mathbf{1} - A$ плотна в $C(\Omega_+)$. □

Далее, из теоремы 7.2 следует, что оператор A замыкаем в $C(\Omega_+)$ и его замыкание порождает сильно непрерывную сжимающую полугруппу $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Также имеет место сходимость полугрупп $\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \dots\}$ к $\{T(t)\}$ (7.3). Полугруппа $\{T(t)\}$ сохраняет положительность функций и функцию-константу 1, что следует из аналогичных свойств операторов T_n. В силу [4, Ch. 4, Thm. 2.7], полугруппа $\{T(t)\}$ порождает строго марковский процесс $\mathsf{X}_\alpha(t)$ на Ω_+, который может начинаться с любой точки и любой борелевской вероятностной меры на Ω_+. Оператор A называется *предгенератором* процесса $\mathsf{X}_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$.

Приведем некоторые свойства процесса $\mathsf{X}_\alpha(t)$, которые напрямую следуют из его конструкции как предела марковских цепей вверх/вниз. Их доказательства аналогичны соответствующим доказательствам в [3], см. также [20, §8.8].

- Траектории процесса $\mathsf{X}_\alpha(t)$ непрерывны.
- Для каждого $\alpha > 0$ мера $\mathsf{P}^{(\alpha)}$ (определенная в §7.4) является единственной инвариантной мерой для $\mathsf{X}_\alpha(t)$. Процесс обратим и эргодичен относительно нее.
- Пусть процесс $\mathsf{X}_\alpha(t)$ и все цепи T_n равновесны (то есть, начинаются со стационарного распределения). Тогда конечномерные распределения T_n сходятся к конечномерным распределениям процесса $\mathsf{X}_\alpha(t)$ при масштабном преобразовании времени, при котором один шаг n-й цепи соответствует интервалу времени порядка n^{-2}.
- Пространство $\mathcal{F}$, рассматриваемое как подпространство в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega_+, \mathsf{P}^{(\alpha)})$, раскладывается в ортогональную прямую сумму собственных подпространство оператора $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Собственные значения A таковы:
$$\{0\} \cup \{-m\,(m - 1 + \alpha/2) : m = 2, 3, \dots\}. \tag{7.18}$$
Собственное значение 0 простое, кратность m-го равна числу разбиений m на нечетные слагаемые, большие единицы, то есть, числу решений уравнения
$$3n_3 + 5n_5 + 7n_7 + \ldots = m \tag{7.19}$$
в неотрицательных целых числах.

Литература

1. A. Berele and B. Tenner, *Doubly Symmetric Functions*, 2009, arXiv:0903.5306v1 [math.CO].
2. A. Borodin, *Multiplicative central measures on the Schur graph.* — Jour. Math. Sci. (New York) **96**, No. 5 (1999), 3472–3477, in Russian: Zap. Nauchn. Sem. POMI **240** (1997), 44–52, 290–291.
3. A. Borodin and G. Olshanski, *Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions.* — Prob. Theor. Rel. Fields **144** No. 1 (2009), 281–318, arXiv:0706.1034v2 [math.PR].
4. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov processes: Characterization and convergence. Wiley-Interscience, New York (1986).*
5. W. J. Ewens, *Mathematical Population Genetics.* Springer-Verlag, Berlin (1979).
6. J. Fulman, *Stein's method and Plancherel measure of the symmetric group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 555–570, arXiv:math/0305423v3 [math.RT].
7. J. Fulman, *Commutation relations and Markov chains.* — Prob. Theory Rel. Fields **144**, No. 1 (2009), 99–136, arXiv:0712.1375v2 [math.PR].
8. A. Gnedin and G. Olshanski, *Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams.* — Intern. Math. Research Notices (2006), Art. ID 51968, 39pp., arXiv:math/0508131v2 [math.CO].
9. P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, *Projective representations of the symmetric groups.* Oxford Univ. Press (1992).
10. V. N. Ivanov, *The Dimension of Skew Shifted Young Diagrams, and Projective Characters of the Infinite Symmetric Group.* — Journal of Mathematical Sciences (New York) **96**, No. 5 (1999), 3517–3530, in Russian: Zap. Nauchn. Sem. POMI **240** (1997), 115–135.
11. S. Kerov, *Anisotropic Young diagrams and Jack symmetric functions.* — Functional Analysis and Its Applications **34**, No. 1 (2000), 41–51, arXiv:math/9712267v1 [math.CO].
12. S. Kerov, A. Okounkov, and G. Olshanski, *The boundary of Young graph with Jack edge multiplicities.* — Intern. Math. Research Notices **4** (1998), 173–199, arXiv:q-alg/9703037v1.
13. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Ser. I **316** (1993), 773–778.
14. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group*, Invent. Math. **158**, No. 3 (2004), 551–642, arXiv: math.RT/0312270.
15. S. Kerov and A. Vershik, *The Grothendieck Group of the Infinite Symmetric Group and Symmetric Functions with the Elements of the K_0-functor theory of AF-algebras.* — Adv. Stud. Contemp. Math., Gordon and Breach **7** (1990), 36–114.
16. J. F. C. Kingman, *Random partitions in population genetics.* — Proc. R. Soc. London, A **361 (1978), 1–20.**
17. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* 2nd ed., Oxford University Press (1995).
18. M. Nazarov, *Projective representations of the infinite symmetric group.* — Representation theory and dynamical systems (A. M. Vershik, ed.), Advances in Soviet Mathematics, Amer. Math. Soc. **9** (1992), 115–130.

19. G. Olshanski, *Anisotropic Young diagrams and infinite-dimensional diffusion processes with the Jack parameter*. 2009, arXiv:0902.3395v1 [math.PR].
20. L. Petrov, *Random walks on strict partitions*. 2009, arXiv:0904.1823v1 [math.PR].
21. J. Pitman, *The two-parameter generalization of Ewens' random partition structure*. Technical report 345, Dept. Statistics, U. C. Berkeley, 1992, http://www.stat.berkeley.edu/tech-reports/.
22. J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes: Ecole d'ete de Probabilites de Saint-Flour XXXII - 2002*. — Lect. Notes in Math. 1875, Springer-Verlag, Berlin (2006), http://works.bepress.com/jim_pitman/1.
23. I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrocheme lineare Substitionen. — J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.
24. J. Stembridge, *A characterization of supersymmetric polynomials*. — J. Algebra **95** (1985), 439–444.
25. J. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*. — Advances in Math **74** (1989), 87–134.
26. J. Stembridge, *On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra*. — J. Algebraic Combin. **1** (1992), 71–95.
27. E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*. — Math. Zeitschr **85** (1964), 40–61.
28. H. F. Trotter, *Approximation of Semigroups of Operators*. — Pacific J. Math **8** (1958), 887–919.
29. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*. — Мир, М. (1984).
30. Л. Петров, *Двухпараметрическое семейство бесконечномерных диффузий на симплексе Кингмана*. — Функциональный анализ и его приложения, принята к печати (2009), arXiv:0708.1930v3 [math.PR].

Petrov L. Random walks on strict partitions.

We construct a diffusion process in the infinite-dimensional simplex consisting of all nonincreasing infinite sequences of nonnegative numbers with sum less than or equal to one. The process is constructed as a limit of a certain sequence of Markov chains. The state space of the nth chain is the set of all strict partitions of n (that is, partitions without equal parts). As $n \to \infty$, these random walks converge to a continuous-time strong Markov process in the infinite-dimensional simplex. The process has continuous sample paths. The main result about the limit process is the expression of its pre-generator as a formal second order differential operator in a polynomial algebra.

Институт проблем передачи
информации им. А. А. Харкевича РАН.
E-mail: lenia.petrov@gmail.com

Поступило 18 сентября 2009 г.