Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

И. Н. Парасидис, П. Х. Цекрекос, Т. Локкас

КОРРЕКТНЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ С КУБИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Поскольку любой линейный корректный оператор может быть рассмотрен как корректное расширение некоторого минимального оператора, многими авторами теория расширений операторов была использована для доказательства корректности и самосопряженности некоторых задач и для нахождения их решений. Расширения минимальных операторов в гильбертовом и банаховом пространстве были исследованы рядом авторов, такими как В. И. Горбачук и М. Л. Горбачук [1], E. A. Coddington [2], М. И. Вишик [3], М. Г. Крейн [4], А. А. Дезин [5], М. О. Отелбаев [6], А. Н. Кочубей [7], Р. О. Ойнаров [8] и многими другими. Их расширения являлись сужениями некоторого оператора, главным образом сопряженного оператора A_0^*. Корректные сужения B некоторого максимального оператора A, в случае когда B является произведением двух корректных сужений B_1, B_2 оператора A в банаховом пространстве, были исследованы Шыныбековым [9]. Наши корректные расширения в общем не являются сужениями максимального оператора и, таким образом, метод Шыныбекова не может быть использован для нашей задачи. В [10] были рассмотрены корректные самосопряженные и положительные расширения неплотно определенных симметрических операторов. В данной статье, используя оператор B, определенный с помощью $Bx = \widehat{A}x - G\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} = f$, $D(B) = D(\widehat{A})$, где $G = (\widehat{A}F)C$, мы исследуем корректность и самосопряженность оператора B_3, соответствующего граничной задаче

$$B_3x = \widehat{A}^3x - Y\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - S\langle \widehat{A}^2x, F^t\rangle_{H^m} - G\langle \widehat{A}^3x, F^t\rangle_{H^m} = f,$$
$$D(B_3) = D(\widehat{A}^3), \tag{1}$$

Ключевые слова : корректность, самосопряженный оператор, краевая задача, кубический оператор.

где $\widehat{A}$ – некоторый известный корректный самосопряженный оператор, вектора $Y \in \mathbb{H}^m$, $S \in D(\widehat{A})^m$, $G \in D(\widehat{A}^2)^m$, $F \in D(\widehat{A}^3)^m$ и G, S, Y удовлетворяют (10).

Мы покажем, что оператор B_3 является кубическим, т.е. $B_3 = B^3$. Отметим, что самосопряженность B_3 может быть доказана более общим методом, развитым в статье [2]. Однако в нашем частном случае нет необходимости использовать этот сильный метод, и мы обходимся более прямым и простым доказательством.

В разделе 2 мы приводим некоторые основные понятия и обозначения операторов. В разделе 3 мы доказываем основной результат. В разделе 4 даются приложения нашего метода.

2. Терминология и обозначения

Пусть $\langle x, f\rangle_H$ означает скалярное произведение элементов x, f комплексного гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а $D(A)$ и $R(A)$, соответственно, область определения и область значения оператора $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Оператор $\widehat{A}$ называется *корректным*, если $R(\widehat{A}) = \mathbb{H}$ и обратный оператор $\widehat{A}^{-1}$ существует и непрерывен. Оператор B_1 называется *кубическим*, если существует оператор B такой, что $B_1 = B^3$. Пусть $F_i \in \mathbb{H}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $F = (F_1, \ldots, F_m)$ и $AF = (AF_1, \ldots, AF_m)$ – вектора из $\mathbb{H}^m$. Обозначим через $\mathcal{F} = (\widehat{A}^{-2}F, \widehat{A}^{-1}F, F) = (\widehat{A}^{-2}F_1, \ldots, \widehat{A}^{-2}F_m, \widehat{A}^{-1}F_1, \ldots, \widehat{A}^{-1}F_m, F_1, \ldots, F_m)$ вектор из $\mathbb{H}^{3m}$ и $\widehat{A}^{-3} = (\widehat{A}^{-1})^3$. А также через F^t и $\langle Ax, F^t\rangle_{H^m}$ вектор-столбцы $\operatorname{col}(F_1, \ldots, F_m)$ и $\operatorname{col}(\langle Ax, F_1\rangle_H, \ldots, \langle Ax, F_m\rangle_H)$, соответственно. С помощью M^t будем обозначать транспонированную матрицу матрицы M а с помощью $\langle AF^t, F\rangle_{H^m}$ $m\times m$ матрицу, у которой элемент i-ой строки и j-го столбца есть скалярное произведение $\langle AF_i, F_j\rangle_H$. Пусть I_m и $[0]_m$ означают единичную $m \times m$ и нулевую $m \times m$ матрицу, соответственно.

3. Корректные и самосопряженные задачи с кубическими операторами

В следующей теореме обобщается результат из [10, теорема 3.10].

Теорема 3.1. *Пусть оператор $B : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и*

$$Bx = \widehat{A}x - (\widehat{A}F)C\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} = f, \quad D(B) = D(\widehat{A}), \tag{2}$$

где $\widehat{A}$ *– корректный и самосопряженный оператор на* $\mathbb{H}$, C *–* $m \times m$ *матрица с* $\operatorname{rank} C = n \le m$ *и* $F_1, \ldots, F_m$ *– линейно-независимые элементы из* $D(\widehat{A})$. *Тогда:*

(i) B *– самосопряженный оператор, если и только если* C *– эрмитова матрица.*

(ii) B *– корректный оператор, если и только если имеет место*

$$\det\big[I_m - \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m} C\big] \neq 0. \qquad (3)$$

(iii) *Если* B *корректный оператор, то* $\dim R(B - \widehat{A}) = n$.

(iv) *Единственное решение* (2), *где* B *корректный оператор, дается с помощью*

$$x = B^{-1} f = \widehat{A}^{-1} f + FC\big[I_m - \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m} C\big]^{-1} \langle f, F^t\rangle_{H^m}. \qquad (4)$$

Доказательство. Из (2) мы находим:

$$B^* x = \widehat{A}x - \langle x, \widehat{A}F\rangle_{H^m} \overline{C}_m (\widehat{A}F^t) = \widehat{A}x - (\widehat{A}F)\overline{C}\,^t_m \langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} = Bx.$$

Следовательно, $B^* = B$, если и только если $C_m = \overline{C}\,^t_m$. □

Из теоремы 3.1, в силу корректной самосопряженности оператора $\widehat{A}^3$ и линейной независимости элементов вектора $\mathcal{F}$, легко следует следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть оператор* $B_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *и*

$$B_1 x = \widehat{A}^3 x - (\widehat{A}^3 \mathcal{F})\mathbb{C}_{3m} \langle \widehat{A}^3 x, \mathcal{F}^t\rangle_{H^{3m}} = f, \quad D(B_1) = D(\widehat{A}^3), \qquad (5)$$

где $\widehat{A}$ *как в теореме* 3.1, $\mathbb{C}_{3m}$ *–* $(3m) \times (3m)$ *матрица с* $\operatorname{rank} \mathbb{C}_{3m} = n \le 3m$ *и компоненты вектора* $\mathcal{F} = (\widehat{A}^{-2}F, \widehat{A}^{-1}F, F)$ *– линейно независимые элементы из* $D(\widehat{A}^3)$. *Тогда:*

(i) B_1 *является самосопряженным оператором, если и только если* $\mathbb{C}_{3m}$ *– эрмитова матрица.*

(ii) B_1 *является корректным оператором, если и только если*

$$\det L_1 = \det\big[I_{3m} - \overline{\langle \widehat{A}^3 \mathcal{F}^t, \mathcal{F}\rangle}_{H^{3m}} \mathbb{C}_{3m}\big] \neq 0. \qquad (6)$$

(iii) *Если* B_1 *корректный оператор, то* $\dim R(B_1 - \widehat{A}^3) = n$.

(iv) *Единственное решение задачи* (5), *где* B_1 *корректный оператор, для каждого* $f \in \mathbb{H}$ *дается с помощью формулы*

$$x = B_1^{-1} f$$
$$= \widehat{A}^{-3} f + \mathcal{F}\mathbb{C}_{3m}\big[I_{3m} - \overline{\langle \widehat{A}^3 \mathcal{F}^t, \mathcal{F}\rangle}_{H^{3m}} \mathbb{C}_{3m}\big]^{-1} \langle f, \mathcal{F}^t\rangle_{H^{3m}}. \qquad (7)$$

Лемма 3.3. *Пусть операторы B, $B_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определены с помощью*

$$Bx = \widehat{A}x - G\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} = f, \quad D(B) = D(\widehat{A}), \tag{8}$$

$$B_3 x = \widehat{A}^3 x - Y\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - S\langle \widehat{A}^2 x, F^t\rangle_{H^m} - G\langle \widehat{A}^3 x, F^t\rangle_{H^m} = f, \tag{9}$$

$$D(B_3) = D(\widehat{A}^3), \tag{10}$$

где $\widehat{A}$ – линейный оператор на $\mathbb{H}$, G – вектор из $D(\widehat{A}^2)^m$, вектора S, G удовлетворяют уравнениям

$$S = \widehat{A}G - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}G\rangle}_{H^m}, \quad Y = \widehat{A}S - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}S\rangle}_{H^m} \tag{11}$$

и компоненты вектора $F = (F_1, \dots, F_m)$ принадлежат $D(\widehat{A}^3)$. Тогда $B_3 = B^3$, т.е. B_3 – кубический оператор.

Доказательство. Из (8), в силу (11), мы получаем

$$BG = \widehat{A}G - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}G\rangle}_{H^m} = S$$

и (12)

$$BS = \widehat{A}S - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}S\rangle}_{H^m} = Y.$$

Из (9) на основании (8) и (12) для каждого $x \in D(\widehat{A}^3) \bigcap D(B^3)$ мы имеем:

$$\begin{aligned} B_3 x &= \widehat{A}^3 x - BS\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - BG\langle \widehat{A}^2 x, F^t\rangle_{H^m} - G\langle \widehat{A}^3 x, F^t\rangle_{H^m} \\ &= B(\widehat{A}^2 x) - BS\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - BG\langle \widehat{A}^2 x, F^t\rangle_{H^m} \\ &= B\big(\widehat{A}^2 x - S\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - G\langle \widehat{A}^2 x, F^t\rangle_{H^m}\big) \\ &= B\big(B(\widehat{A}x) - BG\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m}\big) = B^3 x \end{aligned}$$

Сейчас мы покажем, что $D(B^3) = D(\widehat{A}^3)$. Легко убедиться, что для каждого $x \in D(\widehat{A}^2) \bigcap D(B^2)$ из (8) следует

$$B^2 x = \widehat{A}^2 x - \big[\widehat{A}G - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}G\rangle}_{H^m}\big]\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} - G\langle \widehat{A}^2 x, F^t\rangle_{H^m}. \tag{13}$$

Из $D(B^2) = \{x \in D(\widehat{A}) : \widehat{A}x - G\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} \in D(\widehat{A})\}$ и $G \in D(\widehat{A})$, следует, что $D(B^2) \subseteq D(\widehat{A}^2)$. Из (8) в силу $x \in D(\widehat{A}^2)$ и $G \in D(\widehat{A})$ следует, что $Bx = \widehat{A}x - G\langle \widehat{A}x, F^t\rangle_{H^m} \in D(B)$ и $D(\widehat{A}^2) \subseteq D(B^2)$. Таким образом, $D(\widehat{A}^2) = D(B^2)$. Тогда $D(B^3) = \{x \in D(\widehat{A}^2) : B^2 x \in D(\widehat{A})\}$, которое с $G \in D(\widehat{A}^2)$ и (13) влечет $D(B^3) = D(\widehat{A}^3)$. Следовательно, $B_3 = B^3$. □

Сейчас мы представляем главный результат нашей статьи.

Теорема 3.4. *Пусть операторы $\widehat{A}$, $B_3 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, и векторы G, S, Y определены как в лемме 3.3. Мы предполагаем также, что $\widehat{A}$ – корректный оператор, $G = (\widehat{A}F)C$, где C – $m \times m$ матрица с $\operatorname{rank} C = n \leq m$ и компоненты вектора $\mathcal{F} = (\widehat{A}^{-2}F, \widehat{A}^{-1}F, F)$ (соотв. $\widehat{A}^2\mathcal{F} = (F, \widehat{A}F, \widehat{A}^2F)$) – линейно независимые элементы из $D(\widehat{A}^3)$ (соотв. $D(\widehat{A})$). Тогда:*

(i) *B_3 – самосопряженный оператор, если и только если C – эрмитова матрица.*

(ii) *B_3 – корректный оператор, если и только если выполняется*

$$\det L = \det \left[I_m - \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m} C\right] \neq 0. \tag{14}$$

(iii) *Если B_3 корректный оператор, то $\dim R(B_3 - \widehat{A}^3) = 3n$ $(n \leq m)$.*

(iv) *Единственное решение задачи (9), где B_3 корректный оператор, для каждого $f \in \mathbb{H}$ дается с помощью*

$$\begin{aligned} x = B_3^{-1}f &= \widehat{A}^{-3}f + \big[\widehat{A}^{-2}F + (\widehat{A}^{-1}F)CL^{-1}\overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m} \\ &+ FCL^{-1}\big(\overline{\langle \widehat{A}^{-1}F^t, F\rangle}_{H^m} \\ &+ \overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m} CL^{-1}\overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m}\big)\big]CL^{-1}\langle f, F^t\rangle_{H^m} \\ &+ \big[\widehat{A}^{-1}F + FCL^{-1}\overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m}\big]CL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-1}F^t\rangle_{H^m} \\ &+ FCL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-2}F^t\rangle_{H^m}. \end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство (i), (iii). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &T = \overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m}, \quad D = \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m}, \quad K = \overline{\langle \widehat{A}^2F^t, F\rangle}_{H^m}, \\ &P = \overline{\langle \widehat{A}^3F^t, F\rangle}_{H^m}, \quad H = \overline{\langle \widehat{A}^{-1}F^t, F\rangle}_{H^m}. \end{aligned}$$

Тогда матрица L из (14) представляется в виде $L = I_m - DC$, вектора S, Y в (12) в виде

$$\begin{aligned} S &= (\widehat{A}^2F)C - (\widehat{A}F)CKC, \\ Y &= \widehat{A}S - G(P - KCK)C \\ &= (\widehat{A}^3F)C - (\widehat{A}^2F)CKC - (\widehat{A}F)C(P - KCK)C. \end{aligned}$$

Уравнение (9) в матричных обозначениях переписывается в виде

$$B_3x = \widehat{A}^3x$$
$$- (\widehat{A}F, \widehat{A}^2F, \widehat{A}^3F) \begin{pmatrix} -C(P-KCK)C & -CKC & C \\ -CKC & C & [0]_m \\ C & [0]_m & [0]_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \widehat{A}x, F^t \rangle_{H^m} \\ \langle \widehat{A}^2x, F^t \rangle_{H^m} \\ \langle \widehat{A}^3x, F^t \rangle_{H^m} \end{pmatrix} = f$$

$$\text{или} \quad B_3x = \widehat{A}^3x - (\widehat{A}^3\mathcal{F})\mathbb{C}_{3m}\langle \widehat{A}^3x, \mathcal{F}^t\rangle_{H^{3m}} = f, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{F} = (\widehat{A}^{-2}F, \widehat{A}^{-1}F, F),$$
$$\mathbb{C}_{3m} = \begin{pmatrix} -C(P-KCK)C & -CKC & C \\ -CKC & C & [0]_m \\ C & [0]_m & [0]_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\mathbb{C}_{3m}$ – эрмитова матрица с $\operatorname{rank}\mathbb{C}_{3m} = 3n$, если и только если C – эрмитова с $\operatorname{rank} C = n$. Тогда по теореме 3.2 $\dim R(B_3 - \widehat{A}^3) = 3n$ $(n \le m)$ и оператор B_3 – самосопряженный, если и только если C – эрмитова матрица.

(ii) По теореме 3.2, оператор B_3 корректен, если и только если выполняется условие (6), где вместо B_1 мы имеем B_3, а вместо L_1 имеем L_3. Мы находим

$$L_3 = I_{3m} - \overline{\langle \widehat{A}^3\mathcal{F}^t, \mathcal{F}\rangle}_{H^{3m}}\mathbb{C}_{3m} \tag{17}$$
$$= I_{3m} - \overline{\begin{pmatrix} \langle F^t, \widehat{A}^{-1}F\rangle_{H^m} & \langle F^t, F\rangle_{H^m} & \langle \widehat{A}F^t, F\rangle_{H^m} \\ \langle F^t, F\rangle_{H^m} & \langle \widehat{A}F^t, F\rangle_{H^m} & \langle \widehat{A}^2F^t, F\rangle_{H^m} \\ \langle \widehat{A}F^t, F\rangle_{H^m} & \langle \widehat{A}^2F^t, F\rangle_{H^m} & \langle \widehat{A}^3F^t, F\rangle_{H^m} \end{pmatrix}}\mathbb{C}_{3m}$$
$$= I_{3m} - \begin{pmatrix} H & T & D \\ T & D & K \\ D & K & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C(P-KCK)C & -CKC & C \\ -CKC & C & [0]_m \\ C & [0]_m & [0]_m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_m + HC(P-KCK)C + TCKC - DC & HCKC - TC & -HC \\ TC(P-KCK)C + DCKC - KC & I_m + TCKC - DC & -TC \\ DC(P-KCK)C + KCKC - PC & DCKC - KC & I_m - DC \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det L_3 = \det \begin{pmatrix} L + HCPC & HCKC - TC & -HC \\ TCPC & L + TCKC & -TC \\ -LPC & -LKC & L \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} L & HCKC - TC & -HC \\ [0]_m & L + TCKC & -TC \\ [0]_m & -LKC & L \end{pmatrix}.$$

Умножая элементы третьего столбца на KC и складывая к соответствующим элементам второго столбца, мы получаем

$$\det L_3 = \det \begin{pmatrix} L & -TC & -HC \\ [0]_m & L & -TC \\ [0]_m & [0]_m & L \end{pmatrix} \\ = (\det L)^3 \neq 0 \Leftrightarrow \det L \neq 0. \tag{18}$$

Таким образом, по теореме 3.2, в силу (17) и (18), оператор B_3 корректен, если и только если выполняется (14).

(iv) Пусть $y = B^{-1} f$. Используя (4), мы находим

$$\begin{aligned} B^{-2} f = B^{-1} y &= \widehat{A}^{-1} y + FCL^{-1} \overline{\langle F^t, y\rangle}_{H^m} \\ &= \widehat{A}^{-1}[\widehat{A}^{-1} f + FCL^{-1}\overline{\langle F^t, f\rangle}_{H^m}] \\ &+ FCL^{-1}\overline{\langle F^t, \widehat{A}^{-1} f + FCL^{-1}\overline{\langle F^t, f\rangle}_{H^m}\rangle}_{H^m} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} B^{-2} f = \widehat{A}^{-2} f &+ \big[\widehat{A}^{-1} F + FCL^{-1}\overline{\langle F^t, F\rangle}_{H^m}\big] CL^{-1}\langle f, F^t\rangle_{H^m} \\ &+ FCL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-1} F^t\rangle_{H^m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $g = B^{-2} f$. Тогда в силу (4) и (19) мы находим

$$\begin{aligned} B^{-3} f = B^{-1} g &= \widehat{A}^{-1} g + FCL^{-1}\overline{\langle F^t, g\rangle}_{H^m} \\ &= \widehat{A}^{-1}\big[\widehat{A}^{-2} f + \big(\widehat{A}^{-1} F + FCL^{-1} T\big) CL^{-1}\langle f, F^t\rangle_{H^m} \\ &+ FCL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-1} F^t\rangle_{H^m}\big] + FCL^{-1}\big[\overline{\langle F^t, \widehat{A}^{-2} f\rangle}_{H^m} \\ &+ \big(H + TCL^{-1} T\big) CL^{-1}\langle f, F^t\rangle_{H^m} + TCL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-1} F^t\rangle_{H^m}\big] \\ &= \widehat{A}^{-3} f + \big[\widehat{A}^{-2} F + (\widehat{A}^{-1} F) CL^{-1} T + FCL^{-1}(H + TCL^{-1} T)\big] \\ &\times CL^{-1}\langle f, F^t\rangle_{H^m} + FCL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-2} F^t\rangle_{H^m} \\ &+ \big[\widehat{A}^{-1} F + FCL^{-1} T\big] CL^{-1}\langle f, \widehat{A}^{-1} F^t\rangle_{H^m}, \end{aligned}$$

что дает (15). Таким образом, теорема доказана. □

Замечание 3.5 В приложениях часто мы сталкиваемся с операторами B_1 вида

$$B_1 u = \widehat{A}^3 u - V_{1m}\langle u, J_1^t\rangle_{H^m} - V_{2m}\langle u, J_2^t\rangle_{H^m} - V_{3m}\langle u, J_3^t\rangle_{H^m} = f, \\ D(B_1) = D(\widehat{A}^3), \tag{20}$$

где вектора J_i, $V_{im} \in \mathbb{H}^m$, $i = 1, 2, 3$.

Нас интересует вопрос, когда оператор B_1 является оператором вида B_3, определенным с помощью (9), для того, чтобы применить теорему 3.4. Чтобы выяснить это, действуем следующим образом:

1. показываем, что оператор $\widehat{A}$ из (20) корректен и самосопряжен;

2. находим вектор $F \in D(\widehat{A}^3)^m$ и $m \times m$ матрицы M_i, $i = 1, 2, 3$ с постоянными элементами такие, что $\langle u, J_1^t \rangle_{H^m} = M_1 \langle \widehat{A}u, F^t \rangle_{H^m}$, $\langle u, J_2^t \rangle_{H^m} = M_2 \langle \widehat{A}^2 u, F^t \rangle_{H^m}$ и $\langle u, J_3^t \rangle_{H^m} = M_3 \langle \widehat{A}^3 u, F^t \rangle_{H^m}$;

3. находим вектора $Y = V_{1m} M_1 \in \mathbb{H}^m$, $S = V_{2m} M_2 \in D(\widehat{A})^m$ и $G = V_{3m} M_3 \in D(\widehat{A^2})^m$, удовлетворяющие уравнениям $Y = \widehat{A}S - G\langle F^t, \widehat{A}S \rangle_{H^m}$ и $S = \widehat{A}G - G\langle F^t, \widehat{A}G \rangle_{H^m}$.

Если нарушается хотя бы один из этих шагов, B_1 не является оператором вида B_3, и поэтому наша теория не может быть использована.

4. Примеры

Ниже $H^i(0,1)$ означает пространство Соболева всех комплекснозначных функций из $L_2(0,1)$ с обобщенными производными до i-го порядка, соответственно, интегрируемых по Лебегу, $i = 1, 2, 3, 4$. В нижеприведенных примерах мы использовали *Derive* и *Mathematica* 6 для проведения сложных выкладок и вычисления интегралов.

Мы напоминаем [10, с. 780], что оператор $\widehat{A} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ определенный с помощью

$$\widehat{A}u = iu' = f, \quad D(\widehat{A}) = \{u(t) \in H^1(0,1) : u(0) + u(1) = 0\} \tag{21}$$

является корректным и самосопряженным, и единственное решение u задачи (21) дается с помощью формулы

$$u(t) = \widehat{A}^{-1} f = \frac{i}{2} \int_0^1 f(x)dx - i \int_0^t f(x)dx \quad \text{для всех} \quad f \in H. \tag{22}$$

Легко увидеть [10, с. 781], что оператор $\widehat{A}^2$, определяется с помощью

$$\begin{gathered} \widehat{A}^2 u = -u'' = f, \\ D(\widehat{A}^2) = \{u \in H^2(0,1) : u(0) + u(1) = 0,\ u'(0) + u'(1) = 0\}, \end{gathered} \tag{23}$$

является корректным и самосопряженным и для каждого $f \in L_2(0,1)$ единственное решение u задачи (23) дается формулой

$$u(t) = \widehat{A}^{-2} f = -\int_0^t (t-x) f(x)dx + \frac{1}{4}\int_0^1 (2t-2x+1) f(x)dx. \quad (24)$$

Предложение 4.1. *Пусть оператор $\widehat{A}$ определен с помощью (21). Тогда оператор $\widehat{A}^3 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, определяется с помощью*

$$\begin{aligned} \widehat{A}^3 u &= -iu''' = f, \\ D(\widehat{A}^3) &= \{u \in H^3(0,1) : u(0)+u(1) = 0, \\ &\qquad u'(0)+u'(1) = 0,\ u''(0)+u''(1) = 0\}, \end{aligned} \quad (25)$$

является корректным и самосопряженным и для каждого $f \in L_2(0,1)$ единственное решение задачи (25) дается формулой

$$\begin{aligned} u(t) = \widehat{A}^{-3} f &= \frac{i}{2}\int_0^t (t-x)^2 f(x)dx - \frac{i}{4}(t^2-t)\int_0^1 f(x)dx \\ &- \frac{i}{4}\int_0^1 [2t-(2t+1)x+x^2] f(x)dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Пример 4.2. Оператор $B_1 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, который соответствует задаче

$$\begin{aligned} B_1 u = -iu''' &+ 120c_1[2c_1^2(t^2-t) + ic_1(2t-1) - 1]\int_0^1 (x^2-x)u(x)dx \\ &+ 5c_1[2t-1-2ic_1(t^2-t)]\int_0^1 u''(x)(4x^3-6x^2+1)dx \\ &+ 5c_1(t^2-t)\int_0^1 u'''(x)(4x^3-6x^2+1)dx = f(t), \\ D(B_1) &= D(\widehat{A}^3) \end{aligned} \quad (27)$$

корректен и самосопряжен, если и только если c_1- действительное ненулевое число.

Если B_1 корректный оператор, то единственное решение задачи (27), для каждого $f \in L_2(0,1)$, дается формулой

$$
\begin{aligned}
u(t) = \widehat{A}^{-3}f(t) &+ \frac{5c_1}{12}\left[\frac{1}{10}(2t^5-5t^4+5t^2-1) - \frac{17ic_1}{84}(t^4-2t^3+t)\right.\\
&\left.+\frac{289c_1^2}{7056}(4t^3-6t^2+1)\right]\int\limits_0^1(4x^3-6x^2+1)f(x)dx\\
&-\frac{5c_1}{12}\left[t^4-2t^3+t-\frac{17ic_1}{84}(4t^3-6t^2+1)\right]\int\limits_0^1(x^4-2x^3+x)f(x)dx\\
&+\frac{c_1}{24}(4t^3-6t^2+1)\int\limits_0^1(2x^5-5x^4+5x^2-1)f(x)dx, \qquad (28)
\end{aligned}
$$

где $\widehat{A}^{-3}f(t)$ определяется с помощью (26).

Доказательство. Ниже применим теорему 3.4. Сравнивая уравнение (27) с уравнением (9), естественно взять $\widehat{A}^3u = -iu'''$ с $D(\widehat{A}^3) = D(B_1)$, $m = 1$, $F = 4t^3 - 6t^2 + 1$. Тогда $\widehat{A}$ может быть определено с помощью (21), а $\widehat{A}^2$ с помощью (23). Очевидно, что $F \in D(\widehat{A}^3)$, $\widehat{A}F = 12i(t^2-t)$, $\widehat{A}^2F = -12(2t-1)$, и что

$$\langle \widehat{A}u, F\rangle_H = \int\limits_0^1 iu'(x)(4x^3-6x^2+1)dx,$$

$$\langle \widehat{A}^2u, F\rangle_H = -\int\limits_0^1 u''(x)(4x^3-6x^2+1)dx,$$

$$\langle \widehat{A}^3u, F\rangle_H = \int\limits_0^1 [-iu'''(x)](4x^3-6x^2+1)dx.$$

Интегрированием по частям получаем

$$\langle \widehat{A}u, F\rangle_H = -12i\int\limits_0^1 (x^2-x)u(x)dx.$$

Тогда

$$\int_0^1 (x^2-x)u(x)dx = \frac{i}{12}\langle \widehat{A}u, F\rangle_H,$$

$$\int_0^1 u''(x)(4x^3-6x^2+1)dx = -\langle \widehat{A}^2u, F\rangle_H,$$

$$\int_0^1 u'''(x)(4x^3-6x^2+1)dx = i\langle \widehat{A}^3u, F\rangle_H.$$

Заменяя эти элементы в (27), мы получаем:

$$\begin{aligned} B_1u = \widehat{A}^3u &+ 10ic_1[2c_1^2(t^2-t)+ic_1(2t-1)-1]\langle \widehat{A}u, F\rangle_H \\ &- 5c_1[2t-1-2ic_1(t^2-t)]\langle \widehat{A}^2u, F\rangle_H \\ &+ 5ic_1(t^2-t)\langle \widehat{A}^3u, F\rangle_H = f(t). \end{aligned} \tag{29}$$

Сравнивая (29) с (9), находим $Y = -10ic_1[2c_1^2(t^2-t)+ic_1(2t-1)-1]$, $S = 5c_1[2t-1-2ic_1(t^2-t)]$ и $G = -5ic_1(t^2-t)$. Очевидно, что $G \in D(\widehat{A}^2)$ и $F, \widehat{A}F, \widehat{A}^2F$ – линейно независимые элементы из $D(\widehat{A})$. Используя *Derive*, мы получаем

$$\widehat{A}G - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}G\rangle}_{H^m} = 5c_1(2t-1) - 10ic_1^2(t^2-t) = S$$

и

$$\widehat{A}S - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}S\rangle}_{H^m} = 10c_1[i + c_1(2t-1) - 2ic_1^2(t^2-t)] = Y.$$

Последние два равенства, по лемме 3, показывают, что оператор B_1 – кубический, т.е. $B_1 = B_3$. Из $G = (\widehat{A}F)C$ следует $-5ic_1(t^2-t) = 12i(t^2-t)C$, откуда $C = -5c_1/12$. Вновь применяя *Derive*, мы получаем $\langle F^t, F\rangle_H = 17/35$, $\langle \widehat{A}F^t, F\rangle_H = 0$. По теореме 3.4 оператор B_1 корректен и самосопряжен, если и только если c_1- действительное число и $\det L = \det[I_m - \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m}C] = 1 - 0 = 1 \neq 0$. Следовательно, $L^{-1} = 1$. Таким образом, B_1 корректен и самосопряжен, если и только если c_1- действительное ненулевое число. Если в (22) и (24) возьмем $f = F = 4t^3 - 6t^2 + 1$, мы получим $\widehat{A}^{-1}F = -i(t^4 - 2t^3 + t)$ и $\widehat{A}^{-2}F = -\frac{1}{10}(2t^5 - 5t^4 + 5t^2 - 1)$. Тогда

$$\langle f, \widehat{A}^{-1}F\rangle_H = i\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x)f(x)dx,$$

$$\langle f, \widehat{A}^{-2}F\rangle_H = -\frac{1}{10}\int_0^1 (2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 1)f(x)dx$$

и, применяя программу *Derive*, находим $\langle \widehat{A}^{-1}F, F\rangle_H = 0$. Подставляя найденные значения в (15), мы получаем решение (28) задачи (27). $\square$

Пример 4.3. Оператор $B_1 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, соответствующий задаче

$$\begin{aligned} B_1 u = {} & -iu''' + c_1\pi^2[(1 + 25c_1^2)\cos\pi t + (27 + 75c_1^2)\cos 3\pi t + 5i(\sin\pi t \\ & + 9\sin 3\pi t)]\int_0^1 u'(x)(\sin\pi x + \sin 3\pi x)dx - c_1\pi^2[\sin\pi t + 9\sin 3\pi t \\ & - 5ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)]\int_0^1 u'(x)(\cos\pi x + 3\cos 3\pi x)dx \qquad (30) \\ & - c_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)\int_0^1 u'''(x)(\sin\pi x + \sin 3\pi x)dx = f(t), \end{aligned}$$

$$D(B_1) = D(\widehat{A}^3),$$

корректен и самосопряжен, если и только если c_1- действительное ненулевое число.

Если B_1 корректный оператор, то единственное решение задачи

(30) для любого $f \in L_2(0,1)$ дается формулой

$$u(t) = \widehat{A}^{-3} f(t) + \frac{c_1}{9\pi^3}\Big\{[\sin 3\pi t + 9\sin \pi t + 3ic_1(3\cos \pi t + \cos 3\pi t)$$

$$+ 9c_1^2(\sin \pi t + \sin 3\pi t)] \int_0^1 (\sin \pi x + \sin 3\pi x) f(x)dx + [3\cos \pi t$$

$$+ \cos 3\pi t - 3ic_1(\sin \pi t + \sin 3\pi t)] \int_0^1 (3\cos \pi x + \cos 3\pi x) f(x)dx$$

$$+ (\sin \pi t + \sin 3\pi t) \int_0^1 (9\sin \pi x + \sin 3\pi x) f(x)dx, \tag{31}$$

где $\widehat{A}^{-3} f(t)$ определяется с помощью (26).

Доказательство. Применим теорему 3.4. Сравнивая уравнение (30) с уравнением (9), естественно взять $\widehat{A}^3 u = -iu'''$ с $D(\widehat{A}^3) = D(B_1)$, $m = 1$, $F = \sin \pi t + \sin 3\pi t$. Снова $\widehat{A}$ может быть определено с помощью (21), $\widehat{A}^2$ с помощью (23). Очевидно, что

$$F \in D(\widehat{A}^3), \quad \widehat{A}F = i\pi(\cos \pi t + 3\cos 3\pi t), \widehat{A}^2 F = \pi^2(\sin \pi t + 9\sin 3\pi t),$$

и что

$$\langle \widehat{A}u, F\rangle_H = \int_0^1 iu'(x)(\sin \pi x + \sin 3\pi x)dx,$$

$$\langle \widehat{A}^2 u, F\rangle_H = -\int_0^1 u''(x)(\sin \pi x + \sin 3\pi x)dx$$

$$= \pi \int_0^1 u'(x)(\cos \pi x + 3\cos 3\pi x)dx,$$

$$\langle \widehat{A}^3 u, F\rangle_H = \int_0^1 [-iu'''(x)](\sin \pi x + \sin 3\pi x)dx.$$

Тогда

$$\int_0^1 u'(x)(\sin\pi x + \sin 3\pi x)dx = -i\langle \widehat{A}u, F\rangle_H,$$

$$\int_0^1 u'(x)(\cos\pi x + 3\cos 3\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\langle \widehat{A}^2u, F\rangle_H,$$

$$\int_0^1 u'''(x)(\sin\pi x + \sin 3\pi x)dx = i\langle \widehat{A}^3u, F\rangle_H.$$

Заменяя эти элементы в (30), получаем:

$$\begin{aligned} B_1u = \widehat{A}^3u &- ic_1\pi^2[(1+25c_1^2)\cos\pi t + (27+75c_1^2)\cos 3\pi t \\ &+ \sin\pi t + 9\sin 3\pi t)]\langle \widehat{A}u, F\rangle_H - c_1\pi[\sin\pi t \\ &+ 9\sin 3\pi t - 5ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)]\langle \widehat{A}^2u, F\rangle_H \\ &- ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)\langle \widehat{A}^3u, F\rangle_H = f(t). \end{aligned} \tag{32}$$

Сравнивая (32) с (9), мы имеем

$$\begin{aligned} Y &= ic_1\pi^2[(1+25c_1^2)\cos\pi t + (27+75c_1^2)\cos 3\pi t \\ &\quad + 5ic_1(\sin\pi t + 9\sin 3\pi t)], \\ S &= c_1\pi[\sin\pi t + 9\sin 3\pi t - 5ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)] \end{aligned}$$

и

$$G = ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t).$$

Легко убедиться, что $G \in D(\widehat{A}^2)$ и что $F, \widehat{A}F, \widehat{A}^2F$ линейно независимые элементы из $D(\widehat{A})$, т.к. соответствующий определитель матрицы Грама ненулевой. Мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{A}G - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}G\rangle}_{H^m} &= c_1\pi[\sin\pi t + 9\sin 3\pi t \\ &\quad - 5ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)] = S \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \widehat{A}S - G\overline{\langle F^t, \widehat{A}S\rangle}_{H^m} &= ic_1\pi^2[\cos\pi t + 27\cos 3\pi t + 5ic_1(\sin\pi t + 9\sin 3\pi t)] \\ &\quad - ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)(-25\pi^2c_1^2) = Y. \end{aligned}$$

Последние два равенства, по лемме 3.3, показывают, что оператор B_1 – кубический, т.е. $B_1 = B_3$. Из $G = (\widehat{A}F)C$ следует $ic_1(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t) = i\pi(\cos\pi t + 3\cos 3\pi t)C$, из которого вытекает $C = c_1/\pi$. С помощью *Derive* находим $\langle F^t, F\rangle_H = 1$, $\langle \widehat{A}F^t, F\rangle_H = 0$. По теореме 3.4 оператор B_1 корректен и самосопряжен, если и только если c_1 - действительное число и $\det L = \det[I_m - \overline{\langle \widehat{A}F^t, F\rangle}_{H^m} C] = 1 - 0 = 1 \neq 0$. Следовательно, $L^{-1} = 1$. Таким образом, B_1 корректен и самосопряжен, если и только если c_1- действительное ненулевое число. Если в (22) и (24) возьмем $f = F = \sin\pi t + \sin 3\pi t$, мы получим

$$\widehat{A}^{-1}F = \frac{i}{3\pi}(3\cos\pi t + \cos 3\pi t) \quad \text{и} \quad \widehat{A}^{-2}F = \frac{1}{9\pi^2}(9\sin\pi t + \sin 3\pi t).$$

Тогда

$$\langle f, \widehat{A}^{-1}F\rangle_H = -\frac{i}{3\pi}\int_0^1 (3\cos\pi x + \cos 3\pi x)f(x)dx,$$

$$\langle f, \widehat{A}^{-2}F\rangle_H = \frac{1}{9\pi^2}\int_0^1 (9\sin\pi x + \sin 3\pi x)f(x)dx$$

и мы находим $\langle \widehat{A}^{-1}F, F\rangle_H = 0$. Подставляя найденные значения в (15), мы находим решение (31) задачи (30). □

Первый и третий авторы статьи выражают глубокую скорбь по поводу безвременной кончины от сердечного приступа их друга и сотрудника Цекрекоса Панайота на 64 году жизни этой осенью.

Литература

1. V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *Boundary Value Problems for Operator Differential equations.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
2. E. A. Coddington, *Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators*, — Adv. Math. **14 (1974), 309–332.**
3. М. И. Вишик, *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференцыальных уравнений.* — Труды Московского Мат. общества **1** (1952), 187–246.
4. М. Г. Крейн, *Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения.* — Мат. сборник **20** (1947) No. 3, 431–495.
5. А. А. Дезин, *Нестандартные задачи.* — Матем. заметки **41** (1987) No. 4, 356–363.

6. Б. К. Кокебаев, М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, *К теории сужения и расширения операторов.* — ДАН СССР **271** (1983) No. 6, 1307–1310.
7. А. Н. Кочубей, *Расширения положительно-определенных симметрических операторов.* — ДАН УССР А No. 3 (1979), 168–171.
8. Р. О. Ойнаров, И. Н. Парасиди, *Корректно разрешимые расширения операторов с конечными дефектами в банаховом пространстве.* — Изв. АН Каз.ССР, сер. физ.-мат. No. 5 (1988), 42–46.
9. А. Н. Шыныбеков, *О корректных сужениях и расширениях некоторых дифференциальных операторов.* Автореферат дисс. к.ф.-м.н., Алма-Ата, 1983.
10. I. N. Parasidis, P. C. Tsekrekos, *Correct selfadjoint and positive extensions of nondensely defined symmetric operators.* — Abstract and Applied Analysis, Hindawi Publishing Corporation, **7** (2005), 767–790.

Parasidis I. N., Tsekrekos P. C., Lokkas T. G. Correct and selfadjoint problems with cubic operators.

In this paper we present a simple method to prove correctness and selfadjointness of operators B^3 , corresponding to some boundary problems. We give also the unique solutions for these problems. The algorithm is easy to implement via computer algebra systems. In our examples Derive and Mathematica were used.

Технологический Институт Лариссы, Греция
E-mail: paras@teilar.gr

Поступило 2 октября 2009 г.

Национальный Технологический университет,
Факультет математики Афины, Греция
E-mail: ptsekre@math.ntua.gr
thlokkas@teilar.gr