Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 373, 2009 г.

А. Д. Брюно, В. Ф. Еднерал

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ОДУ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРОЖДЕННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

1. Введение

Рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_i = \varphi_i(X), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\varphi_i(X)$ – полиномы.

В окрестности неподвижной точки $X = X^0$, назовем систему (1) *локально интегрируемой*, если в ней имеется достаточное число m независимых первых интегралов вида

$$a_j(X)/b_j(X), \quad j = 1, \dots, m, \tag{2}$$

где функции $a_j(X)$ и $b_j(X)$ являются аналитическими в окрестности точки $X = X^0$. В противном случае назовем систему (1) в этой точке *локально неинтегрируемой.*

В работе [1] был предложен метод анализа интегрируемости системы, основанный на степенной геометрии [2] и вычислении нормальных форм вблизи неподвижных решений преобразованных систем. В настоящей статье показано, как этим подходом можно исследовать локальную интегрируемость плоского случая ($n = 2$) системы (1) вблизи сильно вырожденной неподвижной точки $X^0 = 0$.

В окрестности неподвижной точки $X = 0$ система (1) может быть записана в виде

$$\dot{X} = A\,X + \widetilde{\Phi}(X), \tag{3}$$

Ключевые слова : обыкновенные дифференциальные уравнения, локальная интегрируемость, степенная геометрия, резонансная нормальная форма, компьютерная алгебра.

Грант РФФИ 08-01-00082 и грант Президента РФ по поддержке научных школ 195.2008.2.

где $\widetilde{\Phi}(X)$ не содержит линейных по X слагаемых.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A. Если хотя бы одно из них $\lambda_i \neq 0$, то неподвижная точка $X = 0$ называется *элементарной.* В этом случае у системы (1) существует нормальная форма, эквивалентная системе более низкого порядка [3]. Если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ являются нулевыми, тогда соответствующая неподвижная точка $X = 0$ называется *неэлементарной.* При этом нормальной формы у системы (1) нет. Но при использовании определенного степенного преобразования, неэлементарная неподвижная точка $X = 0$ может быть раздута в несколько элементарных неподвижных точек. После этого в каждой из них можно вычислить нормальную форму и проверить выполнение в них условий локальной интегрируемости. Выполнение этого условия во всех таких точках будет необходимым и достаточным условием локальной интегрируемости в исходной вырожденной точке.

Если $n = 2$, то рациональность отношения собственных значений λ_1/λ_2 и выполнение условия A (см. следующий раздел) необходимы и достаточны для локальной интегрируемости системы около элементарной неподвижной точки.

Таким образом, мы изучаем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \sum \phi_Q \, X^Q, \\ \dot{x}_2 &= x_2 \sum \psi_Q \, X^Q, \end{aligned} \tag{4}$$

где $Q = (q_1, q_2)$, $X^Q = x_1^{q_1} \, x_2^{q_2}$, $q_{1,2} \in \mathbb{Z}$; ϕ_Q и ψ_Q – постоянные коэффициенты, которые являются полиномами от параметров системы.

Будем говорить, что у системы (4) имеется квазиоднородное начальное приближение, если существуют такой целочисленный вектор $R = (r_1, r_2) > 0$ и число s такие, что скалярное произведение

$$\langle Q, R \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1 \, r_1 + q_2 \, r_2 \geq s = \text{const}$$

для всех отличных от нуля $|\phi_Q| + |\psi_Q| \neq 0$, и к тому же среди векторов Q с $\langle Q, R \rangle = s$ имеются векторы вида $(q_1, -1)$ и $(-1, q_2)$. В этом случае, система (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1[\phi_s(X) + \phi_{s+1}(X) + \phi_{s+2}(X) + \cdots], \\ \dot{x}_2 &= x_2[\psi_s(X) + \psi_{s+1}(X) + \psi_{s+2}(X) + \cdots], \end{aligned}$$

где $\phi_k(X)$ есть сумма таких слагаемых $\phi_Q X^Q$, для которых $\langle Q, R\rangle = k$. Все сказанное справедливо и для $\psi_k(X)$. Тогда начальное приближение системы (4) будет квазиоднородной системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1\,\phi_s(X), \\ \dot{x}_2 &= x_2\,\psi_s(X). \end{aligned} \tag{5}$$

Итак, исследуется проблема: при каких условиях на параметры система (4) локально интегрируема. Но для локальной интегрируемости полной системы (4) как минимум необходима локальная интегрируемость ее начального приближения (5). Для локальной интегрируемости автономной плоской системы число первых интегралов $m = 1$ (определение m см. выше). Условие локальной интегрируемости начального приближения (5) сводится к двум случаям:

1. система (5) является гамильтоновой, то есть она имеет вид

$$\dot{x}_1 = \partial H(X)/\partial x_2, \quad \dot{x}_2 = -\partial H(X)/\partial x_1,$$

где гамильтониан $H(X)$ является квазиоднородным полиномом;

2. система (5) не является гамильтоновой, но у нее есть первый интеграл $F(X)$:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}\,x_1\,\phi_s + \frac{\partial F(X)}{\partial x_2}\,x_2\,\psi_s = 0, \tag{6}$$

где $F(X)$ также является квазиоднородным полиномом.

Для первого случая и при дополнительном условии, что гамильтониан $H(X)$ не содержит кратных полиномиальных множителей, проблема решена в работе [5]. Поэтому здесь будет обсуждаться только второй случай, точнее, система с начальным приближением, в котором $R = (2, 3)$ и $s = 7$.

При $R = (2, 3)$ и $s = 7$ квазиоднородная система (5) имеет вид

$$\dot{x} = a\,y^3 + b\,x^3\,y, \quad \dot{y} = c\,x^2\,y^2 + d\,x^5, \tag{7}$$

где $a \neq 0$ и $d \neq 0$.

Лемма 1.1. *Если у системы* (7) *с* $b \neq 0$ *и* $c \neq 0$ *есть первый интеграл*

$$I = \alpha\,y^4 + \beta\,x^3\,y^2 + \gamma\,x^6, \quad \beta \neq 0, \tag{8}$$

тогда

$$(a\,d - b\,c)(3\,b + 2\,c) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Производная первого интеграла (8) в силу системы (7) должна обнуляться, т.е. выполняется равенство (6):

$$\begin{aligned}
&\partial I/\partial x\,(a\,y^3 + b\,x^3 y) + \partial I/\partial y\,(c\,x^2 y^2 + d\,x^5) \\
&= (3\,\beta\,a + 4\,\alpha\,c)x^2 y^5 + (6\,\gamma\,a + 3\,\beta\,b + 2\,\beta\,c + 4\,\alpha\,d)x^5 y^3 \\
&+ (6\,\gamma\,b + 2\,\beta\,d)x^8 y \equiv 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты при трех слагаемых $x^p y^q$, также должны быть нулевыми, т.е.

$$\begin{gathered}
3\,\beta\,a + 4\,\alpha\,c = 0, \quad 6\,\gamma\,b + 2\,\beta\,d = 0, \\
6\,\gamma\,a + 3\,\beta\,b + 2\,\beta\,c + 4\,\alpha\,d = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Из первых двух уравнений (10), мы получаем

$$\alpha = -\frac{3\,\beta\,a}{4\,c}, \quad \gamma = -\frac{\beta\,d}{3\,b}. \tag{11}$$

Подстановка полученных значений в третье уравнение (10) с последующим упрощением, дает равенство (9). □

В соответствии с леммой 1.1, у системы (7) есть первый интеграл (8) в двух случаях:

1. $3\,b + 2\,c = 0$, тогда в соответствии с равенствами (11) интеграл (8) имеет вид

$$I = \left(-\frac{3}{2} a\,y^4 + 2\,c\,x^3 y^2 + d\,x^6 \right) \frac{\beta}{2\,c} \tag{12}$$

   с функцией Гамильтона $H = -I\,c/(3\,\beta)$;

2. $a\,d - b\,c = 0$, если $3\,b + 2\,c \neq 0$, то интеграл $c_0\,I$ не будет гамильтонианом ни при каком значении константы c_0; если же $3\,b + 2\,c = 0$, то интеграл (12) и гамильтониан будут пропорциональны квадрату $(c_1 y^2 + c_2 x^3)^2$, где $c_1, c_2 = \mathrm{const}$.

   Масштабируя x и y в системе (7), можно исключить два из четырех параметров a, b, c, d. Например, можно выбрать $a = d = 1$.

В работе [5], системы (4) и (7) были изучены в случае 1 при $c^2 + 3ad \neq 0$. Мы изучим их в случае 2.

2. О нормальной форме и условии A

Пусть преобразование подобия

$$X = BY \tag{13}$$

приводит матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$, а систему (3) к виду

$$\dot{Y} = JY + \tilde{\tilde{\Phi}}(Y). \tag{14}$$

Пусть формальное псевдотождественное преобразование координат

$$Y = Z + \Xi(Z), \tag{15}$$

где $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\xi_j(Z)$ – формальные степенные ряды без свободных и линейных членов, преобразует систему (14) в систему

$$\dot{Z} = JZ + \Psi(Z). \tag{16}$$

Ниже будем использовать мультииндексную запись

$$\dot{z}_j = z_j g_i(Z) = z_j \sum g_{jQ} Z^Q \quad \text{по} \quad Q \in \mathbb{N}_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{17}$$

где $Q = (q_1, \dots, q_n)$, $Z^Q = z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}$,

$$\mathbb{N}_j = \{Q : Q \in \mathbb{Z}^n, \ Q + E_j \geqslant 0\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

а E_j означает единичный вектор. Обозначим также

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \dots \cup \mathbb{N}_n.$$

Диагональ $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ матрицы J состоит из собственных значений матрицы A.

Систему (16), (17) называют *резонансной нормальной формой* если:

а) J – жорданова матрица,

б) под знаком суммы в правой части (17), содержатся только *резонансные члены*, для которых скалярное произведение

$$\langle Q, \Lambda \rangle \stackrel{\text{def}}{=} q_1\lambda_1 + \dots + q_n\lambda_n = 0. \tag{19}$$

Теорема 2.1 [4]. *Всегда существует формальное преобразование* (15), *приводящее систему* (14) *к ее нормальной форме* (16), (17).

В [4] есть условия на коэффициенты нормальной формы (17), которые гарантируют сходимость нормализующего преобразования (15).

Условие A. В нормальной форме (17) коэффициенты удовлетворяют условию

$$g_j = \lambda_j \alpha(Z) + \bar{\lambda}_j \beta(Z), \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\alpha(Z)$ и $\beta(Z)$ – некоторые степенные ряды.

Пусть также

$$\omega_k = \min |\langle Q, \Lambda \rangle| \quad \text{по} \quad Q \in \mathbb{N},$$

$$\langle Q, \Lambda \rangle \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j < 2^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Условие ω (условие на малые знаменатели). Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \omega_k > -\infty,$$

сходится.

Это условие выполняется для почти всех векторов Λ.

Теорема 2.2 [4]. *Если вектор* Λ *удовлетворяет условию* ω *и нормальная форма* (17) *удовлетворяет условию* A, *тогда нормализующее преобразование* (15) *сходится.*

Алгоритмы вычисления нормальной формы, нормализующего преобразования и соответствующая компьютерная программа кратко описаны в работе [6].

3. Необходимые условия локальной интегрируемости

Итак, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y^3 - b\,x^3 y + a_0\,x^5 + a_1\,x^2 y^2, \\ dy/dt &= (1/b)\,x^2 y^2 + x^5 + b_0\,x^4 y + b_1\,x\,y^3, \end{aligned} \tag{20}$$

с произвольными комплексными параметрами a_0, a_1, b_0, b_1 и $b \neq 0$.

Системы с нильпотентной матрицей линейной части детально изучены Ляпуновым и его последователями. В рассматриваемом примере линейная часть в начале координат отсутствует, а первое приближение является не однородным, а квазиоднородным. Это – самый простой случай плоской системы без линейной части с ломаной Ньютона [3], состоящей из единственного ребра. В нашем случае система обладает квазиоднородным первым приближением с параметрами $R = (2,3)$ и $s = 7$. Об изучении системы (20) в общем случае и о каких-либо ее приложениях авторам не известно.

После степенного преобразования

$$x = u\,v^2, \quad y = u\,v^3 \tag{21}$$

и степенной замены времени [2]

$$dt = u^2 v^7 d\tau,$$

система (20) переходит в систему

$$\begin{aligned} du/d\tau &= -3\,u - [3\,b + (2/b)]u^2 - 2\,u^3 + (3\,a_1 - 2\,b_1)u^2 v + (3\,a_0 - 2\,b_0)u^3 v, \\ dv/d\tau &= v + [b + (1/b)]u\,v + u^2 v + (b_1 - a_1)u\,v^2 + (b_0 - a_0)u^2 v^2. \end{aligned} \tag{22}$$

При степенном преобразовании (21), точка $x = y = 0$ раздувается в две прямые линии $u = 0$ и $v = 0$. Вдоль линии $u = 0$ у системы (22) имеется единственная неподвижная точка $u = v = 0$. Вдоль второй линии $v = 0$ у результирующей системы есть четыре элементарных неподвижных точки

$$u = 0, \quad u = -\frac{1}{b}, \quad u = -\frac{3b}{2}, \quad \text{и} \quad u = \infty. \tag{23}$$

Необходимым и достаточным условием локальной интегрируемости системы (20) в точке $x = y = 0$ будет локальная интегрируемость во всех четырех неподвижных точках (23) системы (22).

Лемма 3.1. *В окрестности точки $u = v = 0$, система* (22) *локально интегрируема.*

Доказательство. В соответствии с главой 2 книги [3], носитель системы (22) состоит из пяти точек $Q = (q_1, q_2)$

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (2,0), \quad (1,1), \quad (2,1). \tag{24}$$

В точке $u = v = 0$ собственные значения системы (22) суть $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (-3, 1)$. Только для первой точки из (24) $Q = 0$, скалярное произведение $\langle Q, \Lambda \rangle$ является нулем, для остальных четырех точек (24), оно отрицательно. Таким образом, эти четыре точки лежат с одной стороны прямой $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. В соответствии с комментарием в конце подраздела 2.1 из главы 2 книги [3], в этом случае нормальная форма состоит только из тех членов правой части исходной системы (22), чей носитель Q находится на этой прямой линии $\langle Q, \Lambda \rangle = 0$. Но только линейные члены системы (22) удовлетворяют этому условию. Поэтому в точке $u = v = 0$ нормальная форма системы линейна

$$dz_1/d\tau = -3\,z_1, \quad dz_2/d\tau = z_2.$$

Очевидно, что такая нормальная форма удовлетворяет условию A, нормализующее преобразование сходится, и в точке $u = v = 0$, система (22) имеет аналитический первый интеграл

$$z_1\,z_2^3 = \text{const}\,.$$

□

Доказательство локальной интегрируемости в бесконечно удаленной точке $u = \infty, v = 0$ проводится аналогично

Таким образом, если найти условия локальной интегрируемости в двух оставшихся неподвижных точках (23), мы получим условия локальной интегрируемости системы (20) вблизи точки $X = 0$.

Рассмотрим сначала неподвижную точку $u = -1/b, v = 0$. Ниже мы везде ограничимся случаем $b^2 \neq 2/3$, когда линейная часть системы (22), после сдвига $u = \tilde{u} - 1/b$, имеет неисчезающие собственные значения. При $b^2 = 2/3$ преобразованная система в новых переменных $\tilde{u}$ и v имеет в качестве линейной части жорданову клетку с нулевыми собственными значениями. Этот случай должен быть независимо изучен повторным применением степенного преобразования, что будет сделано в последующих работах.

Чтобы упростить собственные значения, мы еще раз изменим временной масштаб с коэффициентом $d\tau = (2 - 3\,b^2)/b^2\,d\tau_1$. После этого вектор собственных значений линейной части системы (22) будет выглядеть как $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 0)$. Таким образом, нормальная форма системы примет вид

$$\begin{aligned} dz_1/d\tau_1 &= -z_1 + z_1\,g_1(z_2), \\ dz_2/d\tau_1 &= \qquad\quad z_2\,g_2(z_2), \end{aligned} \tag{25}$$

где $g_{1,2}(x)$ являются формальными степенными рядами по переменной x. Коэффициенты этих рядов – рациональные функции параметров системы a_0, a_1, b_0, b_1 и b. Можно показать, что знаменатель каждой из этих рациональных функций пропорционален некоторой целочисленной степени $k(n)$ полинома $2 - 3b^2$. Числители же этих функций – полиномы от параметров системы

$$g_{1,2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{1,2;n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)}{(2 - 3\,b^2)^{k(n)}} x^n.$$

Условием интегрируемости (условием A) для системы (25) будет равенство $g_2(x) \equiv 0$. Оно эквивалентно бесконечной полиномиальной системе уравнений

$$p_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{26}$$

Согласно теореме Гильберта о базисе для полиномиальных идеалов [7], эта система имеет конечный базис.

При помощи программы [6] были вычислены первые три полинома $p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}$. Соответствующее подмножество уравнений (26) при $b \neq 0$ имеет 2 решения

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -b_0\, b, \quad b_1 = 0, \quad b^2 \neq 2/3 \tag{27}$$

и

$$a_0 = a_1\, b, \quad b_0 = b_1\, b, \quad b^2 \neq 2/3. \tag{28}$$

Добавление четвертого уравнения $p_{2,4} = 0$ этих решений не меняет.

Вычисление полиномов $p_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)$ в явном виде – это технически очень сложная задача. Но мы можем проверить справедливость найденных решений (27), (28) для некоторого конечного множества уравнений из набора (26) при нескольких фиксированных значениях параметра b. И на этом основании делать вывод об обнаружении необходимого условия локальной интегрируемости, а также строить обоснованную гипотезу о наличии достаточного условия локальной интегрируемости.

Мы проверили справедливость равенств

$$p_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots , 28. \tag{29}$$

для частных значений $b = 1$ и $b = 2$ и для решений (27) и (28). Таким образом, мы можем принять условия (27) и (28) на параметры системы как необходимые и, возможно, достаточные для выполнения условия A, т.е. как необходимые и, возможно, достаточные для локальной интегрируемости системы (22) вблизи неподвижной точки $u = -1/b, v = 0$.

Рассмотрим теперь неподвижную точку $u = -3\,b/2, v = 0$. Снова масштабируем время с коэффициентом $d\tau = (2 - 3\,b^2)\,d\tau_2$. После этого вектор собственных значений системы (22) принимает вид $(-1/4, 3/2)$, т.е. имеет место резонанс седьмого порядка и нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} dz_1/d\tau_2 &= -(1/4)\,z_1 + z_1\,r_1(z_1^6\,z_2), \\ dz_2/d\tau_2 &= (3/2)\,z_2 + z_2\,r_2(z_1^6\,z_2), \end{aligned} \tag{30}$$

где $r_{1,2}(x)$ – формальные степенные ряды, причем в уравнении (30) они зависят от единственной "резонансной переменной" $z_1^6 z_2$. Коэффициенты этих рядов – рациональные функции от параметров системы a_0, a_1, b_0, b_1 и b. Знаменатель каждой из этих функций пропорционален некоторой целочисленной степени $l(n)$ полинома $2 - 3\,b^2$, а числители являются многочленами по параметрам системы

$$r_{1,2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1,2;n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)}{(2 - 3\,b^2)^{l(n)}} x^n.$$

Условие A для уравнения (30) представляет собой равенство $6\,r_1(x) + r_2(x) = 0$. Оно эквивалентно бесконечной системе полиномиальных уравнений

$$6\,q_{1,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) + q_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) = 0, \quad n = 7, 14, \ldots. \tag{31}$$

Мы вычислили полиномы $q_{1,7}$, $q_{2,7}$ при значениях параметров из решения (28) и решили первое ($n = 7$) уравнение из набора (31). Нашли 5 различных двухпараметрических (от b и a_1) семейств решений. Совместно с решением (28) они выглядят так

$$\begin{array}{lllll} 1) & b_1 = -2\,a_1, & a_0 = a_1 b, & b_0 = b_1 b, & b^2 \neq 2/3, \\ 2) & b_1 = (3/2)\,a_1, & a_0 = a_1 b, & b_0 = b_1 b, & b^2 \neq 2/3, \\ 3) & b_1 = (8/3)\,a_1, & a_0 = a_1 b, & b_0 = b_1 b, & b^2 \neq 2/3 \end{array} \tag{32}$$

и

$$\begin{array}{lllll} 4) \ b_1 = \frac{197-7\sqrt{745}}{24}a_1, & a_0 = a_1 b, & b_0 = b_1 b, & b^2 \neq 2/3, \\ 5) \ b_1 = \frac{197+7\sqrt{745}}{24}a_1, & a_0 = a_1 b, & b_0 = b_1 b & b^2 \neq 2/3. \end{array} \qquad (33)$$

Мы проверили выполнение уравнений (31) до $n = 49$ для решений (32) при частных значениях $b = 1$ и $b = 2$ и произвольном a_1. Таким же образом мы проверили двухпараметрическое решение (27). Оно также обращает перечисленные выше уравнения в тождества при произвольном b_0.

Однако решения (33), начиная с порядка $n = 14$, удовлетворяют уравнениям (31) только при дополнительном условии $a_1 = 0$, являясь частным случаем решений (32). Итак,

Теорема 3.2. *Равенства* (27) *и* (32) *образуют полный набор необходимых условий локальной интегрируемости системы* (22) *во всех ее неподвижных точках и локальной интегрируемости системы* (20) *вблизи ее неподвижной точки* $x = y = 0$.

4. О достаточных условиях интегрируемости

Условия, приведенные в теореме 3.2 как необходимые для локальной интегрируемости исследуемой системы в указанной неподвижной точке, могут рассматриваться с точки зрения "экспериментальной математики" как достаточные условия такой интегрируемости, особенно учитывая достаточно высокие порядки проведенных проверок. Однако следует провести доказательство достаточности этих условий независимыми методами. Сделать это нужно для каждого из четырех условий (27), (32) в каждой из неподвижных точек $u = -3b/2$, $v = 0$ и $u = -1/b$, $v = 0$.

Что касается условия (27), то для него оказывается несложным построить первый интеграл (в смысле тождества (6)) для уравнений (22) и (20), если искать его по методу неопределенных коэффициентов. С точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого он будет иметь в переменных u, v и x, y виды

$$\begin{aligned} &\text{При } \ a_0 = 0, \quad a_1 = -b_0\, b, \quad b_1 = 0: \\ &\quad I_{1uv} = u^2(3\,b + 2\,u)v^6, \\ &\quad I_{1xy} = 2\,x^3 + 3\,b\,y^2. \end{aligned} \qquad (34)$$

Обратим внимание на отсутствие в конечном результате ограничения $b^2 \neq 2/3$.

Что касается первого условия из (32), то достаточность доказывается, аналогично с предыдущим результатом, вычислением первого интеграла

$$\begin{aligned} &\text{При}\quad b_1 = -2a_1, \quad a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b: \\ &I_{2uv} = u^2\, v^6\, (3\, b + u\, (2 - 6\, a_1\, b\, v)), \\ &I_{2xy} = 2\, x^3 - 6\, a_1\, b\, x^2\, y + 3\, b\, y^2. \end{aligned} \tag{35}$$

Также обратим внимание на отсутствие в конечном результате ограничения $b^2 \neq 2/3$.

Второе условие из (32) позволяет разделить переменные в системе (22), решить систему в неявном виде и, исключив время, получить первые интегралы в виде

$$\text{При}\quad b_1 = 3a_1/2, \quad a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b:$$

$$\begin{aligned} &I_{3uv} = \frac{4 - 4a_1\, u\, v + 3^{5/6} a_1\, {}_2F_1\,(2/3, 1/6; 5/3; -2u/(3b))\; u\, v\; (3 + 2u/b)^{1/6}}{u^{1/3} v\, (3b + 2u)^{1/6}}, \\ &I_{3xy} = \frac{a_1 x^2(-4 + 3^{5/6}\; {}_2F_1\,(2/3, 1/6; 5/3; -2\, x^3/(3\, b\, y^2))\; (3 + 2x^3/(b\, y^2))^{1/6}) + 4y}{y^{4/3}(3\, b + 2\, x^3/y^2)^{1/6}}, \end{aligned} \tag{36}$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрический ряд [8].

Отметим, что аналитическими интегралами в смысле (2), будут кубы от I_{3uv} и I_{3xy}. Радиусы сходимости

гипергеометрических рядов по аргументам при получившихся значениях параметров будут единичными, что также достаточно для обеспечения соответствующей аналитичности (2).

В качестве локальных интегралов, соответствующих четвертому условию $b_1 = 8a_1/3$, $a_0 = a_1 b$, $b_0 = b_1 b$, $b^2 \neq 2/3$, нам пока удалось вычислить лишь отрезки формальных степенных рядов по u и v в каждой из неподвижных точек $u = -3b/2$, $v = 0$ и $u = -1/b$, $v = 0$ в отдельности. Попытки использовать для суммирования этих отрезков 2-мерное приближение Паде к успеху не привели. В силу громоздкости мы не приводим здесь отрезки этих рядов.

5. Заключение

Для плоской 5-параметрической системы (20) найдены все существующие наборы параметров системы, необходимые для ее локальной интегрируемости вблизи вырожденной неподвижной точки

$X = 0$. Они представляют собой 4 набора условий на параметры системы. Для 3 из этих наборов независимыми методами показано, что они достаточны для локальной интегрируемости и для этих наборов также вычислены первые интегралы системы, т.е. система при этих значениях параметров интегрируема и глобально. Для четвертого набора параметров получены только приближения локальных интегралов в виде отрезков формальных степенных рядов по переменным системы. Суммировать их в виде конечных функций, нам пока не удалось. Мы также исключили из анализа четвертого набора параметров точку $b^2 = 2/3$.

Литература

1. А. Д. Брюно, В. Ф. Еднерал, *Алгоритмический анализ локальной интегрируемости.* — ДАН **424**, (3) (2009), 299–303.
2. А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* Физматлит, М., 1998.
3. А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* Наука, М., 1979.
4. А. Д. Брюно, *Аналитическая форма дифференциальных уравнений.* — Труды московского математического общества **25** (1971), 119–262, **26** (1972), 199–239.
5. A. Algaba, E. Gamero, C. Garcia, *The integrability problem for a class of planar systems.* — Nonlinearity **22** (2009), 395–420.
6. V. F. Edneral, *On algorithm of the normal form building.* — Proceedings of the CASC 2007. Ed. by Ganzha et al., Springer-Verlag series: LNCS 4770 (2007), 134–142.
7. К. Л. Зигель, *Лекции о небесной механике.* Физматлит, М. 1959.
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Том 1. Наука, М. 1973.

Bruno A. D., Edneral V. F. On integrability of a planar system of ODEs near a degenerate stationary point.

We consider an autonomous system of ordinary differential equations, which is resolved with respect to the derivatives. To study local integrability of the system near a degenerate stationary point, we use an approach based on Power Geometry and on the computation of the resonant normal form. For the concrete planar 5-parameter system, we found the complete set of necessary conditions on parameters of the system for which the system is locally integrable near a degenerate stationary point. This set consists of 4 two-parameter sets in this 5-parameter space. For 3 such sets we found sufficient conditions of a local integrability by independent methods.

Because these methods are constructive we get first integrals of the system. So at these set of parameters, the system is globally integrable for these 3 sets. For the forth set we have at the moment only approximations of the local integrals as truncated power series in parameters of the system, but we believe that it is possible to sum them up to finite functions.

Институт прикладной математики РАН
им. М. В. Келдыша, Миусская пл. 4,
125047 Москва, Россия

E-mail: abruno@keldysh.ru

Поступило 11 сентября 2009 г.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы 1, 119991 Москва, Россия

E-mail: edneral@theory.sinp.msu.ru