Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

Е. Е. Горячко

ПРОСТОТА ВЕТВЛЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $\mathrm{GL}(n,q)$ ПРИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Введение

Настоящая работа является обобщением статьи [3], где рассматриваемая задача была решена в частном случае, и одновременно упрощением работы [4], в которой А. Айзенбуд и Д. Гуревич, в частности, доказали данный факт в более сложном и общем контексте.

Напомним вкратце формулировку и мотивацию задачи.

Пусть n – целое неотрицательное, а q – примарное число; рассмотрим полную линейную группу $\mathrm{GL}(n,q)$ степени n над полем $\mathbb{F}_q$ и *параболическое вложение* $e_n\colon \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,q)] \to \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n+1,q)]$ между комплексными групповыми алгебрами групп $\mathrm{GL}(n,q)$ и $\mathrm{GL}(n+1,q)$, действующее на элементах группы $\mathrm{GL}(n,q)$ следующим образом:

$$e_n\colon h \longmapsto \frac{1}{q^n} \sum_{u\in(\mathbb{F}_q)^n} \begin{pmatrix} h & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что e_n – мономорфизм алгебр, не сохраняющий единицу, если $n \neq 0$. Пусть π – комплексное представление группы $\mathrm{GL}(n+1,q)$; тогда, обозначая через V образ (возможно, неединичного) идемпотента $\pi(e_n(\mathrm{id}))$ и замечая, что пространство V инвариантно относительно всех операторов $\pi(e_n(h))$, $h \in \mathrm{GL}(n,q)$, мы можем корректно определить *параболическое ограничение* $r_{n+1}(\pi)$ представления π на группу $\mathrm{GL}(n,q)$ по формуле $r_{n+1}(\pi)(h) = \pi(e_n(h))|_{V\to V}$.

В этой работе мы даем прямое доказательство *простоты ветвления представлений групп* $\mathrm{GL}(n,q)$ *при параболических ограничениях.* Это утверждение означает, что для любого неприводимого представления π группы $\mathrm{GL}(n+1,q)$ разложение представления $r_{n+1}(\pi)$ на неприводимые компоненты свободно от кратностей.

Ключевые слова : представления групп $\mathrm{GL}(n,q)$, простота ветвления, параболические ограничения, пары Гельфанда, лемма о произведении кратностей.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-2460.2008.1, а также грантов РФФИ 08-01-00379-а и РФФИ 09-01-12175-офи_м .

Вопрос о прямом доказательстве этого утверждения впервые был поставлен А. М. Вершиком. В случае основной серии представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ такое доказательство найдено в работе [3].

Отметим, что сформулированное утверждение следует из значительно более сильной теоремы о полной классификации неприводимых представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ (см., например, [7, §13]). Тем не менее, возможность доказать это утверждение априори (т. е. без построения общей теории представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$) может быть интересна как в методическом плане, так и в связи с другими аспектами этой теории, два из которых кратко изложены ниже.

Единый подход к теории представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ и S_n, развитый в книге [7], показывает, что простота ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при параболических ограничениях является правильным обобщением („q-аналогом") простоты ветвления представлений групп S_n при тривиальных ограничениях; для групп S_n данный факт доказывается просто и позволяет развить индуктивный подход к теории представлений этих групп (см. [2]). Помимо того, параболическое ограничение представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ естественно возникает в теории представлений бесконечномерной группы $\mathrm{GLB}(q)$, являющейся аналогом бесконечной симметрической группы; при этом простота ветвления означает отсутствие кратных ребер в диаграмме Браттели групповой алгебры Брюа–Шварца группы $\mathrm{GLB}(q)$ (см. [1, 6]).

Наша статья состоит из трех разделов, в первых двух из которых мы получаем общий критерий простоты ветвления при U-ограничениях (к ним относятся и параболические ограничения), а в последнем мы проверяем полученный критерий для групп $\mathrm{GL}(n,q)$.

В теоретико-представленческой части работы используются, в основном, методы статьи [4]. Сначала, применяя идею И. Н. Бернштейна, которую рассказал нам А. М. Вершик, мы сводим нашу задачу к утверждению о том, что некоторая пара конечных групп (G,U) – пара Гельфанда (теорема 1 и следствие). Для проверки этого свойства имеется классический критерий Гельфанда (инвариантность относительно некоторого антиавтоморфизма двойных классов смежности группы G по подгруппе U), но в нашей ситуации необходима обобщенная версия данного критерия, идея которой восходит к статье [5], а доказательство следует из леммы о произведении кратностей (теорема 2 и следствие). В матричной части работы ключевым фактом является теорема 3, уточняющая известное утверждение о том, что каждая матрица сопряжена со своей транспонированной.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи, множество ценных указаний и постоянное внимание к ходу работы над ней, а также А. Айзенбуду и Д. Гуревичу за интерес, проявленный к данной задаче, и полезные обсуждения.

1. U-ограничения и пары Гельфанда

Пусть G – конечная группа, H и U – ее подгруппы, причем H нормализует U и $H \cap U = \{1\}$ (это равносильно тому, что $HU \cong H \leftthreetimes U$). Тогда мы можем определить следующее понятие.

Определение. *U-вложение* e_U *групповой алгебры* $\mathbb{C}[H]$ *группы* H *в групповую алгебру* $\mathbb{C}[G]$ *группы* G *есть линейное отображение, заданное на элементах группы* H *по формуле* $\mathrm{e}_U(h) = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U} hu$.

Пусть n – целое неотрицательное число, а K – поле. Обозначим группу $\mathrm{GL}(n,K)$ через G_n, подгруппу $\{\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{id} & u\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid u \in K^n\} \leqslant G_{n+1}$ – через U_n и отождествим подгруппу $\{\left(\begin{smallmatrix}h & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \mid h \in G_n\} \leqslant G_{n+1}$ с группой G_n; ясно, что тогда G_n нормализует U_n и $G_n \cap U_n = \{\mathrm{id}\}$.

Если $K = \mathbb{F}_q$ – конечное поле, то U_n-вложение e_{U_n} есть в точности параболическое вложение $e_n\colon \mathbb{C}[G_n] \to \mathbb{C}[G_{n+1}]$.

Как и в случае групп $\mathrm{GL}(n,q)$ рассматривая для любого комплексного представления π конечной группы G пространство $\operatorname{Im}\pi(\mathrm{e}_U(1))$, мы можем корректно определить следующий объект.

Определение. *U-ограничение* $\mathrm{res}^G_{H,U}\pi$ *представления* π *группы* G *на подгруппу* H *есть представление группы* H, *заданное по формуле* $\mathrm{res}^G_{H,U}\pi(h) = \pi(\mathrm{e}_U(h))|_{\operatorname{Im}\pi(\mathrm{e}_U(1))\to\operatorname{Im}\pi(\mathrm{e}_U(1))}$ *для всех* $h \in H$.

Если $G = G_{n+1}$, $H = G_n$ и $U = U_n$ (над полем $\mathbb{F}_q$), то U-ограничение $\mathrm{res}^G_{H,U}$ есть параболическое ограничение r_{n+1}. Если группы G и H произвольны, а $U = \{1\}$, то U-ограничение $\mathrm{res}^G_{H,U}$ есть в точности тривиальное ограничение res^G_H представлений с G на H.

Легко проверить, что обозначая характер представления π через χ_π, мы можем вычислить характер его U-ограничения по формуле $\chi_{\mathrm{res}^G_{H,U}\pi}(h) = \frac{1}{|U|}\sum_{u\in U}\chi_\pi(hu)$ для всякого $h \in H$.

Далее, рассматривая группу $G \times H$, ее “диагональную” подгруппу $\Delta(HU \times H) = \{(hu,h) \mid h \in H,\ u \in U\}$ и представление $\mathrm{ind}^{G\times H}_{\Delta(HU\times H)}1$, индуцированное ее единичным представлением, и обозначая через $\widehat{G}$ спектр группы G (множество классов изоморфизма ее неприводимых представлений), мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм представлений группы $G\times H$*

$$\operatorname{ind}_{\Delta(HU\times H)}^{G\times H}1\cong\bigoplus\nolimits_{\pi\in\widehat{G}}\pi^*\otimes\operatorname{res}_{H,U}^{G}\pi.$$

Доказательство. Пусть $\pi\in\widehat{G}$, а $\rho\in\widehat{H}$; найдем кратность вхождения представления $\pi^*\otimes\rho\in\widehat{G\times H}$ в $\operatorname{ind}_{\Delta(HU\times H)}^{G\times H}1$. По теореме о двойственности Фробениуса, она равна кратности вхождения единичного представления в ограничение представления $\pi^*\otimes\rho$ на $\Delta(HU\times H)$; последняя кратность равна $\frac{1}{|H||U|}\sum_{h\in H,u\in U}\chi_{\pi^*\otimes\rho}(hu,h)$, что совпадает с $\frac{1}{|H||U|}\sum_{h\in H,u\in U}\chi_\rho(h)\overline{\chi_\pi(hu)}$; а эта величина, в силу формулы для характера U-ограничения, равна $\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi_\rho(h)\overline{\chi_{\operatorname{res}_{H,U}^{G}\pi}(h)}$. Полученное выражение равно кратности вхождения представления ρ в U-ограничение $\operatorname{res}_{H,U}^{G}\pi$, что нам и требуется доказать. $\square$

Из доказанной теоремы получается следующий критерий простоты ветвления представлений группы G при ограничении на H.

Следствие. *Простота ветвления представлений конечной группы G при U-ограничении на подгруппу H эквивалентна тому, что пара групп $(G\times H,\Delta(HU\times H))$ есть пара Гельфанда.*

Доказательство. Из полученного в теореме разложения представления $\operatorname{ind}_{\Delta(HU\times H)}^{G\times H}1$ следует, что простота его спектра (т. е. тот факт, что $(G\times H,\Delta(HU\times H))$ – пара Гельфанда) эквивалентна тому, что все представления $\operatorname{res}_{H,U}^{G}\pi$, $\pi\in\widehat{G}$, имеют простой спектр, что и означает простоту ветвления представлений при U-ограничении. $\square$

2. Лемма о произведении кратностей и критерий простоты ветвления

Далее мы получим обобщенный критерий для проверки того, что пара конечных групп (G,U) есть пара Гельфанда; для этого сначала мы докажем следующую простую, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть представления π_1 и π_2 группы G действуют в пространствах V_1 и V_2 соотв.; тогда следующие условия равносильны:*

(1) *для всякого $\sigma\in\widehat{G}$ произведение кратностей вхождения представления σ в представления π_1 и π_2 не превосходит 1;*

(2) *для всяких операторов* $a, b \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, *сплетающих представления* π_1 *и* π_2, *выполнено:* $\mathrm{Ker}\, a = \mathrm{Ker}\, b \iff \mathrm{Im}\, a = \mathrm{Im}\, b$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $S \subseteq \widehat{G}$ есть множество общих неприводимых компонент представлений π_1 и π_2. Ясно, что условие (1) означает, что для любого $\sigma \in S$ кратности вхождения представления σ в π_1 и π_2 равны 1; отсюда ядро и образ любого оператора из V_1 в V_2, сплетающего представления π_1 и π_2, однозначно определяются двумя подмножествами множества S, образующими его разбиение, и поэтому ядро и образ однозначно определяют друг друга.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $\sigma \in \widehat{G}$ и x, y суть операторы, сплетающие представления π_1 и σ, σ и π_2 соответственно, тогда $a = y \circ x$ – оператор, сплетающий представления π_1 и π_2. При этом, в силу неприводимости представления σ, если $y \neq 0$, то $\mathrm{Ker}\, a = \mathrm{Ker}\, x$, и, аналогично, если $x \neq 0$, то $\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Im}\, y$. Далее, если кратность вхождения σ в π_1 не равна 0, то x можно выбрать ненулевым, тогда для всех ненулевых y ядра операторов $y \circ x$ совпадают (они равны $\mathrm{Ker}\, x$), поэтому, в силу условия (2), их образы тоже совпадают и, значит, кратность вхождения σ в π_2 не больше 1. Аналогично, если кратность вхождения σ в π_2 не равна 0, то кратность его вхождения в π_1 не больше 1. $\square$

Теперь, используя лемму, для любой конечной группы G и ее подгруппы U мы докажем следующую теорему и следствие.

Теорема 2. *Пусть у группы* G *имеется автоморфизм* θ, *удовлетворяющий следующим требованиям:*

(1) $\mathrm{ind}_U^G 1 \cong \mathrm{ind}_{\theta(U)}^G 1$;

(2) $(\theta^{-1}(g_1)\theta(g_2))^{-1} \in \theta(U) g_1 g_2 U$ *для всех* $g_1, g_2 \in G$.

Тогда пара (G, U) *есть пара Гельфанда.*

Доказательство. Представления $\mathrm{ind}_{\theta(U)}^G 1$ и $\mathrm{ind}_U^G 1$ суть продолжения по линейности действий группы G левыми сдвигами на множествах $G/\theta(U)$ и G/U. Рассмотрим их как базисы пространств функций $\mathbb{C}^{G/\theta(U)}$ и $C^{G/U}$; тогда форма, заданная на этих базисах по формуле $(g_1\theta(U), g_2 U) = \delta_{\theta^{-1}(g_1)U,\, g_2 U}$, $g_1, g_2 \in G$, определяет невырожденную двойственность между этими пространствами. Легко проверить, что отождествляя сплетающие операторы между $\mathrm{ind}_{\theta(U)}^G 1$ и $\mathrm{ind}_U^G 1$ и распределения на G, постоянные на двойных классах смежности группы G по $\theta(U)$ и U, мы получаем, что условие (2) означает, что каждый сплетающий оператор a самосопряжен относительно введенной формы в том смысле, что $(f_1, af_2) = (f_2, af_1)$ для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{C}^{G/\theta(U)}$.

Ядро и образ самосопряженного оператора суть ортогональные дополнения друг друга, поэтому мы можем применить лемму 1.

Из леммы 1 следует, что для всякого $\sigma \in \widehat{G}$ произведение кратностей вхождения σ в $\mathrm{ind}_{\theta(U)}^G 1$ и $\mathrm{ind}_U^G 1$ не превосходит 1; согласно условию (1), это произведение равно квадрату кратности вхождения σ в $\mathrm{ind}_U^G 1$ и, таким образом, представление $\mathrm{ind}_U^G 1$ имеет простой спектр, что и означает тот факт, что пара (G,U) – пара Гельфанда. □

Следствие. *Пусть инволютивный автоморфизм θ группы G обладает следующими свойствами:*

(1) *любой $g \in G$ сопряжен с $\theta(g)^{-1}$;*

(2) *$\theta(g)^{-1} \in \theta(U)gU$ для всех $g \in G$.*

Тогда пара (G,U) есть пара Гельфанда.

Доказательство. Очевидно, что условие (1) следствия влечет, что $\mathrm{ind}_{\theta(U)}^G 1 \cong \theta^{-1}(\mathrm{ind}_U^G 1) \cong (\mathrm{ind}_U^G 1)^*$. В силу вещественности характера представления $\mathrm{ind}_U^G 1$, мы получаем, что $(\mathrm{ind}_U^G 1)^* \cong \mathrm{ind}_U^G 1$, поэтому в итоге мы имеем условие (1) теоремы 2. Ее условие (2) получается из условия (2) следствия с учетом того, что $\theta^{-1} = \theta$. □

Заметим, что если $\theta(U) = U$, то отказываясь от требования инволютивности автоморфизма θ и условия (1) следствия, мы получаем в точности классический критерий Гельфанда.

Пусть снова G – конечная группа, H и U – ее подгруппы, причем H нормализует U и $H \cap U = \{1\}$; тогда имеется следующий критерий простоты ветвления представлений при U-ограничении.

Критерий простоты ветвления при U-ограничениях. *Пусть у группы G имеется инволютивный автоморфизм θ, который сохраняет подгруппу H, а также обладает следующими свойствами:*

(1) *любой $g \in G$ сопряжен с $\theta(g)^{-1}$, причем для всякого $h \in H$ это сопряжение можно осуществить при помощи элемента группы H;*

(2) *для любого $g \in G$ найдется $h \in H$, что $\theta(g)^{-1} \in h\theta(U)gUh^{-1}$.*

Тогда имеет место простота ветвления представлений группы G при U-ограничении на подгруппу H.

Доказательство. У группы $G \times H$ имеется инволютивный автоморфизм $\theta \times \theta|_{H\to H}$; условие (1) в точности означает, что он удовлетворяет условию (1) следствия из теоремы 2. Легко проверить, что условие (2) означает выполнение условия (2) этого следствия для подгруппы $\Delta(HU \times H)$ группы $G \times H$. Итак, пара $(G \times H, \Delta(HU \times H))$ есть пара

Гельфанда и, значит, по следствию из теоремы 1, имеет место простота ветвления представлений группы G при U-ограничении. □

Отметим, что на множестве $\theta(U)\backslash G/U$ двойных классов смежности группы G по $\theta(U)$ и U можно определить операцию $C \mapsto \theta(C)^{-1}$ и сопряжение $C \mapsto hCh^{-1}$ элементами подгруппы H. Тогда условие (2) доказанного критерия означает, что всякий класс $C \in \theta(U)\backslash G/U$ сопряжен с $\theta(C)^{-1}$ при помощи элемента подгруппы H.

3. Доказательство простоты ветвления

Теперь мы можем применить полученный критерий к доказательству простоты ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при параболических ограничениях. Ключевую роль в этом доказательстве играет следующая матричная теорема, которую, используя обозначения, введенные в разделе 1, мы докажем для любого поля K.

Теорема 3. *Для любой матрицы $g \in \mathrm{Mat}(n,K)$ найдется такая матрица $h \in G_n$, что $g^{\mathrm{T}} = hgh^{-1}$ и $h = h^{\mathrm{T}}$. При этом, если $\mathrm{rk}\, g = n-1$, то для всяких таких $x, y \in K^n$, что $x \notin \mathrm{Im}\, g$ и $y \notin \mathrm{Im}\, g^{\mathrm{T}}$, матрицу h можно выбрать так, что $hx - y \in \mathrm{Im}\, g^{\mathrm{T}}$.*

Доказательство. Мы можем считать, что матрица g приведена к фробениусовой нормальной форме, так как если матрица h_0 приводит ее к данной форме, а матрица h решает задачу для приведенной матрицы, то матрица $h_0^{\mathrm{T}} h h_0$ решает задачу для исходной матрицы g. Очевидно, что если мы ищем матрицу h без дополнительного условия, связанного с векторами x и y, то нам достаточно найти нужные матрицы для всех фробениусовых клеток матрицы g.

Если $\mathrm{rk}\, g = n-1$ и у нас есть это дополнительное условие, то ясно, что нормальная форма матрицы g имеет ровно одну необратимую клетку g_1. При этом проекции x_1 и y_1 векторов x и y на отвечающее этой клетке инвариантное подпространство не лежат в $\mathrm{Im}\, g_1$ и $\mathrm{Im}\, g_1^{\mathrm{T}}$ соответственно; в силу обратимости остальных клеток $g_2, \ldots, g_r$, никаких условий на проекции векторов x и y на отвечающие им инвариантные подпространства не возникает. Отсюда следует, что, как и выше, нам достаточно найти нужные матрицы для всех фробениусовых клеток матрицы g. Тогда, выбирая матрицы $h_1, \ldots, h_r$ так, что $g_i^{\mathrm{T}} = h_i g_i h_i^{-1}$ и $h_i = h_i^{\mathrm{T}}$ для всех $i \in \{1, \ldots, r\}$ и $h_1 x_1 - y_1 \in \mathrm{Im}\, g_1^{\mathrm{T}}$, в качестве искомой матрицы можно взять их прямую сумму.

Итак, считая, что g есть фробениусова клетка (т. е. сопровождающая матрица некоторого многочлена) и заменяя h на h^{-1}, мы должны найти $h \in G_n$ так, что $gh = (gh)^{\mathrm{T}}$, $h = h^{\mathrm{T}}$ и, если $g \notin G_n$ и даны такие $x, y \in K^n$, что $x \notin \operatorname{Im} g$ и $y \notin \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}$, то $hy - x \in \operatorname{Im} g$.

Пусть g – сопровождающая матрица многочлена $\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + t^n$; тогда ее элементы таковы: $g_{ij} = \delta_{i-1,j}$ и $g_{in} = -c_{i-1}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq n$. Матрица h будет найдена в еще более специальном, чем симметричный, виде: $h_{ij} = d_{i+j-1}$, если $i + j \leqslant n + 1$, и $h_{ij} = 0$, если $i + j \geqslant n + 2$. Легко проверить, что для таких матриц условия $h \in G_n$ и $gh = (gh)^{\mathrm{T}}$ равносильны тому, что $d_n \neq 0$ и $d_i = c_i d_n$ для всяких $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, из чего мы получаем первое утверждение.

Если $g \notin G_n$, то $\operatorname{Im} g$ состоит из векторов с нулевой первой координатой, а $\operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}$ – из таких векторов $y \in K^n$, что определитель, составленный из y и ненулевых столбцов матрицы g^{T}, равен 0. Легко проверить, что указанный определитель есть $\sum_{i=1}^{n-1} y_i c_i + y_n$; далее, условие $hy - x \in \operatorname{Im} g$ означает, что $\sum_{i=1}^{n} y_i d_i - x_1 = 0$; в силу полученной выше формулы для $d_1, \ldots, d_{n-1}$, это эквивалентно тому, что $\bigl(\sum_{i=1}^{n-1} y_i c_i + y_n\bigr) d_n = x_1$. Данное уравнение (относительно d_n) имеет ненулевое решение ровно потому, что $x \notin \operatorname{Im} g$ и $y \notin \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}$. $\square$

Далее, рассматривая (по-прежнему для любого поля K) автоморфизм $\theta\colon g \mapsto (g^{\mathrm{T}})^{-1}$ группы $G = G_{n+1}$, мы опишем множество двойных классов смежности $\theta(U)\backslash G/U = U_n^{\mathrm{T}}\backslash G_{n+1}/U_n$ и действие сопряжением на этом множестве подгруппы $H = G_n \leqslant G_{n+1}$.

Лемма 2. *Отображение между множествами $U_n^{\mathrm{T}}\backslash G_{n+1}/U_n$ и $A \cup B$, $A = G_n \times K^{\times}$, $B = \{(g, x + \operatorname{Im} g, y + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}) \mid g \in \operatorname{Mat}(n, K),\ \operatorname{rk} g = n-1$, $x, y \in K^n$, $x \notin \operatorname{Im} g$, $y \notin \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}\}$, действующее по следующему правилу, определено корректно и является биекцией:*

$$U_n^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right) U_n \mapsto \begin{cases} \bigl(g, \det\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right)\bigr), & \text{если } g \in G_n, \\ \bigl(g, u + \operatorname{Im} g, a^{\mathrm{T}} + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}\bigr), & \text{если } g \notin G_n. \end{cases}$$

Действие каждого элемента $h \in G_n$ сопряжением на множестве $U_n^{\mathrm{T}}\backslash G_{n+1}/U_n$ переходит при описанной биекции в действие $(g, \varepsilon) \mapsto (hgh^{-1}, \varepsilon)$ на множестве A и в действие $(g, x + \operatorname{Im} g, y + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}) \mapsto (hgh^{-1}, hx + \operatorname{Im} hg, (h^{\mathrm{T}})^{-1} y + \operatorname{Im} (gh^{-1})^{\mathrm{T}})$ на множестве B.

Доказательство. Найдем общий вид элемента $\widetilde{f} = \left(\begin{smallmatrix} \widetilde{g} & \widetilde{u} \\ \widetilde{a} & \widetilde{\delta} \end{smallmatrix}\right)$ двойного класса смежности $C = U_n^{\mathrm{T}} \left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right) U_n \in U_n^{\mathrm{T}}\backslash G_{n+1}/U_n$:

$$\widetilde{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & u \\ a & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & gv + u \\ bg + a & bgv + av + bu + \delta \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует корректность задания описанного отображения.

Проверим биективность указанного отображения: если $g \in G_n$, то векторы $v \in K^n$ и $b \in {}^nK$ определяются однозначно: $v = g^{-1}(\widetilde{u} - u)$, $b = (\widetilde{a} - a)g^{-1}$; подстановка этих v, b в равенство $bgv + av + bu + \delta = \widetilde{\delta}$ приводит к условию $\delta - ag^{-1}u = \widetilde{\delta} - \widetilde{a}g^{-1}\widetilde{u}$. Раскладывая определитель и возникающие миноры по последним столбцу и строке, можно проверить, что $(\delta - ag^{-1}u)\det g = \det\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right)$. Отсюда следует, что полученное условие равносильно совпадению определителей и, значит, пара $\bigl(g, \det\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right)\bigr)$ – полный инвариант класса C. Если же $g \notin G_n$, то выражения $v_0 + v$ и $b_0 + b$, где $v \in \operatorname{Ker} g$ и $b^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Ker} g^{\mathrm{T}}$, а v_0 и b_0 суть частные решения уравнений $gv + u = \widetilde{u}$ и $bg + a = \widetilde{a}$ соответственно, задают общие решения данных уравнений; в силу того, что $a\operatorname{Ker} g = u^{\mathrm{T}}\operatorname{Ker} g^{\mathrm{T}} = K$, выражение $(b_0 + b)g(v_0 + v) + a(v_0 + v) + (b_0 + b)u + \delta$ может принимать произвольное значение в поле K и, значит, тройка $\bigl(g, u + \operatorname{Im} g, a^{\mathrm{T}} + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}\bigr)$ – также полный инвариант класса C. Далее, если $g \in G_n$, то для произвольной пары $(g, \varepsilon) \in A$, пользуясь формулой $(\delta - ag^{-1}u)\det g = \det\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right)$, можно подобрать такие u, a и δ, что $\det\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right) = \varepsilon$; если же $g \notin G_n$ и дана тройка $(g, x + \operatorname{Im} g, y + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}) \in B$, то легко проверить, что любая матрица $\left(\begin{smallmatrix} g & x \\ y^{\mathrm{T}} & \delta \end{smallmatrix}\right)$, где $\delta \in K$, обратима. В итоге наше отображение и инъективно, и сюръективно.

Сопрягая матрицу $\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right) \in G_{n+1}$ с помощью матрицы $\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G_n$: $\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} g & u \\ a & \delta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} hgh^{-1} & hu \\ ah^{-1} & \delta \end{smallmatrix}\right)$, и замечая, что $\operatorname{Im} hg = \operatorname{Im} hgh^{-1}$ и $\operatorname{Im}(gh^{-1})^{\mathrm{T}} = \operatorname{Im}(hgh^{-1})^{\mathrm{T}}$, а определитель и ранг не меняются при сопряжении, мы получаем второе утверждение леммы. $\square$

Наконец, мы готовы проверить критерий простоты ветвления.

Теорема 4. *Для группы $G = G_{n+1}$, ее подгрупп $H = G_n$ и $U = U_n$ и автоморфизма $\theta\colon g \mapsto (g^{\mathrm{T}})^{-1}$, $g \in G_{n+1}$, выполнены условия критерия простоты ветвления при U-ограничениях из раздела 2.*

Доказательство. Условие (1) этого критерия сразу следует из того, что любая матрица сопряжена со своей транспонированной; этот известный факт мы снова доказали в теореме 3. Условие (2) означает, что всякий двойной класс смежности $C \in U_n^{\mathrm{T}} \backslash G_{n+1} / U_n$ сопряжен с $\theta(C)^{-1} = C^{\mathrm{T}}$ при помощи элемента подгруппы G_n; пользуясь биекцией из леммы 2, мы получаем, что на множестве A это эквивалентно сопряженности под действием группы G_n пар (g, ε) и $(g^{\mathrm{T}}, \varepsilon)$ (что опять-таки следует из указанного факта), а на множестве B – троек $(g, x + \operatorname{Im} g, y + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}})$ и $(g^{\mathrm{T}}, y + \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}, x + \operatorname{Im} g)$.

Рассмотрим тройку $(g, x+\operatorname{Im} g, y+\operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}) \in B$; из теоремы 3 мы получаем существование такой матрицы $h \in G_n$, что $g^{\mathrm{T}} = hgh^{-1}$ и $hx - y \in \operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}$; тогда, в силу ее симметричности, $(h^{\mathrm{T}})^{-1}y - x \in \operatorname{Im} g$. Эти условия в точности означают, что матрица h сопрягает тройки $(g, x+\operatorname{Im} g, y+\operatorname{Im} g^{\mathrm{T}})$ и $(g^{\mathrm{T}}, y+\operatorname{Im} g^{\mathrm{T}}, x+\operatorname{Im} g)$. □

Для поля $K = \mathbb{F}_q$ из теоремы 4 мы получаем простоту ветвления представлений групп $\mathrm{GL}(n,q)$ при параболических ограничениях.

Литература

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Об одной бесконечномерной группе над конечным полем.* — Функц. анал. и его прил. **32**, вып. 3 (1998), 3–10.
2. А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, *Новый подход к теории представлений симметрических групп. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 57–98.
3. Е. Е. Горячко, *Простота ветвления основной серии представлений групп* $\mathrm{GL}(n,q)$ *при параболических ограничениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **331** (2006), 43–59.
4. A. Aizenbud, D. Gourevitch, *Multiplicity free Jacquet modules.* — From: arXiv.org e-Print archive, arXiv:0910.3659v1 [math.RT].
5. I. M. Gelfand, D. A. Kajdan, *Representations of the group* $\mathrm{GL}(n,K)$ *where* K *is a local field.* — In: Lie Groups and Their Representations. Akad. Kiadó, Budapest (1975), pp. 95–118.
6. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *Four drafts on the representation theory of the group of infinite matrices over a finite field.* — Зап. н. сем. ПОМИ **344** (2007), 5–36.
7. A. V. Zelevinsky, *Representations of Finite Classical Groups. A Hopf Algebra Approach.* Lect. Notes Math. **869** (1981).

Goryachko E. E. The simplicity of the branching of representations of the groups $\mathrm{GL}(n,q)$ under the parabolic restrictions.

We present a direct proof of the simplicity of the branching of representations of the groups $\mathrm{GL}(n,q)$ under the parabolic restrictions. The proof consists of three steps: first, we reduce the problem to the statement that a certain pair of finite groups is a Gelfand pair, then we obtain a criterion for establishing this fact, which generalizes the classical Gelfand criterion, and, finally, we check the obtained criterion with the help of some matrix computations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: eugene@pdmi.ras.ru

Поступило 25 ноября 2009 г.