Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

С. С. Подкорытов

О ГОМОТОПИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ОКРУЖНОСТЬ

§1. Введение

Пусть даны топологические пространства X, Y. Пусть $Y(X)$ – множество непрерывных отображений $X \to Y$, $[X,Y]$ — множество их гомотопических классов. Для $a \in Y(X)$ пусть $[a] \in [X,Y]$ – его гомотопический класс. Для $r \in \mathbb{N}$ $(= \{0,1,\dots\})$ и $a \in Y(X)$ пусть $I_r(a)\colon (X\times Y)^r \to \mathbb{Z}$ – характеристическая функция множества Γ_a^r, где $\Gamma_a \subset X \times Y$ – график отображения a. Пусть D_r – подгруппа группы функций $(X \times Y)^r \to \mathbb{Z}$, порождённая функциями $I_r(a)$, $a \in Y(X)$.

Пусть даны абелева группа C и отображение $f : [X,Y] \to C$. Пусть $\operatorname{ord} f \in \widehat{\mathbb{N}}$ $(= \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ – инфимум тех $r \in \mathbb{N}$, для которых существует такой гомоморфизм $h\colon D_r \to C$, что $f([a]) = h(I_r(a))$ для всех $a \in Y(X)$.

Пусть $T = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$. Цель работы – найти $\operatorname{ord} f$ для произвольного f при $Y = T$.

Поточечное умножение отображений делает множество $B(X) = [X,T]$ абелевой группой (*группа Брушлинского*). Она канонически изоморфна группе $H^1(X;\mathbb{Z})$ (если X – клеточное пространство).

Для отображения $g : E \to F$ между абелевыми группами пусть $\deg g \in \widehat{\mathbb{N}}$ – инфимум тех $r \in \mathbb{N}$, для которых

$$\sum_{q_0,\dots,q_r=0,1} (-1)^{q_0+\dots+q_r} g(q_0 d_0 + \dots + q_r d_r) = 0$$

при любых $d_0,\dots,d_r \in E$.

1.1. Теорема. *Пусть даны топологическое пространство X, абелева группа C и отображение $f : B(X) \to C$. Тогда* $\operatorname{ord} f = \deg f$.

Более слабые результаты получены в [1, 2].

Пример. Пусть $q\colon B(X) \to \pi^1_{\mathrm{s}}(X)$ – отображение стабилизации. Если $X = T^n$, $n \leqslant 4$, то $\deg q = n$. По теореме 1.1 тогда $\operatorname{ord} q = n$.

Ключевые слова : группа Брушлинского, порядок инварианта, степень отображения.

§2. Предварительный материал

Симметрические степени. Для абелевой группы E пусть $E^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) – её r-я симметрическая степень, т.е. факторгруппа группы $E^{\otimes r}$ по перестановкам. Для гомоморфизма $h : E \to F$ между абелевыми группами пусть $h^{(r)} \colon E^{(r)} \to F^{(r)}$ – индуцированный гомоморфизм. Имеем $E^{(0)} = \mathbb{Z}$, $E^{(1)} = C$.

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} E^{(r)}$$

– коммутативное кольцо.

Свободные абелевы группы. Для множества C абелева группа $\langle C \rangle$ свободно порождена элементами 'c', $c \in C$. Для элемента (*набора*) $X \in \langle C \rangle$ пусть $X_c \in \mathbb{Z}$, $c \in C$, – его коэффициенты (*веса*). Имеем подгруппу $\langle C \rangle_\vartriangle \subset \langle C \rangle$, образованную наборами с нулевой суммой весов. Для отображения $g \colon C \to D$ между множествами пусть $\langle g \rangle : \langle C \rangle \to \langle D \rangle$ – индуцированный гомоморфизм. Для отображения $f : C \to E$, где E – абелева группа, зададим гомоморфизм $f^+ \colon \langle C \rangle \to E$ правилом $f^+(\text{'}c\text{'}) = f(c)$, $c \in C$. Если C – абелева группа, то $\langle C \rangle$ – коммутативное кольцо.

Для $U \in \langle Y(X) \rangle$, где X, Y – топологические пространства, пусть $[U] \in \langle [X, Y] \rangle$ – образ набора U при гомоморфизме, индуцированном отображением $Y(X) \to [X, Y]$, $a \mapsto [a]$. Для $P \subset X$ аналогично определяется набор $U|_P \in \langle Y(P) \rangle$.

Симплициальный случай. Для симплициального множества F пусть $\langle F \rangle$ – симплициальная абелева группа с $\langle F \rangle_n = \langle F_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, и очевидными структурными гомоморфизмами. Есть симплициальная подгруппа $\langle F \rangle_\vartriangle \subset \langle F \rangle$. Для симплициального отображения $k : F \to G$ между симплициальными множествами пусть $\langle k \rangle : \langle F \rangle \to \langle G \rangle$ – индуцированный симплициальный гомоморфизм. Зададим симплициальное отображение $e^F : F \to \langle F \rangle$ правилом $e^F_n(x) = \text{'}x\text{'}$, $x \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Комплексы. *Комплекс* K – конечное множество геометрических симплексов в $\mathbb{R}^\infty$, каждый снабжён линейным порядком на множестве своих вершин; обычные условия: K содержит все грани своих симплексов и т.д. *Тело* $|K|$ комплекса K – объединение его симплексов. *Полиэдр* Q – тело какого-нибудь комплекса; этот комплекс называем *триангуляцией* полиэдра Q. Симплекс $z \in K$ порождает подкомплекс $\overline{z} \subset K$, который тоже можно назвать симплексом; имеем $|\overline{z}| = z$. Как обычно, определены звезда и линк: $\operatorname{st} z, \operatorname{lk} z \subset K$. Для подкомплекса

$L \subset K$ пусть
$$O(L) = \{\, z \in K \;:\; \overline{z} \cap L \neq \varnothing \,\}.$$

Очевидно, что $K \backslash O(L)$ – подкомплекс. Для подкомплексов $E_1, \ldots, E_r \subset K$ $(r \in \mathbb{N})$ пусть $E_* \subset K$ – их объединение.

Комплекс K порождает симплициальное множество, которое тоже обозначается K. Для симплициального множества F пусть $F(K)$ – множество симплициальных отображений $K \to F$. Для отображения $a \in F(K)$ пусть $|a| \in |F|(|K|)$ – его геометрическая реализация. Для набора $U \in \langle F(K) \rangle$ и подкомплекса $L \subset K$ пусть $U|_L \in \langle F(L) \rangle$ – образ набора U при гомоморфизме, индуцированном отображением $F(K) \to F(L)$, $a \mapsto a|_L$. Аналогично определяется набор $|U| \in \langle |F|(|K|) \rangle$.

Пусть дана симплициальная абелева группа G. Тогда, очевидно, $G(K)$ – абелева группа. Для $a \in G(K)$ пусть

$$S(a) = \{ z \in K \;:\; a|_{\overline{z}} \neq 0 \,\}.$$

Очевидно, что $K \setminus S(a)$ – подкомплекс. Для набора $U \in \langle G(K) \rangle$ пусть

$$S(U) = \bigcup_{a \in G(K) : U_a \neq 0} S(a).$$

Подразделения. Пусть дан комплекс K. Пусть δK – его барицентрическое подразделение, снабжённое таким порядком: чем выше размерность симплекса, тем “старше” его барицентр. Пусть $\phi_K : \delta K \to K$ – симплициальное отображение, посылающее барицентр симплекса в его старшую (относительно исходного порядка) вершину. Пусть $\delta' K$ – барицентрическое подразделение комплекса K, снабжённое противоположным порядком. Пусть $\phi'_K : \delta' K \to K$ – симплициальное отображение, посылающее барицентр симплекса в его младшую вершину.

Пусть
$$\Delta K = \delta' \delta K, \quad \Phi_K = \phi_K \circ \phi'_{\delta K} \colon \Delta K \to K.$$

При отображении Φ_K образ звезды любой вершины есть симплекс. Это отображение *простое*, т.е. для любого подкомплекса $L \subset K$ его сокращение $\Phi_K^{-1}(L) \to L$ – гомотопическая эквивалентность. Отображение $|\Phi_K| \colon |K| = |\Delta K| \to |K|$ гомотопно тождественному.

Пусть
$$\Phi_K^i = \Phi_K \circ \ldots \circ \Phi_{\Delta^{i-1} K} \;:\; \Delta^i K \to K.$$

Индуцированные отображения. Непрерывное отображение $g : X \to Y$ между топологическими пространствами индуцирует гомоморфизм $B(g) : B(Y) \to B(X)$. Для топологического пространства Z имеем отображения композиции

$$g^Z_\#\colon X(Z) \to Y(Z) \quad \text{и} \quad g^\#_Z\colon Z(Y) \to Z(X).$$

Это обозначение используем и в симплициальном случае.

§3. r-Складные наборы

Топологический случай. Пусть даны топологические пространства X, Y. Набор $U \in \langle Y(X)\rangle$ *r-складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_P = 0$ для любого $P \subset X$ с $\#P \leqslant r$. (Если $r < 0$, то любой набор r-складен; набор 0-складен, если сумма его весов равна нулю.)

3.1. Лемма. *Пусть даны абелева группа C и отображение $f : [X,Y] \to C$. Тогда неравенство $\operatorname{ord} f \leqslant r$ ($r \in \mathbb{N}$) равносильно тому, что $f^+([U]) = 0$ для всех r-складных наборов $U \in \langle Y(X)\rangle$.*

Доказательство. Пусть D_r – как в §1. Зададим гомоморфизм $R : \langle Y(X)\rangle \to D_r$ правилом $R(\text{‘}a\text{’}) = I_r(a)$, $a \in Y(X)$. R – эпиморфизм. Набор $U \in \langle Y(X)\rangle$ r-складен, если и только если $R(U) = 0$. Введём гомоморфизм

$$F\colon \langle Y(X)\rangle \to C, F(U) = f^+([U]).$$

Неравенство $\operatorname{ord} f \leqslant r$ означает, что существует такой гомоморфизм $h\colon D_r \to C$, что $f([a]) = h(I_r(a))$ для всех $a \in Y(X)$, т.е. $F = h \circ R$. Такой гомоморфизм h существует, тогда и только тогда, когда $\ker R \subset \ker F$, т.е. $f^+([U]) = 0$ для всех r-складных наборов $U \in \langle Y(X)\rangle$. $\bullet$

3.2. Лемма. *Пусть даны топологическое пространство Z и r-складный ($r \in \mathbb{Z}$) набор $U \in \langle Y(X)\rangle$. Тогда: а) для непрерывного отображения $g\colon Y \to Z$ набор $\langle g^X_\#\rangle(U) \in \langle Z(X)\rangle$ r-складен; б) для непрерывного отображения $g\colon Z \to X$ набор $\langle g^\#_Y\rangle(U) \in \langle Y(Z)\rangle$ r-складен.*

Симплициальный случай. Пусть даны комплекс K и симплициальное множество F. Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ *r-складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_Z = 0$ для любого подкомплекса $Z \subset K$, порождённого не более чем r симплексами.

3.3. Лемма. *Пусть дан r-складный ($r \in \mathbb{Z}$) набор $U \in \langle F(K)\rangle$. Тогда набор $|U| \in \langle |F|(|K|)\rangle$ тоже r-складен.*

Пусть дано покрытие $\mathcal{E}$ комплекса K подкомплексами. Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ $(\mathcal{E}, r)$-*складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_Z = 0$ для любого объединения $Z \subset K$ не более чем r элементов покрытия $\mathcal{E}$. $(\mathcal{E}, r)$-складность сильнее r-складности.

§4. Гомоморфизм j_r

Пусть даны комплекс K и симплициальное множество F. Пусть $e = e^F : F \to \langle F\rangle$. Для $r \in \mathbb{N}$ зададим гомоморфизм

$$j_r : \langle F(K)\rangle \to \langle F\rangle(K)^{(r)}$$

правилом $j_r(‘a’) = (e \circ a)^r$, $a \in F(K)$.

4.1. Лемма. *Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ r-складен ($r \in \mathbb{N}$), тогда и только тогда, когда $j_r(U) = 0$.*

Доказательство. Для комплекса L зададим гомоморфизм

$$J_L : \langle F(L)\rangle \to \langle F\rangle(L)^{\otimes r}$$

правилом $J_L(‘a’) = (e \circ a)^{\otimes r}$, $a \in F(L)$.

Имеем $\ker j_r = \ker J_K$. Это следует из равенств

$$j_r = p \circ J_K,\ \ q \circ j_r = r! J_K,$$

где $p\colon \langle F\rangle(K)^{\otimes r} \to \langle F\rangle(K)^{(r)}$ – проекция, а

$$q\colon \langle F\rangle(K)^{(r)} \to \langle F\rangle(K)^{\otimes r}$$

– гомоморфизм, задан правилом

$$q(u_1 \dots u_r) = \sum_{g \in \Sigma_r} u_{g(1)} \otimes \dots \otimes u_{g(r)}, \quad u_1, \dots, u_r \in \langle F\rangle(K).$$

Для комплекса L введём мономорфизм

$$i_L\colon \langle F\rangle(L) \to \bigoplus_{z \in L} \langle F\rangle(\overline{z}), \quad i_L(u) = (u|_{\overline{z}})_{z \in L},$$

и композицию

$$P_L\colon \langle F(L)\rangle \xrightarrow{J_L} \langle F\rangle(L)^{\otimes r} \xrightarrow{i_L^{\otimes r}} \Big(\bigoplus_{z\in L}\langle F\rangle(\overline{z})\Big)^{\otimes r} \xrightarrow{c} \bigoplus_{z_1,\dots,z_r\in L}\ \bigotimes_{s=1}^{r}\langle F\rangle(\overline{z_s}),$$

где c – изоморфизм дистрибутивности. Пусть $P_{L\,z_1\dots z_r}$, где $z_1,\dots,z_r\in L$, – компоненты гомоморфизма P_L. Имеем

$$P_{L\,z_1\dots z_r}(\text{‘}b\text{’}) = \bigotimes_{s=1}^{r}(e\circ b|_{\overline{z_s}}),\quad b\in F(L).$$

Имеем $\ker J_L = \ker P_L$. Поэтому достаточно показать, что $P_K(U)=0$, тогда и только тогда, когда набор U r-складен.

Возьмём симплексы $z_1,\dots,z_r\in K$. Пусть $Z\subset K$ – порождённый ими подкомплекс. Достаточно показать, что $P_{K\,z_1\dots z_r}(U)=0$, если и только если $U|_Z=0$. В силу естественности гомоморфизма P_L относительно L имеем

$$P_{K\,z_1\dots z_r}(U) = P_{Z\,z_1\dots z_r}(U|_Z).$$

Это даёт импликацию “если”. Чтобы доказать импликацию “только если”, достаточно показать, что $P_{Z\,z_1\dots z_r}$ – мономорфизм.

Введём инъективное отображение

$$k\,:\,F(Z)\to\prod_{s=1}^{r}F(\overline{z_s}),\quad k(b)=(b|_{\overline{z_s}})_{s=1}^{r}.$$

Для $z\in K$ зададим гомоморфизм $h_z\,:\,\langle F(\overline{z})\rangle\to\langle F\rangle(\overline{z})$ правилом $h_z(\text{‘}b\text{’})=e\circ b$, $b\in F(K)$. Это изоморфизм. Введём композицию

$$m\colon \langle F(Z)\rangle \xrightarrow{\langle k\rangle} \Big\langle\prod_{s=1}^{r}F(\overline{z_s})\Big\rangle \xrightarrow{l} \bigotimes_{s=1}^{r}\langle F(\overline{z_s})\rangle \xrightarrow{\bigotimes_{s=1}^{r}h_{z_s}} \bigotimes_{s=1}^{r}\langle F\rangle(\overline{z_s}),$$

где l – стандартный изоморфизм:

$$l(\text{‘}(b_1,\dots,b_r)\text{’}) = \text{‘}b_1\text{’}\otimes\ldots\otimes\text{‘}b_r\text{’},\quad b_s\in F(\overline{z_s}),\quad s=1,\dots,r.$$

Ясно, что m – мономорфизм. Имеем

$$m(‘b’) = \bigotimes_{s=1}^{r} (e \circ b|_{\overline{z_s}}), \qquad b \in F(L),$$

т.е. $m = P_{Z\, z_1 \dots z_r}$. Таким образом, $P_{Z\, z_1 \dots z_r}$ – мономорфизм. $\bullet$

Пусть дана симплициальная абелева группа G. Пусть $e = e^G$ и

$$j_r \colon \langle G(K) \rangle \to \langle G \rangle (K)^{(r)}$$

– соответствующий гомоморфизм.

4.2. Лемма. *Пусть даны наборы $X, Y \in \langle G(K) \rangle$. Предположим, что набор X $(r-1)$-складен, набор Y $(s-1)$-складен $(r, s \in \mathbb{N})$ и $S(X) \cap S(Y) = \varnothing$. Тогда набор XY $(r+s-1)$-складен и*

$$j_{r+s}(XY) = \frac{(r+s)!}{r!s!} j_r(X) j_s(Y).$$

Доказательство. Пусть

$$P = \{\, a \in G(K) \,:\, S(a) \subset S(X) \,\}, \quad Q = \{\, b \in G(K) \,:\, S(b) \subset S(Y) \,\}.$$

Имеем

$$X = \sum_{a \in P} X_a ‘a’, \quad Y = \sum_{b \in Q} Y_b ‘b’, \quad XY = \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b ‘a+b’.$$

Так как $S(X) \cap S(Y) = \varnothing$, то для $a \in P$, $b \in Q$ имеем

$$e \circ (a+b) = e \circ a + e \circ b - e \circ 0.$$

Для $t \in \mathbb{N}$ имеем

$$j_t(XY) = \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b (e \circ (a+b))^t = \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b (e \circ a + e \circ b - e \circ 0)^t$$

$$= \sum_{u,v,w \in \mathbb{N} : u+v+w=t} \frac{t!}{u!v!w!} \Big(\sum_{a \in P} X_a (e \circ a)^u \Big) \Big(\sum_{b \in Q} Y_b (e \circ b)^v \Big) (-e \circ 0)^w$$

$$= \sum_{u,v,w \in \mathbb{N} : u+v+w=t} \frac{t!}{u!v!w!} j_u(X) j_v(Y) (-e \circ 0)^w.$$

По лемме 4.1 $j_u(X) = 0$ при $u < r$ и $j_v(Y) = 0$ при $v < s$. Поэтому $j_t(XY) = 0$ при $t < r+s$ и

$$j_{r+s}(XY) = \frac{(r+s)!}{r!s!} j_r(X) j_s(Y).$$

По лемме 4.1, набор XY $(r+s-1)$-складен. $\bullet$

4.3. Следствие. *Пусть даны наборы* $X_1, \dots, X_p \in \langle G(K) \rangle$ $(p \in \mathbb{N})$. *Предположим, что при каждом* q *набор* X_q $(r_q - 1)$*-складен* $(r_q \in \mathbb{N})$ *и* $S(X_q) \cap S(X_{q'}) = \varnothing$ *для любых различных* q, q'. *Пусть* $X = X_1 \dots X_p$, $r = r_1 + \dots + r_p$. *Тогда набор* X $(r-1)$*-складен и*

$$j_r(X) = \frac{r!}{r_1! \dots r_p!} j_{r_1}(X_1) \dots j_{r_p}(X_p). \quad \bullet$$

§5. Симплициальные группы M, P, $\widetilde{M}$

Материал этого параграфа следует из соответствия Дольда–Кана и теоремы Дольда–Тома.

Пусть дан комплекс K. Пусть $Q = |K|$.

Пусть M – классифицирующее пространство группы $\mathbb{Z}$. M – симплициальная абелева группа. Отображение $a \in M(K)$ – то же, что 1-коцикл на K со значениями в $\mathbb{Z}$.

Пусть $\eta : |M| \to T$ – гомотопическая эквивалентность. Для $a \in M(K)$ пусть $[\![a]\!] = [\eta \circ |a|] \in B(Q)$. Для набора $U \in \langle M(K) \rangle$ пусть $[\![U]\!] \in \langle B(Q) \rangle$ – его образ при индуцированном кольцевом гомоморфизме.

Имеем симплициальное отображение $e = e^M : M \to \langle M \rangle$.

Зададим симплициальный гомоморфизм $f \colon \langle M \rangle \to \mathbb{Z} \times M$ правилом $f_n(\text{‘}m\text{’}) = (1, m)$, $m \in M_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $P = \ker f$, $k : P \to \langle M \rangle$ – включение. Группа P стягиваема. Группа $\langle M \rangle$ расщепляется: есть симплициальные гомоморфизмы $g \colon \mathbb{Z} \times M \to \langle M \rangle$ с $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z} \times M}$ и $l \colon \langle M \rangle \to P$ с $l \circ k = \mathrm{id}_P$, причём $k \circ l + g \circ f = \mathrm{id}_{\langle M \rangle}$.

Есть такие отображения $h_z \colon P(\overline{z}) \to P(K)$, $z \in K$, что для любого $t \in P(K)$

$$t = \sum_{z \in K} h_z(t|_{\overline{z}})$$

и $S(h_z(u)) \subset \operatorname{st} z$ для любого $u \in P(\overline{z})$, $z \in K$.

Пусть $q \colon \widetilde{M} \to M$ – универсальное накрытие. $\widetilde{M}$ – тоже симплициальная абелева группа; q – симплициальный гомоморфизм. Группа $\widetilde{M}$ стягиваема. Отображение $a \in \widetilde{M}(K)$ – то же, что 0-коцепь на K со значениями в $\mathbb{Z}$.

Имеем симплициальное отображение $\widetilde{e} = e^{\widetilde{M}} \colon \widetilde{M} \to \langle \widetilde{M} \rangle$. Имеем $e \circ q = \langle q \rangle \circ \widetilde{e}$.

Есть симплициальный гомоморфизм $\widetilde{k} \colon P \to \langle \widetilde{M} \rangle$ с $\langle q \rangle \circ \widetilde{k} = k$.

§6. Подъём вдоль j_1

Пусть дан комплекс K. Пусть $K^* = K \cup \{\varnothing\}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Для $x, y \in K^*$ имеем $x \cap y \in K^*$. Для $z \in K^*$ пусть $c_z = 1 - \chi(\operatorname{lk} z)$, где χ – эйлерова характеристика и $\operatorname{lk} \varnothing = K$.

6.1. Лемма. *Для $x, y \in K^*$ имеем*

$$\sum_{z \in K^* : z \cap x = y} c_z = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \qquad \bullet$$

Для комплекса L введём гомоморфизм

$$p_L = (\widetilde{e}^L_\#)^+ \colon \langle \widetilde{M}(L) \rangle \to \langle \widetilde{M} \rangle (L).$$

6.2. Лемма. *Пусть даны подкомплекс $D \subset K$ и отображение $u \in \langle \widetilde{M} \rangle_\vartriangle (L) \subset \langle \widetilde{M} \rangle (L)$ с $S(u) \subset D$. Тогда существует такой набор $U \in \langle \widetilde{M}(K) \rangle_\vartriangle$, что $p_K(U) = u$ и $S(U) \subset O(D)$.*

Доказательство. Для $z \in K^*$ зададим гомоморфизм $E_z \colon \widetilde{M}(\overline{z}) \to \widetilde{M}(K)$ условиями $E_z(v)|_{\overline{z}} = v$ и $S(E_z(v)) \subset O(\overline{z})$ (“продолжение нулём”). Для $x, z \in K^*$ имеем

$$E_z(v)|_{\overline{x}} = E_{z \cap x}(v|_{\overline{z \cap x}})|_{\overline{x}}, \quad v \in \widetilde{M}(\overline{z}),$$

и, следовательно,

$$\langle E_z \rangle (V)|_{\overline{x}} = \langle E_{z \cap x} \rangle (V|_{\overline{z \cap x}})|_{\overline{x}}, \quad V \in \langle \widetilde{M}(\overline{z}) \rangle.$$

Для $z \in K$ $p_{\overline{z}}$ – изоморфизм. Для $z \in K^*$ введём гомоморфизм $R_z \colon \langle \widetilde{M} \rangle (\overline{z}) \to \langle \widetilde{M}(\overline{z}) \rangle$, полагая $R_z = p_{\overline{z}}^{-1}$ при $z \in K$ и $R_\varnothing = 0$. Для $x, z \in K^*$ имеем

$$R_z(v)|_{\overline{z \cap x}} = R_{z \cap x}(v|_{z \cap x}), \quad v \in \langle \widetilde{M} \rangle_\vartriangle (\overline{z}).$$

Положим

$$U = \sum_{z \in K^*} c_z \langle E_z \rangle (R_z(u|_{\overline{z}})).$$

Имеем $S(U) \subset O(D)$. Покажем, что $p_K(U) = u$. Возьмём $x \in K$. Достаточно показать, что $p_K(U)|_{\overline{x}} = u|_{\overline{x}}$. Имеем

$$U|_{\overline{x}} = \sum_{z \in K^*} c_z \langle E_z \rangle (R_z(u|_{\overline{z}}))|_{\overline{x}} = \sum_{z \in K^*} c_z \langle E_{z\cap x} \rangle (R_{z\cap x}(u|_{\overline{z\cap x}}))|_{\overline{x}}$$
$$= \sum_{y \in K^*} \Bigl(\sum_{z \in K^* : z \cap x = y} c_z \Bigr) \langle E_y \rangle (R_y(u|_{\overline{y}}))|_{\overline{x}} = \langle E_x \rangle (R_x(u|_{\overline{x}}))|_{\overline{x}} = R_x(u|_{\overline{x}})$$

по лемме 6.1. Имеем

$$p_K(U)|_{\overline{x}} = p_{\overline{x}}(U|_{\overline{x}}) = p_{\overline{x}}(R_x(u|_{\overline{x}})) = u|_{\overline{x}}. \quad \bullet$$

Пусть $M(K)_0 = \{\, a \in M(K) : [\![a]\!] = 0 \,\}$. Имеем $\langle M(K)_0 \rangle \subset \langle M(K) \rangle$.

6.3. Лемма. *Пусть даны подкомплекс $D \subset K$ и отображение $t \in P(K)$ с $S(t) \subset D$. Тогда существует такой 0-складный набор $X \in \langle M(K)_0 \rangle$, что $j_1(X) = k \circ t$ и $S(X) \subset O(D)$.*

Доказательство. По лемме 6.2, есть такой набор $U \in \langle \widetilde{M}(K) \rangle_\vartriangle$, что $p_K(U) = \widetilde{k} \circ t$ и $S(U) \subset O(D)$. Положим $X = \langle q^K_\# \rangle (U)$. Имеем $S(X) \subset O(D)$ и

$$j_1(X) = (e^K_\#)^+(X) = (e^K_\#)^+(\langle q^K_\# \rangle(U)) = ((e \circ q)^K_\#)^+(U)$$
$$= ((\langle q \rangle \circ \widetilde{e})^K_\#)^+(U) \langle q \rangle \circ (\widetilde{e}^K_\#)^+(U) = \langle q \rangle \circ p_K(U) = \langle q \rangle \circ \widetilde{k} \circ t = k \circ t.$$

§7. Построение r-складного набора

7.1. Утверждение. *Пусть даны полиэдр Q и элементы $d_0, \ldots, d_r \in B(Q)$ ($r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant -1$). Тогда существуют триангуляция K полиэдра Q и r-складный набор $U \in \langle M(K) \rangle$ с*

$$[\![U]\!] = (1 - `d_0\text{'}) \ldots (1 - `d_r\text{'}).$$

Доказательство. Случай $r = -1$ тривиален. Пусть $r \geqslant 0$ и построены триангуляция L полиэдра Q и $(r-1)$-складный набор $V \in \langle M(K) \rangle$ с

$$[\![V]\!] = (1 - `d_0\text{'}) \ldots (1 - `d_{r-1}\text{'}).$$

Положим $K = \Delta^3 L$. Пусть

$$\mathcal{E} = \{\, (\Phi^3_L)^{-1}(\overline{x}) \mid x \in L \,\}, \quad \mathcal{F} = \{\, (\Phi^2_{\Delta L})^{-1}(\overline{y}) \mid y \in \Delta L \,\}.$$

Это покрытия комплекса K стягиваемыми подкомплексами. Следующие факты следуют из свойства операции Δ.

Для любого $z \in K$ существует $F \in \mathcal{F}$ с $O(\operatorname{st} z) \subset F$.

Для любого $F \in \mathcal{F}$ существует $E \in \mathcal{E}$ с $O(F) \subset E$.

Для любых $F, F' \in \mathcal{F}$ с $F \cap F' \neq \varnothing$ существует $E \in \mathcal{E}$ с $F \cup F' \subset E$.

Пусть
$$\widetilde{V} = \langle (\Phi^3_L)^{\#}_M \rangle (V) \in \langle M(K) \rangle.$$

Набор $\widetilde{V}$ является $(\mathcal{E}, r-1)$-складным. Имеем

$$[\![\widetilde{V}]\!] = (1 - \text{‘}d_0\text{’}) \dots (1 - \text{‘}d_{r-1}\text{’}).$$

Выберем отображение $a^* \in M(K)$ с $[\![a^*]\!] = d_r$. Пусть

$$\widehat{U} = \widetilde{V}(1 - \text{‘}a^*\text{’}).$$

Набор $\widehat{U}$ является $(\mathcal{E}, r-1)$-складным. Имеем

$$[\![\widehat{U}]\!] = (1 - \text{‘}d_0\text{’}) \dots (1 - \text{‘}d_r\text{’}).$$

Введём подгруппу

$$D = \{\, j_r(Z) \mid Z \in \langle M(K) \rangle : [\![Z]\!] = 0 \,\} \subset \langle M \rangle (K)^{(r)}.$$

Достаточно показать, что $j_r(\widehat{U}) \in D$. Действительно, тогда найдется $Z \in \langle M(K) \rangle$ с $j_r(Z) = j_r(\widehat{U})$ и $[\![Z]\!] = 0$. Положив $U = \widehat{U} - Z$, получим $j_r(U) = 0$ и
$$[\![U]\!] = (1 - \text{‘}d_0\text{’}) \dots (1 - \text{‘}d_r\text{’}).$$

По лемме 4.1 набор U будет r-складен, и утверждение будет доказано.

Пусть $c\colon K \to \mathbb{Z} \times M$ – симплициальное отображение, посылающее всё в вершину $(1, 0)$, $i\colon M \to \mathbb{Z} \times M$ – каноническое вложение. Для $a \in M(K)$ имеем $f \circ e \circ a = c + i \circ a$, и, следовательно,

$$f \circ e \circ (a + a^*) = f \circ e \circ a + i \circ a^*.$$

В группе $(\mathbb{Z}\times M)(K)^{(r)}$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(f\circ e\circ a)^r &= \sum_{a\in M(K)}\widetilde{V}_a((f\circ e\circ a)^r-(f\circ e\circ(a+a^*))^r)\\ &= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)}\widetilde{V}_a(f\circ e\circ a)^s(i\circ a^*)^{r-s}\\ &= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}(f_\#^K)^{(s)}\Big(\sum_{a\in M(K)}\widetilde{V}_a(e\circ a)^s\Big)(i\circ a^*)^{r-s}\\ &= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}(f_\#^K)^{(s)}(j_s(\widetilde{V}))(i\circ a^*)^{r-s}=0,\end{aligned}$$

так как $j_s(\widetilde{V})=0$ при $s<r$, по лемме 4.1.

Так как $\mathrm{id}_{\langle M\rangle}-k\circ l=g\circ f$, то для $a\in M(K)$ имеем

$$e\circ a-k\circ l\circ e\circ a=g\circ f\circ e\circ a.$$

Возводя в степень r и суммируя по $a\in M(K)$, в группе $\langle M\rangle(K)^{(r)}$ получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(e\circ a)^{r-s}(k\circ l\circ e\circ a)^s\\ &\quad=\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(g\circ f\circ e\circ a)^r=(g_\#^K)^{(r)}\Big(\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(f\circ e\circ a)^r\Big)=0.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}j_r(\widehat{U}) &= \sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(e\circ a)^r\\ &= \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(e\circ a)^{r-s}(k\circ l\circ e\circ a)^s.\end{aligned}$$

Для $a\in M(K)$ имеем

$$k\circ l\circ e\circ a=\sum_{z\in K}k\circ h_z(l\circ e\circ a|_{\overline{z}}).$$

Введём на множестве K какой-нибудь линейный порядок.
Для $z_1,\dots,z_s\in K$ $(s\in\mathbb{N})$ пусть $m_{z_1\dots z_s}$ — число наборов, получающихся из набора $(z_1,\dots,z_s)$ перестановками элементов, и

$$R_{z_1\dots z_s}=m_{z_1\dots z_s}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)}\widehat{U}_a(e\circ a)^{r-s}\\ \times\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ a|_{\overline{z_t}}))\in\langle M\rangle(K)^{(r)}.$$

Имеем

$$j_r(\widehat{U})=\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\sum_{z_1,\dots,z_s\in K:z_1\leqslant\dots\leqslant z_s}R_{z_1\dots z_s}.$$

Возьмём $s=1,\dots,r$ и $z_1,\dots,z_s\in K$. Для доказательства того, что $j_r(\widehat{U})\in D$ достаточно показать, что $R_{z_1\dots z_s}\in D$. Возможны два случая.

1) *Случай, когда $z_t,z_{t'}\in E$ для некоторых различных t, t' и некоторого $E\in\mathcal{E}$* (например, когда $z_t=z_{t'}$ для некоторых различных t, t'). Покажем, что тогда $R_{z_1\dots z_s}=0$. Существуют такие $E_1,\dots,E_{s-1}\in\mathcal{E}$, что $z_1,\dots,z_s\in E_*$. Для $b\in M(E_*)$ пусть

$$R(b)=m_{z_1\dots z_s}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\widehat{U}_a(e\circ a)^{r-s}\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ b|_{\overline{z_t}}))\\ \in\langle M\rangle(K)^{(r)}.$$

Имеем

$$R_{z_1\dots z_s}=\sum_{b\in M(E_*)}R(b).$$

Возьмём $b\in M(E_*)$. Достаточно показать, что $R(b)=0$.

Покажем, что набор

$$W=\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\widehat{U}_a\text{‘}a\text{’}$$

$(\mathcal{E},r-s)$-складен. Возьмём $E'_1,\dots,E'_{r-s}\in\mathcal{E}$. Зададим гомоморфизм

$$p\colon\langle M(E_*\cup E'_*)\rangle\to\langle M(E'_*)\rangle,$$

для $a \in M(E_* \cup E'_*)$ полагая $p(\text{‘}a\text{’}) = \text{‘}a|_{E'_*}\text{’}$ при $a|_{E_*} = b$ и полагая $p(\text{‘}a\text{’}) = 0$ иначе. Имеем $W|_{E'_*} = p(\widehat{U}|_{E_* \cup E'_*})$. Но $\widehat{U}|_{E_* \cup E'_*} = 0$, так как набор $\widehat{U}$ является $(\mathcal{E}, r-1)$-складным. Таким образом, $W|_{E'_*} = 0$, что и требуется.

Имеем

$$R(b) = m_{z_1 \dots z_s} \binom{r}{s} j_{r-s}(W) \prod_{t=1}^{s} (k \circ h_{z_t}(l \circ e \circ b|_{\overline{z_t}})) = 0,$$

так как $j_{r-s}(W) = 0$ по лемме 4.1.

2) *Противный случай.* В этом случае симплексы $z_1, \dots, z_s$ различны, и $m_{z_1,\dots,z_s} = s!$. Для каждого $t = 1, \dots, s$ выберем $F_t \in \mathcal{F}$ с $O(\operatorname{st} z_t) \subset F_t$ и $E_t \in \mathcal{E}$ с $O(F_t) \subset E_t$. Введём подкомплекс $C = K \setminus O(F_*)$. Имеем $E_* \cup C = K$ и $F_* \cap C = \varnothing$. Подкомплексы $F_1, \dots, F_s$ попарно не пересекаются. Действительно, пусть $F_t \cap F_{t'} \neq \varnothing$ для каких-то различных t, t'. Тогда есть $E \in \mathcal{E}$ с $F_t, F_{t'} \subset E$. Тогда $z_t, z_{t'} \in E$, что невозможно в рассматриваемом случае.

Для $b \in M(E_*)$ пусть

$$R(b) = \frac{r!}{(r-s)!} \sum_{a \in M(K): a|_{E_*} = b} \widehat{U}_a (e \circ a)^{r-s} \prod_{t=1}^{s} (k \circ h_{z_t}(l \circ e \circ b|_{\overline{z_t}})) \\ \in \langle M \rangle (K)^{(r)}.$$

Имеем

$$R_{z_1 \dots z_s} = \sum_{b \in M(E_*)} R(b).$$

Возьмём $b \in M(E_*)$. Достаточно показать, что $R(b) \in D$.

Покажем, что набор

$$W = \sum_{a \in M(K): a|_{E_*} = b} \widehat{U}_a \text{‘}a\text{’}$$

$(\mathcal{E}, r-s-1)$-складен. Возьмём $E'_1, \dots, E'_{r-s-1} \in \mathcal{E}$. Рассуждая как в первом случае, получаем $W|_{E'_*} = 0$, что и требуется.

Поскольку подкомплексы $F_1, \dots, F_s$ стягиваемы и не пересекаются друг с другом и с C, то найдется такое отображение $b^\circ \in M(E_*)$, что $b^\circ|_{F_*} = 0$ и $b^\circ|_{E_* \cap C} = b|_{E_* \cap C}$. Введём обозначение: для подкомплекса

$H \subset K$ с $E_* \subset H$ и отображения $a \in M(H)$ с $a|_{E_*} = b$ пусть $a^\circ \in M(H)$ – отображение с $a^\circ|_{E_*} = b^\circ$ и $a^\circ|_{H\cap C} = a|_{H\cap C}$.

Покажем, что набор

$$W^\circ = \sum_{a\in M(K): a|_{E_*}=b} \widehat{U}_a \text{`}a^\circ\text{'}$$

$(\mathcal{E}, r-s-1)$-складен. Возьмём $E'_1, \dots, E'_{r-s-1} \in \mathcal{E}$. Зададим гомоморфизм

$$p^\circ\colon \langle M(E_* \cup E'_*)\rangle \to \langle M(E'_*)\rangle,$$

для $a \in M(E_* \cup E'_*)$ полагая $p^\circ(\text{`}a\text{'}) = \text{`}a^\circ|_{E'_*}\text{'}$ при $a|_{E_*} = b$ и $p^\circ(\text{`}a\text{'}) = 0$ иначе. Имеем $W^\circ|_{E'_*} = p^\circ(\widehat{U}|_{E_*\cup E'_*})$. Но $\widehat{U}|_{E_*\cup E'_*} = 0$, так как набор $\widehat{U}$ $(\mathcal{E}, r-1)$-складен. Таким образом, $W^\circ|_{E'_*} = 0$, что и требуется.

Покажем, что $j_{r-s}(W) = j_{r-s}(W^\circ)$. Возьмём подкомплекс $Z \subset K$, порождённый не более чем $r-s$ симплексами. Ввиду леммы 4.1, достаточно показать, что $W|_Z = W^\circ|_Z$. Если $Z \subset C$, то это следует из того, что $a|_C = a^\circ|_C$ для всех $a \in M(K)$. Иначе $Z = \overline{z} \cup Z'$, где $z \in E_*$ – симплекс, а $Z' \subset K$ – подкомплекс, порождённый не более чем $r-s-1$ симплексами. Покажем, что тогда $W|_Z = 0$. Так как все отображения, входящие в набор W, на $\overline{z}$ совпадают с b, то достаточно показать, что $W|_{Z'} = 0$. Но это следует из $(r-s-1)$-складности набора W. Аналогично, $W^\circ|_Z = 0$.

По лемме 6.3 для каждого $t = 1, \dots, s$ имеется 0-складный набор $X_t \in \langle M(K)_0\rangle$ с $j_1(X_t) = k \circ h_{z_t}(l \circ e \circ b|_{\overline{z_t}})$ и $S(X_t) \subset F_t$. Тогда

$$\begin{aligned} R(b) &= \frac{r!}{(r-s)!} j_{r-s}(W) \prod_{t=1}^{s} j_1(X_t) \\ &= \frac{r!}{(r-s)!} j_{r-s}(W^\circ) \prod_{t=1}^{s} j_1(X_t) = j_r(W^\circ X_1 \dots X_s) \end{aligned}$$

по следствию 4.3. Так как набор X_1 0-складен и принадлежит подкольцу $\langle M(K)_0\rangle$, то $[\![X_1]\!] = 0$. Значит, $[\![W^\circ X_1 \dots X_s]\!] = 0$. Таким образом, действительно, $R(b) \in D$. Утверждение 7.1 доказано. •

§8. Доказательство теоремы 1.1

По [1, теорема 4], $\operatorname{ord} f \leqslant \deg f$. Пусть $\operatorname{ord} f \leqslant r$ ($r \in \mathbb{N}$). Покажем, что $\deg f \leqslant r$. Возьмём $d_0, \dots, d_r \in B(X)$. Пусть Q – полиэдр, гомеоморфный тору T^{r+1}, $p_0, \dots, p_r : Q \to T$ – проекции. Есть такое непрерывное отображение $g\colon X \to Q$, что $[p_s \circ g] = d_s$, $s = 0, \dots, r$. По утверждению 7.1 существуют триангуляция K полиэдра Q и r-складный набор $U \in \langle M(K) \rangle$ с

$$[\![U]\!] = (1 - `[p_0]') \dots (1 - `[p_r]').$$

Пусть $V = \langle g^{\#}_{T} \circ \eta^{Q}_{\#} \rangle(|U|) \in \langle T(X) \rangle$. По леммам 3.3 и 3.2 набор V r-складен. Имеем

$$\begin{aligned}[V] &= [\langle g^{\#}_{T} \circ \eta^{Q}_{\#} \rangle(|U|)] = \langle B(g) \rangle([\langle \eta^{Q}_{\#} \rangle(|U|)]) \\ &= \langle B(g) \rangle([\![U]\!]) = (1 - `d_0') \dots (1 - `d_r').\end{aligned}$$

Теперь

$$\begin{aligned}\sum_{q_0 \dots, q_r = 0,1} (-1)^{q_0 + \dots + q_r} f(q_0 d_0 + \dots + q_r d_r) &= f^{+}((1 - `d_0') \dots (1 - `d_r')) \\ &= f^{+}([V]) = 0\end{aligned}$$

по лемме 3.1, что и требуется. •

Литература

1. С. С. Подкорытов, *Порядок функции на группе Брушлинского.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 222–228.
2. С. С. Подкорытов, *Порядок функции на группе Брушлинского двумерного полиэдра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 181–190.

Podkorytov S. S. On homotopy invariants of maps to the circle.

Homotopy classes of maps of a space X to the circle T form an Abelian group $B(X)$ (*Bruschlinsky group*). A map $f\colon B(X) \to C$, where C is an Abelian group, has *order* at most r if for a continuous map $a\colon X \to T$ the value $f([a])$ can be $\mathbb{Z}$-linearly expressed in terms of the indicator function $I_r(a)\colon (X \times T)^r \to \mathbb{Z}$ of the rth Cartesian power of the graph of a. We prove that the order of f equals the algebraic degree of f. (A map between abelian groups has *degree* at most r if its finite differences of order $r+1$ vanish.)

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ssp@pdmi.ras.ru

Поступило 11 мая 2009 г.