Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

М. Ю. Калинин

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ И ИСЧЕРПЫВАЮЩИЙ БАЗИСЫ ГРЁБНЕРА КЛАССИЧЕСКОГО ДЕТЕРМИНАНТАЛЬНОГО ИДЕАЛА

1. Основные определения и свойства

Пусть $S = k[\mathbf{x}]$ – кольцо многочленов от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем k.

Нам понадобятся основные определения и свойства из комбинаторной коммутативной алгебры.

Определение 1.1. *Абстрактный симплициальный комплекс на множестве точек* $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ *— набор* Δ *подмножеств* $\sigma \subseteq [n]$ *такой, что из* $\sigma \in \Delta, \tau \subseteq \sigma$ *следует* $\tau \in \Delta$. *Элементы* $\sigma \in \Delta$ *называются гранями комплекса* Δ. *Размерность грани* $\dim \sigma = |\sigma| - 1$. *Размерность комплекса* $\dim \Delta$ *— максимальная из размерностей его граней.*

Мы обозначаем $\overline{\tau} = [n] \setminus \tau$, $\mathbf{x}^\tau = \prod\limits_{x_i \in \tau} x_i$, $\mathfrak{m}^\tau = (x_i \mid x_i \in \tau) \lhd S$.

Определение 1.2. *Идеал Стэнли–Райснера симплициального комплекса* Δ *– мономиальный идеал* $I_\Delta = (\mathbf{x}^\tau \mid \tau \notin \Delta)$.

Теорема 1.3 [8, теорема 1.7]. *Соответствие* $\Delta \mapsto I_\Delta$ *является биекцией между симплициальными комплексами на* n *вершинах и идеалами в* S, *порожденными свободными от квадратов мономами. При этом*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$$

Утверждение 1.4. *Ряд Гильберта идеала Стэнли-Райснера имеет вид*

$$H(t) = \frac{1}{(1-t)^n} \sum_{i=0}^{\dim(\Delta)+1} f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad (1)$$

Ключевые слова : базис Гребнера, универсальный базис Гребнера, детерминантальный идеал, максимальные миноры.

где f_i *– количество граней в* Δ *размерности* i*.*

Следствие 1.5 [1, глава 5]**.** *Размерность идеала Стэнли–Райснера равна* $\dim(I_\Delta) = \dim(\Delta) + 1$*, а степень* $\mathrm{e}\,(I_\Delta)$ *– количеству граней в* Δ *максимальной размерности.*

Доказательство. Проверяется прямым подсчетом коэффициентов в ряде (1). □

Лемма 1.6 [6, лемма 3.1]**.** *Пусть* $I \subseteq J$ *– два однородных идеала, причем все простые идеалы, ассоциированные с* I*, имеют одинаковую размерность. Тогда либо* $\dim(J) < \dim(I)$*, либо* $\mathrm{e}\,(J) < \mathrm{e}\,(I)$*.*

Следствие 1.7 [7, лемма 5.1]**.** *Пусть* $I \subseteq J$ *– мономиальные идеалы такие, что*

(1) $\dim(I) = \dim(J)$*;*

(2) $\mathrm{e}\,(I) = \mathrm{e}\,(J)$*;*

(3) $I = I_\Delta$ *– идеал Стэнли–Райснера;*

(4) *Все максимальные грани* Δ *имеют одинаковую размерность.*

Тогда $I = J$*.*

2. Универсальный базис Грёбнера

Мы рассматриваем матрицу независимых переменных

$$A = (x_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

где $1 \le k \le l$ и кольцо $S = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ многочленов от этих переменных над полем комплексных чисел. Зафиксируем мономиальный порядок и обозначим через in взятие старшего монома относительно этого порядка. Пусть G – множество максимальных миноров A, $J = (G)$ – идеал, порожденный G, $I = (\mathrm{in}\,(G))$ – мономиальный идеал, порожденный старшими мономами максимальных миноров. Поскольку порождающие I свободны от квадратов, $I = I_\Delta$ для некоторого симплициального комплекса Δ. Очевидно,

$$I \subseteq \mathrm{in}\,(J) \subseteq \mathrm{in}\,(\sqrt{J}) \qquad (2)$$

Утверждение 2.1. $\operatorname{codim}(\operatorname{in}(\sqrt{J})) = l - k + 1, \operatorname{e}(\operatorname{in}(\sqrt{J})) = \binom{l}{k-1}$.

Доказательство. Радикальный идеал $\sqrt{J}$ определяет алгебраическое многообразие, состоящее из матриц ранга меньше k (классическое детерминантальное многообразие). Поэтому (см. [12, примеры 12.1 и 19.10])

$$\operatorname{codim}(\sqrt{J}) = l - k + 1, \operatorname{e}(\sqrt{J}) = \binom{l}{k-1}.$$

При переходе к идеалу старших мономов размерность и степень не меняются. □

Определение 2.2. *Назовем диагоналями множества переменных в старших мономах многочленов из* G. *Подмножество* $\tau \in \mathbf{x}$ *назовем плотным, если оно пересекается с каждой диагональю.*

Утверждение 2.3. *Плотные множества – это в точности дополнения до граней* Δ. *Коразмерность идеала* I_Δ *равна минимальной мощности плотного множества.*

Доказательство. $\sigma \in \Delta \iff \mathbf{x}^\sigma \notin I \iff \mathbf{x}^\sigma$ не делится ни на один из образующих $I \iff \sigma \not\supseteq m$ для любой диагонали $m \iff \overline{\sigma} \cap m \neq \varnothing$ для любой диагонали $m \iff \overline{\sigma}$ – плотное множество. Второе утверждение следует из первого и следствия 1.5. □

Утверждение 2.4. $\operatorname{codim}(I) = l - k + 1$.

Доказательство. Из вложения (2) следует, что

$$\dim(I) \geq \dim(\operatorname{in}(\sqrt{J})),$$

т.е. $\operatorname{codim}(I) \leq \operatorname{codim}(\operatorname{in}(\sqrt{J})) = l - k + 1$. С другой стороны, если в каком-то плотном множестве τ меньше $l-k+1$ элементов, то найдутся k столбцов матрицы, не пересекающихся с τ. Диагональ соответствующего минора тоже не будет пересекаться с τ – противоречие. □

Утверждение 2.5. $\operatorname{e}(I) = \binom{l}{k-1}$.

Доказательство. (В этом доказательстве выражение “минимальное плотное множество” употребляется в смысле “минимальное по мощности”.)

Из совпадения размерностей и вложения (2) следует, что

$$\mathrm{e}\,(I) \geq \mathrm{e}\,(\mathrm{in}\,(\sqrt{J})) = \binom{l}{k-1}.$$

Обратное неравенство докажем индукцией по l, используя тот факт, что $\mathrm{e}\,(I)$ – это число граней максимальной размерности, т.е. число минимальных плотных множеств.

База – $l = k$. В этом случае есть только одна диагональ. Ее элементы и составляют одноэлементные плотные множества.

Для перехода рассмотрим два множества:

$$\mathfrak{D} = \{(\tau, x) \mid \tau \text{ – минимальное плотное множество в } A, x \in \tau\}$$

$$\mathfrak{M} = \{(M, \tilde{\tau}) \mid M \text{ – подматрица размера } k \times (l-1), \\ \tilde{\tau} \text{ – минимальное плотное множество в } M\}$$

Определим отображение $\varphi\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{M}$ следующим образом. Пусть элемент x находится в j-м столбце. В качестве M рассмотрим подматрицу, полученную вычеркиванием этого столбца. Т.к. τ плотно, то $\tau \cap M$ плотно в M. Но мощность этого множества по крайней мере на единицу меньше, чем у τ, поэтому оно минимально. Положим $\varphi(\tau, x) = (M, \tau \cap M)$.

Докажем, что φ инъективно. Иными словами, покажем, что в j-м столбце существует не более одного элемента, который можно добавить к $\tilde{\tau}$, чтобы получить плотное множество в исходной матрице A. $|\tilde{\tau}| = l - k$, поэтому в A есть k пустых (не пересекающихся с $\tilde{\tau}$) столбцов. В этих столбцах образуется диагональ матрицы A. Ее пересечение с j-м столбцом — и есть единственный кандидат на добавление.

Поскольку φ инъективно, $|\mathfrak{D}| \leq |\mathfrak{M}|$. Имеем $|\mathfrak{D}| = e(l-k+1)$ (e минимальных плотных подмножеств, в каждом $l-k+1$ элементов), $|\mathfrak{M}| = l\binom{l-1}{k-1}$ (l подматриц, в каждой по предположению индукции $\binom{l-1}{k-1}$ минимальных плотных множеств). Получаем

$$e \leq \frac{l}{l-k+1}\binom{l-1}{k-1} = \frac{l}{l-k+1}\binom{l-1}{l-k} = \binom{l}{l-k+1} = \binom{l}{k-1},$$

что и требовалось. □

Замечание 2.6. Поскольку на самом деле в последней цепочке имеет место равенство, то построенное отображение φ является биекцией. Значит, любое минимальное по размеру плотное множество в подматрице “поднимается” с помощью добавления элемента в вычеркнутый столбец до плотного множества минимального размера во всей матрице, и ровно одним способом.

Утверждение 2.7. *Все минимальные (по включению) плотные множества имеют размер* $l - k + 1$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по l. База $l = k$ очевидна. Для перехода рассмотрим произвольное минимальное плотное множество τ. Выберем в нем элемент x, пусть он находится в j-м столбце. Обозначим через M подматрицу, полученную вычеркиванием j-го столбца. Так как τ плотно в A, то $\tau \cap M$ плотно в M. Оно, вообще говоря, не минимально, но содержит минимальное плотное множество $\tilde{\tau}$, которое по предположению индукции имеет размер $l - k$. Воспользовавшись замечанием 2.6, поднимем это множество до плотного множества размера $l - k + 1$ во всей матрице. Пусть y – элемент j-го столбца, который для этого необходимо добавить.

Эта конструкция проиллюстрирована в следующей таблице:

$*$				x
		$*$		y
	$\circ$	$\circ$		

Элементы множества $\tilde{\tau}$ обозначены символом $*$, остальные элементы пересечения $\tau \cap M$ – символом $\circ$.

Если $y = x$, то получаем, что в τ нашлось плотное подмножество $\tilde{\tau} \cup \{y\}$ размера $l - k + 1$. Однако τ было минимально, поэтому оно совпадает с этим подмножеством, что и требовалось.

Если $y \neq x$, то докажем, что элемент x в множестве τ лишний, что приведет к противоречию с минимальностью τ. Для этого достаточно показать, что любая диагональ, содержащая x, пересекается с $\tilde{\tau}$. Действительно, такая диагональ должна пересекаться с $\tilde{\tau} \cup \{y\}$, т.к. это множество плотно. Но она не может содержать y, т.к. в j-м столбце у нее уже есть элемент x. Значит, эта диагональ пересекается с $\tilde{\tau}$. $\square$

Теорема 2.8. *Множество G является универсальным базисом Грёбнера над полем комплексных чисел.*

Доказательство. Необходимо показать, что для произвольного порядка $I = \operatorname{in}(J)$. Мы докажем более сильное утверждение: $I = \operatorname{in}(\sqrt{J})$. Применим лемму 1.7 к этим двум идеалам. Утверждения 2.4, 2.5 и 2.7 гарантируют выполнение 1-го, 2-го и 4-го условий леммы соответственно. □

Замечание 2.9. Нетрудно видеть, что множество G является автоThere редуцированным. Поэтому G — редуцированный базис Грёбнера относительно любого порядка.

Следствие 2.10. *Множество G является универсальным базисом Грёбнера над любым полем k.*

Доказательство. Для любых $f, g \in G$ S-полином $S(f,g)$ редуцируется к нулю по множеству G (над $\mathbb{C}$). Поскольку старшие коэффициенты многочленов из G равны ± 1, в процессе этой редукции будут возникать только целые коэффициенты. Взяв образ каждого коэффициента в произвольном поле k, получим корректную редукцию $S(f,g)$ к нулю над k. □

Замечание 2.11. Можно рассматривать более общий случай идеалов, порожденных минорами размера $r, 1 \leq r \leq k$. В [3] показано, что эти миноры образуют редуцированный базис Грёбнера относительно любого диагонального порядка (то есть такого порядка, при котором старший моном минора равен произведению переменных на главной диагонали). Однако это множество, вообще говоря, не является универсальным базисом Грёбнера. Например, в случае $k = l = 3, r = 2$ в универсальном базисе лежат биномы вида $x_{11}x_{22}x_{33} - x_{13}x_{21}x_{32}$.

Замечание 2.12. Теорема 2.8 была получена независимо в [4, 5] как побочный результат некоторых комбинаторных утверждений.

3. Исчерпывающий базис Грёбнера

Гипотеза. Множество максимальных миноров является универсальным исчерпывающим базисом Грёбнера для любых подмножеств параметров.

Мы докажем эту гипотезу в определенном частном случае.

Определение 3.1. *Пусть $a_1, \dots, a_m \in k$ – произвольные константы из основного поля k. Тогда существует единственный гомоморфизм*

$$\varphi\colon k[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \to k[x_1, \dots, x_n]$$

такой, что $\varphi(u_i) = a_i$ *для* $i = 1, \dots , m$. *Этот гомоморфизм называется специализацией параметров* $u_1, \dots , u_m$.

Определение 3.2. *Пусть* $\mathcal{G}$ *— набор многочленов в кольце*

$$k[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = k[x_1, \dots , x_n, u_1, \dots , u_m],$$

$<$ *– мономиальный порядок на мономах от* $\mathbf{x}$. *Множество* $\mathcal{G}$ *называется исчерпывающим базисом Грёбнера относительно порядка* $<$ *и набора параметров* $u_1, \dots , u_m$, *если при любой специализации* φ *этих параметров образ* $\varphi(\mathcal{G})$ *является базисом Грёбнера относительно* $<$. *Множество* $\mathcal{G}$ *называется универсальным исчерпывающим базисом Грёбнера относительно набора параметров* $u_1, \dots , u_m$, *если при любой специализации* φ *этих параметров образ* $\varphi(\mathcal{G})$ *является универсальным базисом Грёбнера.*

Введем обозначение $\prec$ для исключающего порядка на мономах от $\mathbf{x}, \mathbf{u}$, при котором мономы сначала сравниваются по переменным $\mathbf{x}$ с помощью $<$, а потом – по параметрам $\mathbf{u}$ с помощью, например, лексикографического порядка.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{G} = \{F_1, \dots , F_s\}$ *– базис Грёбнера относительно* $\prec$. *Пусть* $F, G \in \mathcal{G}$, $\mathrm{lc}_<(F) = f(\mathbf{u})$, $\mathrm{lc}_<(G) = g(\mathbf{u})$, *где старшие коэффициенты берутся в кольце многочленов от* $\mathbf{x}$ *над* $k[\mathbf{u}]$. *Пусть специализация* φ *такова, что* $\varphi(f) \neq 0$, $\varphi(g) \neq 0$. *Тогда* S*-полином* $S(\varphi(F), \varphi(G))$ *имеет стандартное представление относительно* $\varphi(\mathcal{G})$.

Доказательство. Выделим старшие мономы F и G: $F = f(\mathbf{u})t_F + \dots , G = g(\mathbf{u})t_G + \dots$. Пусть $t = \mathrm{lcm}\,(t_F, t_G)$. По определению

$$S(\varphi(F), \varphi(G)) = \frac{t}{t_F}\varphi(g)\varphi(F) - \frac{t}{t_G}\varphi(f)\varphi(G).$$

Имеем $\widehat{S} := \frac{t}{t_F}gF - \frac{t}{t_G}fG \in (\mathcal{G})$, поэтому $\widehat{S}$ имеет стандартное представление $\widehat{S} = \sum_{i=1}^{s} H_iF_i$. Далее, $\mathrm{lt}_{\prec}(H_iF_i) \leq \mathrm{lt}_{\prec}(\widehat{S})$, поэтому (из определения $\prec$) $\mathrm{lt}_<(H_iF_i) \leq \mathrm{lt}_<(\widehat{S}) < t$ (последнее неравенство – по построению $\widehat{S}$). Это значит, что $S(\varphi(F), \varphi(G)) = \varphi(\widehat{S}) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(H_i)\varphi(F_i)$ является стандартным представлением. □

Следствие 3.4. *Если при специализации* φ *ни один из старших коэффициентов не обращается в нуль, то* $\varphi(\mathcal{G})$ *является базисом Грёбнера относительно* $<$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathcal{G}$ *– универсальный базис Грёбнера в кольце* $k[\mathbf{x}]$, *и все элементы* $\mathcal{G}$ *однородны относительно весового вектора* $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$, *где* $d_1, \dots, d_{n-1} \geq 0, d_n > 0$. *Тогда* $\mathcal{G}$ *является универсальным исчерпывающим базисом Грёбнера относительно одноэлементного множества параметров* $\{x_n\}$.

Доказательство. Нужно доказать, что $\varphi(\mathcal{G})$ является универсальным базисом Грёбнера при любой специализации φ. Рассмотрим два случая.

1. $\varphi(x_n) \neq 0$.

Фиксируем произвольный порядок $<$ на мономах от $x_1, \dots, x_{n-1}$ и выделим старший моном многочлена $F \in \mathcal{G}$, как в лемме 3.3: $F = f(x_n)t_F + \dots$ Поскольку F однороден относительно $\mathbf{d}$, и $d_n > 0$, то $f(x_n)$ однороден, т.е. $f(x_n) = cx_n^\alpha$. Очевидно, $\varphi(f) \neq 0$, и мы можем воспользоваться леммой 3.4.

2. $\varphi(x_n) = 0$.

Тогда все элементы $\varphi(\mathcal{G})$ являются однородными относительно весового вектора $\hat{\mathbf{d}} = (d_1, \dots, d_{n-1})$, поэтому достаточно рассматривать только порядки $<$, согласованные с $\hat{\mathbf{d}}$. Снова имеем $F = cx_n^\alpha t_F + \dots$, где $x_n^\alpha t_F$ — максимальный моном относительно веса $(d_1, \dots, d_{n-1}, 0)$. Но все мономы F имеют одинаковый вес относительно $\mathbf{d}$. Значит, $x_n^\alpha t_F$ — максимальный моном относительно разности $(d_1, \dots, d_{n-1}, 0) - \mathbf{d} = (0, \dots, 0, -d_n)$, иначе говоря, имеет минимальную степень по x_n. Если $\alpha > 0$, то F делится на x_n, и $\varphi(F) = 0$. Если же $\alpha = 0$, то $\varphi(cx_n^\alpha) \neq 0$, и мы можем воспользоваться леммой 3.3. □

Мы возвращаемся к случаю матрицы независимых переменных и множества G максимальных миноров в этой матрице. Основное утверждение этого раздела удобно сформулировать на языке теории графов.

Определение 3.6. *Граф набора переменных* $P \subseteq \mathbf{x}$ *— двудольный граф* $\mathcal{G}_P$ *с долями размера* k *и* l, *причем вершина* i *первой доли соединена с вершиной* j *второй доли тогда и только тогда, когда* $x_{ij} \in P$.

Таким образом, ребра графа соответствуют переменным из P, а вершины – строкам и столбцам матрицы.

Теорема 3.7. *Если граф* $\mathcal{G}_P$ *ациклический, то множество* G *максимальных миноров является универсальным исчерпывающим базисом*

Грёбнера относительно набора параметров P.

Доказательство. Введем весовые векторы (в данном случае весовые матрицы) $\mathbf{r}^{(1)}, \dots , \mathbf{r}^{(k)}$ с координатами $\mathbf{r}^{(a)}_{ij} = \delta^a_i$ (то есть единицы в одной строке и нули в остальных). Аналогичные векторы введем для каждого из столбцов. Таким образом каждой вершине $v \in V(\mathcal{G}_P)$ будет сопоставлен весовой вектор, обозначим его $\mathbf{d}_v$. Нетрудно видеть, что максимальные миноры однородны относительно всех векторов $\mathbf{d}_v$ и, следовательно, относительно их линейных комбинаций. Доказательство, использующее лемму 3.5, будет основано на том факте, что этих векторов "достаточно много".

Построим последовательность ребер $x_{i_1j_1}, \dots , x_{i_ej_e} \in E(\mathcal{G}_P)$ следующим образом. Первое ребро выберем произвольно. Если в его компоненте связности есть еще вершины, то в качестве следующего ребра выберем одно из соседних с первым. Таким образом будем наращивать текущую компоненту связности, каждый раз добавляя одно ребро и одну вершину. Когда эта компонента связности будет исчерпана, перейдем к следующей, и т.д., пока не придем к графу $\mathcal{G}_P$. Подграф, полученный на s-м шаге, обозначим $\mathcal{G}_s$, при этом $\mathcal{G}_e = \mathcal{G}_P$.

Положим $\mathbf{d}^{(s)} = \sum\limits_{v \notin \mathcal{G}_s} \mathbf{d}_v$. Очевидно, что $\mathbf{d}^{(s)}_{i_rj_r} > 0 \iff$ одна из вершин ребра $x_{i_rj_r}$ не принадлежит $\mathcal{G}_s$. Множество многочленов, полученное из G произвольной специализацией переменных $x_{i_1j_1}, \dots , x_{i_sj_s}$, обозначим G_s. Заметим, что при $v \notin V(\mathcal{G}_s)$ система G_s однородна относительно вектора $\mathbf{d}_v$. (Действительно, если в некотором столбце или строке не специализирована ни одна переменная, то многочлены однородны относительно суммарной степени по этой строке или столбцу.) Следовательно, многочлены в G_s однородны относительно $\mathbf{d}^{(s)}$. По построению последовательности ребер одна из вершин ребра $x_{i_{s+1}j_{s+1}}$ не принадлежит графу $\mathcal{G}_s$, поэтому $\mathbf{d}^{(s)}_{i_{s+1}j_{s+1}} > 0$. Теперь осталось воспользоваться леммой 3.5 и индукцией по s, чтобы показать, что при любой специализации переменных множество G_s является универсальным базисом Грёбнера. □

Литература

1. W. Bruns, J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
2. W. Bruns, U. Vetter, *Determinantal Rings.* Springer LNM 1327, 1988.
3. B. Sturmfels, *Gröbner bases and Stanley decompositions of determinantal rings.* — Mathematische Zeitschrift **205** (1990), 137–144.

4. B. Sturmfels, A. Zelevinsky, *Maximal minors and their leading terms.* — Adv. Math. **98** (1993), 65–112.
5. D. Berstein, A. Zelevinsky, *Combinatorics of maximal minors.* — J. Algebraic Combinatorics **2** (1993), 111–121.
6. M. Domokos, *Gröbner bases of certain determinantal ideals.* — Contrib. Algebra Geometry, **40** (1999), No. 2, 479–493.
7. J. Jonsson, V. Welker, *A spherical initial ideal for pfaffians*, `arXiv:math/0601335v2`.
8. E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, vol. **227**, Springer-Verlag, New York, 2004.
9. V. Weispfenning, *Comprehensive Gröbner bases.* — J. Symb. Computat. **14** (1) (1992), 1–30.
10. V. Weispfenning, *Constructing universal Gröbner bases.* — Appl. Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes (L. Huguet, ed.), **356** (1987), Proc. AAECC-5, 408–417.
11. D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms.* Springer-Verlag, 1991 (second corrected edition, 1998).
12. J. Harris, *Algebraic Geometry. A First Course.* Springer-Verlag, New York, 1992.

Kalinin M. Universal and comprehensive Gröbner bases of the classical determinantal ideal.

Let $A = (x_{ij}), i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, l, 1 \le k \le l$ be a matrix of independent variables, G the set of maximal minors of A, $I = (G)$ the classical determinantal ideal. We show that G is a universal Gröbner basis of I. Also a sufficient condition of G being a universal comprehensive Gröbner basis is proven.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: kalinin.maxim@gmail.com

Поступило 11 сентября 2009 г.