Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

С. Ю. Пилюгин, Я. Ригер

ОБЩИЕ УСЛОВИЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Введение

В теории классических динамических систем (потоков и каскадов) свойство отслеживания псевдотраекторий изучается достаточно интенсивно (см., например, монографии [1, 2]). Это свойство означает, что около приближенных траекторий системы есть точные траектории.

Другой тип свойств отслеживания (обратные свойства отслеживания) связан со следующим вопросом: предположим, что нам дано семейство отображений, аппроксимирующих отображение, которое порождает изучаемую динамическую систему. Для любой ли точной траектории системы найдется близкая к ней приближенная траектория, порождаемая данным семейством? Такие свойства изучались различными авторами (см., например, [3–5]).

В последнее время свойства отслеживания стали изучать для динамических систем, порождаемых многозначными отображениями. Было показано, что такими свойствами обладают так называемые сжимающие системы (см. [6–8]).

В современной литературе можно найти различные определения гиперболичности для систем, порождаемых многозначными отображениями. Одно из таких определений было дано Акином в книге [9]. Он называет множество гиперболическим, если на нем система обладает свойствами разделения траекторий и отслеживания.

Другой подход использован в статьях [10, 11], где гиперболичность определяется для гладких отношений. Сандер [11] изучает гладкие отношения, графики которых имеют пустую внутренность (отметим, что пустота внутренности является нетипичной для многозначных

Ключевые слова : динамическая система, многозначное отображение, отслеживание, гиперболичность.

Работа первого автора поддержана CRC 701 “Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics” (Universität Bielefeld, Germany).

отображений, изучаемых в данной работе). Кроме того, из условий гиперболичности Акина и Сандер вытекает единственность отслеживающей траектории, что крайне неестественно для систем, порождаемых многозначными отображениями.

В предыдущей работе [12] нами было предложено условие гиперболичности, обобщающее как классическое понятие гиперболичности для однозначных отображений, так и определение сжимающих многозначных отображений из [8]. Недостатком этого условия является то, что оно применимо лишь к многозначным отображениям определенной структуры (точная формулировка приведена в замечании 1).

В данной работе мы предлагаем определение гиперболичности для многозначных отображений общего вида (основанное на свойствах локальных селекторов) и доказываем, что система с этим свойством гиперболичности обладает липшицевыми свойствами отслеживания и обратного отслеживания. Мы показываем, что в случае отображений, у которых образы являются выпуклыми полиэдрами, введенное условие гиперболичности может быть получено как следствие простых условий на поведение "вершин" полиэдров.

Введем основные определения. Обозначим через $C(\mathbb{R}^m)$ множество всех замкнутых подмножеств, а через $CC(\mathbb{R}^m)$ множество всех выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Расстояние между двумя компактными подмножествами A и B пространства $\mathbb{R}^m$ измеряется либо отклонением

$$\operatorname{dev}(A,B)=\max_{a\in A}\operatorname{dist}(a,B),$$

либо симметричным расстоянием по Хаусдорфу

$$\operatorname{dist}_H(A,B)=\max(\operatorname{dev}(A,B),\operatorname{dev}(B,A)).$$

Выпуклая оболочка множества $A\subset\mathbb{R}^m$ обозначается $co(A)$.

Для $x\in\mathbb{R}^m$ и $a>0$ мы обозначаем через $B_a(x)$ шар радиуса a с центром в точке x.

Если $x\in\mathbb{R}^m$ и $M\in C(\mathbb{R}^m)$, то $\operatorname{Proj}(x,M)$ обозначает множество всех точек y из M, для которых $|x-y|=\operatorname{dist}(x,M)$. Если $M\in CC(\mathbb{R}^m)$, то множество $\operatorname{Proj}(x,M)$ состоит из одной точки; в этом случае определен вектор $\operatorname{Dev}(x,M)=\operatorname{Proj}(x,M)-x$.

Мы рассматриваем динамические системы на $\mathbb{R}^m$, порожденные отображениями $F:\mathbb{R}^m\to C(\mathbb{R}^m)\setminus\{\varnothing\}$ (которые естественно считать многозначными отображениями $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$) и их итерациями.

Мы отождествляем отображение F и соответствующую динамическую систему.

Последовательность $\eta = \{p_k\}$ является траекторией системы F, если

$$p_{k+1} \in F(p_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность $\xi = \{x_k\}$ называется d-псевдотраекторией системы F, если на каждом шаге допускается ошибка величины меньше $d > 0$, т.е.

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, F(x_k)) < d, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Говорят, что система F обладает свойством отслеживания, если по любому $\epsilon > 0$ можно указать такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ системы F найдется такая траектория $\eta = \{p_k\}$, что

$$\operatorname{dist}(x_k, p_k) < \epsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Как обычно, для $\eta = \{\eta_k\} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{Z}}$ мы пишем

$$||\eta||_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\eta_k|.$$

2. Отслеживание

Рассмотрим многозначное отображение $F : \mathbb{R}^m \to C(\mathbb{R}^m) \setminus \{\varnothing\}$ и будем называть его селектором такое отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, что $f(x) \in F(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Введем наше определение гиперболичности. Будем говорить, что отображение F гиперболично, если оно локально параметризуется семейством гиперболических селекторов в следующем смысле:

(P1) Для любого $x \in \mathbb{R}^m$ заданы такие линейные подпространства $U(x)$, $S(x) \subset \mathbb{R}^m$, что

$$U(x) \oplus S(x) = \mathbb{R}^m,$$

причем если $P(x)$ и $Q(x)$ – соответствующие дополнительные проекторы из $\mathbb{R}^m$ на $U(x)$ и $S(x)$, то существует такое $N \geqslant 1$, что

$$|P(x)|, \ |Q(x)| \leqslant N$$

для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

(P2) Существуют такие константы $\lambda \in (0,1)$, $\kappa > 0$, $l > 0$ и $a > 0$, что для любой точки $(x,z) \in \operatorname{graph}(F)$ найдется локальный селектор f_z отображения F, т.е. однозначная функция $f_z : B_a(x) \to \mathbb{R}^m$, обладающая следующими свойствами: $f_z(x) = z$, $f_z(x') \in F(x')$ для $x' \in B_a(x)$ и если $y, v \in \mathbb{R}^m$, $|v| \leqslant a$ и $|z-y| \leqslant a$, то

$$f_z(x+v) = z + A_z(x)v + b_z(x,v), \tag{1}$$

где $A_z(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – такое линейное отображение, что ограничение
$$P(y)A_z(x)\big|_{U(x)} : U(x) \to U(y) \tag{2}$$

является изоморфизмом,

$$|P(y)A_z(x)P(x)v| \geqslant \lambda^{-1}|P(x)v|, \tag{3}$$
$$|P(y)A_z(x)Q(x)v| \leqslant \kappa|Q(x)v|, \tag{4}$$
$$|Q(y)A_z(x)P(x)v| \leqslant \kappa|P(x)v|, \tag{5}$$
$$|Q(y)A_z(x)Q(x)v| \leqslant \lambda|Q(x)v|, \tag{6}$$

а $b_z(x,\cdot)$ – непрерывное по v малое возмущение, для которого справедлива оценка

$$|b_z(x,v)| \leqslant l|v|. \tag{7}$$

Замечание 1. Отметим, что определенное в [12] свойство гиперболичности многозначных отображений является частным случаем свойства, определенного выше.

В [12] рассматривались многозначные отображения вида

$$F(x) = L(x) + M(x), \tag{8}$$

где $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – непрерывное однозначное отображение, а $M : \mathbb{R}^m \to CC(\mathbb{R}^m)$ – многозначное отображение с выпуклыми компактными образами.

Предполагалось, что существуют такие константы $N \geqslant 1$, $\lambda \in (0,1)$, $\kappa > 0$, $l > 0$ и $a > 0$, что

- выполнено условие (P1);

• если для $x, y, v \in \mathbb{R}^m$ выполнены неравенства $|v| \leqslant a$ и $\operatorname{dist}(y, F(x)) \leqslant a$, то мы можем представить $L(x+v)$ в виде

$$L(x+v) = L(x) + A(x)v + b(x,v),$$

где $A(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – такое непрерывное по x линейное отображение, что (после замены $A_z(x)$ на $A(x)$ в (P2)) ограничение (2) является изоморфизмом, удовлетворяющим оценке (3), и выполнены неравенства (4)–(6);

• $|b(x,v)| \leqslant l|v|$;

• $\operatorname{dist}_H(M(x+v), M(x)) \leqslant l|v|$.

Рассмотрим отображение F вида (8), удовлетворяющее сформулированным выше условиям, и точку $z \in F(x)$ и определим локальный селектор f_z равенством

$$f_z(x+v) = z + A(x)v + \operatorname{Dev}(z + A(x)v, F(x+v));$$

таким образом, мы берем $A(x)$ в качестве $A_z(x)$ и полагаем

$$b_z(x+v) = \operatorname{Dev}(z + A(x)v, F(x+v)).$$

Ясно, что $f_z(x) = z$, $f_z(x+v) \in F(x+v)$ и $A_z(x) = A(x)$ обладает свойствами, сформулированными в условии (P2). Так как отображение F непрерывно и выпукло, отображение b_z непрерывно.

Из включения $z \in F(x)$ следует, что

$$\operatorname{dist}(z + A(x)v, F(x+v)) \leqslant \operatorname{dev}(F(x) + A(x)v, F(x+v))$$

$$= \operatorname{dev}(L(x) + A(x)v + M(x), L(x) + A(x)v + b(x,v) + M(x+v))$$

$$= \operatorname{dev}(M(x), b(x,v) + M(x+v))$$

$$\leqslant |b(x,v)| + \operatorname{dist}_H(M(x), M(x+v)) \leqslant 2l|v|,$$

а это и означает, что выполнено неравенство (7) (с заменой l на $2l$).

Теперь мы покажем, что если отображение F гиперболично в смысле данного нами определения, то динамическая система

$$x \mapsto F(x) \tag{9}$$

обладает липшицевым свойством отслеживания.

Теорема 1. *Пусть $F : \mathbb{R}^m \to C(\mathbb{R}^m)$ – такое гиперболическое многозначное отображение, что*

$$\lambda + \kappa + 2lN < 1.$$

Если $\xi = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – d-псевдотраектория системы (9) с $d < a/L$, то существует такая траектория $\eta = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ системы (9), что

$$\|\xi - \eta\|_\infty \leqslant Ld,$$

где

$$L = \frac{2N}{1 - \lambda - \kappa - 2lN}.$$

Доказательство. Фиксируем индекс $k \in \mathbb{Z}$, обозначим $y = x_{k+1}$ и рассмотрим точку $z \in \mathrm{Proj}\,(x_{k+1}, F(x_k))$.

Ясно, что $L > 1$ и $d < a$. Поэтому $|y - z| < a$, и в силу свойства (P2) существует такой непрерывный селектор f_z отображения F (обозначаемый ниже f_k), что

$$f_k(x_k + v) = f_k(x_k) + A_k(x_k)v + b_k(x_k, v) \in F(x_k + v), \quad |v| \leqslant a.$$

Таким образом, чтобы найти отслеживающую траекторию, нам достаточно найти такую последовательность v_k, что $|v_k| \leqslant Ld$ и

$$x_{k+1} + v_{k+1} = f_k(x_k + v_k).$$

Положим $b = d/(2L)$,

$$H_k = \{v \in \mathbb{R}^m : |P(x_k)v|, |Q(x_k)v| \leqslant b\}$$

и $H = \prod_{k\in\mathbb{Z}} H_k$.

Заметим, что если $v \in H_k$, то $|v| \leqslant 2b = Ld$. Так как каждое из множеств H_k компактно и выпукло, множество H компактно (относительно тихоновской топологии) и выпукло.

Из свойства (P2) следует, что отображение $G_k : U(x_k) \to U(x_{k+1})$, определенное равенством

$$G_k(w) := -P(x_{k+1})A_k(x_k)w,$$

обладает следующими свойствами: $G_k(0) = 0$,

$$|G_k(w)| \geqslant \lambda^{-1}|w|, \quad w \in U(x_k),$$

и $G_k(B^b_{x_k}) \supset B^{b/\lambda}_{x_{k+1}}$, где

$$B^c_x := \{z \in U(x) : |z| \leqslant c\}.$$

Таким образом, обратное отображение G_k^{-1} определено на $B^{b/\lambda}_{x_{k+1}}$, и

$$|G_k^{-1}(z) - G_k^{-1}(z')| \leqslant \lambda|z - z'|, \quad z, z' \in B^{b/\lambda}_{x_{k+1}}. \tag{10}$$

Определим оператор $T : H \to H$ равенствами

$$Q(x_{k+1})T_{k+1}(V) := Q(x_{k+1})\left(f_k(x_k + v_k) - x_{k+1}\right), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P(x_k)T_k(V) := G_k^{-1}\,(P(x_{k+1})\,\{b_k(x_k, v_k) \\ + A_k(x_k)Q(x_k)v_k + f_k(x_k) - x_{k+1} - v_{k+1}\}) \end{aligned} \tag{12}$$

для $V = \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in H$.

Покажем, что определение корректно. Вектор, к которому в (12) применяется отображение G_k^{-1}, оценивается так:

$$\begin{aligned} &|P(x_{k+1})\,\{b_k(x_k, v_k) + A_k(x_k)Q(x_k)v_k + f_k(x_k) - x_{k+1} - v_{k+1}\}| \\ &\leqslant Nl|v_k| + \kappa|Q(x_k)v_k| + Nd + b \leqslant 2lNb + \kappa b + Nd + b \\ &\leqslant \left(2lN + \kappa + \frac{Nd}{b} + 1\right)b \leqslant \lambda^{-1}b \end{aligned}$$

для $V = \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in H$, поскольку

$$b^{-1} = \frac{1}{Nd}(1 - \lambda - \kappa - 2lN) \leqslant \frac{1}{Nd}(\lambda^{-1} - 1 - \kappa - 2lN).$$

Таким образом, аргумент выражения $G_k^{-1}(\cdot)$ в (12) принадлежит шару $B^{b/\lambda}_{x_{k+1}}$. Из оценки (10) следует, что $|P(x_k)T_k(V)| \leqslant b$.

Далее,

$$|Q(x_{k+1})T_{k+1}(V)|$$

$$\leqslant |Q(x_{k+1})A_k(x_k)P(x_k)v_k| + |Q(x_{k+1})A_k(x_k)Q(x_k)v_k|$$
$$+|Q(x_{k+1})b_k(x_k, v_k)| + |Q(x_{k+1})(f_k(x_k) - x_{k+1})|$$
$$\leqslant \kappa|P(x_k)v_k| + \lambda|Q(x_k)v_k| + lN|v_k| + Nd \leqslant \kappa b + \lambda b + 2lNb + \frac{2N}{L}b = b.$$

Таким образом, $T(V) \in H$. Оператор T непрерывен в тихоновской топологии, так как компонента T_k зависит только от v_{k-1}, v_k, v_{k+1}. Из теоремы Тихонова–Шаудера следует, что T имеет неподвижную точку $V \in H$. Для этой неподвижной точки верны равенства

$$Q(x_{k+1})v_{k+1} = Q(x_{k+1})\left(f_k(x_k + v_k) - x_{k+1}\right) \tag{13}$$

и

$$-P(x_{k+1})A_k(x_k)P(x_k)v_k = G_k(P(x_k)v_k)$$
$$= P(x_{k+1})\left\{b_k(x_k, v_k) + A_k(x_k)Q(x_k)v_k + f_k(x_k) - x_{k+1} - v_{k+1}\right\},$$

или

$$P(x_{k+1})v_{k+1} = P(x_{k+1})(f_k(x_k + v_k) - x_{k+1}). \tag{14}$$

Складывая соотношения (13) и (14), мы заключаем, что последовательность $\eta = \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с $p_k = x_k + v_k$ является искомой отслеживающей траекторией.

3. Обратное отслеживание

Так как основная логика доказательства теоремы об обратном отслеживании та же, что в случае прямого отслеживания, рассмотренном выше, мы лишь отметим основные различия. Хотя задачу об обратном отслеживании можно рассматривать в глобальном варианте, мы остановимся на ее локальной версии, что позволит использовать локально определенные аппроксимирующие отображения.

Мы предположим, что отображение F гиперболично на фиксированной траектории $\eta = \{p_k\}$ в следующем смысле: существуют такие константы $N \geqslant 1$, $a, \kappa, l > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что условие (P1) выполнено для точек $x = p_k$, а условие (P2) выполнено для точек $x = p_k$ и $y = z = p_{k+1}$ и для таких векторов v, что $|v| \leqslant a$.

В нашей теореме об обратном отслеживании мы рассматриваем два класса последовательностей отображений, которые аппроксимируют заданное многозначное отображение F. Фиксируем $d > 0$.

Класс 1. Рассмотрим последовательность отображений

$$\Phi = \left\{\Phi_k : \mathbb{R}^m \to CC(\mathbb{R}^m)\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

в которой каждое из отображений Φ_k непрерывно относительно метрики Хаусдорфа и удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{dev}\left(F(p_k+v), \Phi_k(p_k+v)\right) \leqslant d, \quad |v| \leqslant a. \tag{15}$$

Класс 2. Обозначим через

$$CS(\Psi, x, a) = \{\psi \in C(B_a(x), \mathbb{R}^m) \;:\; \psi(y) \in \Psi(y),\; y \in B_a(x)\}$$

множество непрерывных локальных селекторов многозначного отображения Ψ со стандартной sup-нормой.

Рассмотрим такую последовательность отображений

$$\Phi = \{\Phi_k : \mathbb{R}^m \to C(\mathbb{R}^m)\},$$

что

$$\operatorname{dev}\left(CS(F, p_k, a), CS(\Phi_k, p_k, a)\right) \leqslant d, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

В обоих случаях мы будем говорить, что последовательность $x_k \in \mathbb{R}^m$ является траекторией последовательности Φ, если $x_{k+1} \in \Phi_k(x_k)$.

Замечание 2. Теорема 1 показывает, что при доказательстве наличия свойства отслеживания требование выпуклости образов отображения F является излишним; в то же время доказать наличие свойства обратного отслеживания для аппроксимирующих отображений Φ_k класса 1 без предположения о выпуклости образов нам не удается.

Теорема 2. *Предположим, что траектория $\eta = \{p_k\}$ отображения F является гиперболической в смысле приведенного выше определения. Если*

$$\lambda + \kappa + 2lN < 1, \tag{17}$$

то F обладает липшицевым свойством обратного отслеживания: для любого семейства Φ отображений классов 1 и 2 с $d < a/L$ существует такая траектория $\xi = \{x_k\}$ семейства Φ, что

$$\|\xi - \eta\|_\infty \leqslant Ld,$$

где
$$L = \frac{2N}{1-\lambda-\kappa-2lN}.$$

Доказательство. По нашему предположению существуют локальные гиперболические селекторы f_k отображения F такие, что $f_k(p_k) = p_{k+1}$,

$$f_k(p_k+v) = f_k(p_k) + A_k(p_k)v + b_k(p_k, v),$$
$$|P(p_{k+1})A_k(p_k)P(p_k)v| \geqslant \lambda^{-1}|P(p_k)v|$$

и т.д.

Случай класса 1. Из неравенств (15) следует, что $\phi_k(p_k+v) := \operatorname{Proj}(f_k(p_k+v), \Phi_k(p_k+v))$ – такой локальный селектор отображения Φ_k, что $|f_k(p_k+v) - \phi_k(p_k+v)| \leqslant d$ при $|v| \leqslant a$. Так как отображение Φ_k непрерывно относительно метрики Хаусдорфа и имеет выпуклые образы, селекторы ϕ_k непрерывны по теореме 1.7.1 книги [13].

Случай класса 2. Из условия (16) непосредственно следует существование таких непрерывных селекторов ϕ_k отображений Φ_k, что

$$|f_k(p_k+v) - \phi_k(p_k+v)| \leqslant d, \quad |v| \leqslant a.$$

В обоих случаях мы ищем такую последовательность v_k с $|v_k| \leqslant Ld$, что
$$p_{k+1} + v_{k+1} = \phi_k(p_k+v_k) \in \Phi_k(p_k+v_k).$$

Как и в доказательстве теоремы 1, положим $b = d/(2L)$, $H_k := \{v \in \mathbb{R}^m : |P(p_k)v|, |Q(p_k)v| \leqslant b\}$ и $H := \prod_{k\in\mathbb{Z}} H_k$. Теперь

$$G_k(w) := -P(p_{k+1})A_k(p_k)w, \tag{18}$$

а оператор $T : H \to H$ задается формулами

$$Q(p_{k+1})T_{k+1}(V) := Q(p_{k+1})\left(\phi_k(p_k+v_k) - p_{k+1}\right),$$
$$P(p_k)T_k(V) := G_k^{-1}(P(p_{k+1})\{b_k(p_k, v_k) + A_k(p_k)Q(p_k)v_k$$
$$-(f_k-\phi_k)(p_k+v_k) + f_k(p_k) - p_{k+1} - v_{k+1}\}.$$

Для завершения доказательства используются те же оценки и рассуждения, что в теореме 1; отметим лишь, что слагаемое Nd появляется теперь при оценке члена $P(\cdot)(\phi_k - f_k)(\cdot)$, а не $P(\cdot)(f_k(x_k) - x_{k+1})$.

4. Отображения с полиэдральными образами

Рассмотрим многозначное отображение $F : \mathbb{R}^m \to CC(\mathbb{R}^m)$, которое каждой точке сопоставляет полиэдр, являющийся выпуклой оболочкой конечного числа “вершин” $s_1, \dots, s_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:

$$F(x) = co\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{19}$$

Замечание 3. Конечно, мы не исключаем тот случай, когда при некоторых значениях x какие-то из точек s_i не являются вершинами полиэдра $F(x)$ в стандартном геометрическом смысле. Так как для нас важно прояснить характер условий на поведение “вершин” s_i, гарантирующих гиперболичность многозначного отображения $F(x)$, мы ограничиваемся приведенной выше упрощенной характеризацией вида (19).

Предположим, что существуют такие константы $N \geqslant 1$, $a, \kappa, l > 0$ и $\lambda \in (0, 1)$, что

(P1′) выполнено условие (P1), и размерности пространств $U(x)$ одни и те же для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

(P2′) При любых $x, y, v \in \mathbb{R}^m$ с $|v| \leqslant a$ и $|s_i(x) - y| \leqslant a$ верны представления

$$s_i(x + v) = s_i(x) + A_i(x)v + b_i(x, v) \tag{20}$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$, в которых $A_i(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – такие линейные отображения, что для любого v существует такое направление растяжения $p(x, v) \in \mathbb{R}^m$ с $|p(x, v)| = 1$, что

$$\langle p(x, v), P(y)A_i(x)P(x)v\rangle \geqslant \lambda^{-1}|P(x)v|, \tag{21}$$

выполнены аналоги условий (4)–(6) (с заменой $A_z(x)$ на $A_i(x)$), а $b_i(x, \cdot)$ – малые непрерывные возмущения, для которых верен аналог условия (7).

Замечание 4. С геометрической точки зрения, неравенство (21) гарантирует, что все “неустойчивые возмущения” $P(y)A_i(x)P(x)v$ сдвигают все точки s_i в одном направлении, так что их перемещения не могут “погасить” друг друга.

Мы покажем, что в случае многозначных отображений вида (19) введенное нами общее условие гиперболичности является следствием условий, наложенных на поведение конечного числа точек.

Теорема 3. *Пусть $F : \mathbb{R}^m \to CC(\mathbb{R}^m)$ – такое многозначное отображение вида (19), что для точек s_i выполнены условия (P1′) и (P2′). Предположим, что проекторы P и Q удовлетворяют условию Липшица с такой константой $K > 0$, что*

$$K \operatorname{diam}(F(x)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|A_i(x)\| < \lambda^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{22}$$

Если

$$\lambda_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \max(\lambda_1(x), \lambda_2(x)) < 1,$$

где

$$\lambda_1(x) := (\lambda^{-1} - K \operatorname{diam}(F(x)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|A_i(x)\|)^{-1}$$

и

$$\lambda_2(x) := \lambda + K \operatorname{diam}(F(x)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|A_i(x)\|,$$

то F – гиперболическое многозначное отображение с константами N, λ_0,

$$\kappa_0 := \kappa + \sup_{x \in \mathbb{R}^m} K \operatorname{diam}(F(x)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|A_i(x)\|,$$

l и a.

Доказательство. Рассмотрим любую точку $(x, z) \in \operatorname{graph}(F)$. Из формулы (19) следует, что существуют такие $\theta_1, \ldots, \theta_n \in [0, 1]$ с $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$, что

$$z = \sum_{i=1}^n \theta_i s_i(x).$$

Определим селектор $f_z : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ как выпуклую комбинацию

$$f_z(x') := \sum_{i=1}^n \theta_i s_i(x').$$

Тогда

$$f_z(x + v) = \sum_{i=1}^n \theta_i s_i(x + v) = \sum_{i=1}^n \theta_i \left(s_i(x) + A_i(x)v + b_i(x, v)\right)$$

$$= s(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i A_i(x) v + \sum_{i=1}^n \theta_i b_i(x, v) =: z + A(x)v + b(x, v).$$

Проверим выполнение условия (P2).

Рассмотрим такую точку y, что $|y-z| \leqslant a$, и определим $y_i = y - z + s_i(x)$. Тогда $|y_i - s_i(x)| \leqslant a$.

Так как проекторы P удовлетворяют условию Липшица с константой K, из оценок (21) следует, что

$$\begin{aligned}
&|P(y)A(x)P(x)v| \geqslant \langle p(x,v), P(y)A(x)P(x)v\rangle \\
&= \left\langle p(x,v), \sum_{i=1}^{n} \theta_i P(y)A_i(x)P(x)v \right\rangle \\
&= \left\langle p(x,v), \sum_{i=1}^{n} \theta_i P(y_i)A_i(x)P(x)v \right\rangle \\
&+ \left\langle p(x,v), \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(P(y) - P(y_i)\right) A_i(x)P(x)v \right\rangle \\
&\geqslant \lambda^{-1}|P(x)v| - K \operatorname{diam}\left(F(x)\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|A_i(x)\| \; |P(x)v| \\
&= \left(\lambda^{-1} - K \operatorname{diam}\left(F(x)\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|A_i(x)\|\right) |P(x)v| = \lambda_1^{-1}(x)|P(x)v|.
\end{aligned}$$

Поэтому ограничение

$$P(y)A(x)\big|_{U(x)} : U(x) \to U(y)$$

является изоморфизмом (напомним, что размерности пространств $U(x)$ и $U(y)$ совпадают). Из той же оценки следует неравенство (3).

Для того чтобы доказать неравенства (4)–(6), отметим, что

$$\begin{aligned}
&|P(y)A(x)Q(x)v| = \left| P(y) \sum_{i=1}^{n} \theta_i A_i(x)Q(x)v \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \theta_i P(y_i)A_i(x)Q(x)v \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} \theta_i \left(P(y) - P(y_i)\right) A_i(x)Q(x)v \right| \\
&\leqslant \kappa|Q(x)v| + K \operatorname{diam}\left(F(x)\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|A_i(x)\| |Q(x)v| \\
&= \left(\kappa + K \operatorname{diam}\left(F(x)\right) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|A_i(x)\|\right) |Q(x)v| \leqslant \kappa_0|Q(x)v|,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|Q(y)A(x)P(x)v| = \left|Q(y)\sum_{i=1}^{n}\theta_i A_i(x)P(x)v\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\theta_i Q(y_i)A_i(x)P(x)v\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(Q(y)-Q(y_i)\right)A_i(x)P(x)v\right| \\
&\leqslant \kappa|P(x)v| + K\,\mathrm{diam}\,(F(x))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|A_i(x)\||P(x)v| \\
&= \left(\kappa + K\,\mathrm{diam}\,(F(x))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|A_i(x)\|\right)|P(x)v| \leqslant \kappa_0|P(x)v|
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&|Q(y)A(x)Q(x)v| = \left|Q(y)\sum_{i=1}^{n}\theta_i A_i(x)Q(x)v\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\theta_i Q(y_i)A_i(x)Q(x)v\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(Q(y)-Q(y_i)\right)A_i(x)Q(x)v\right| \\
&\leqslant \lambda|Q(x)v| + K\,\mathrm{diam}\,(F(x))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|A_i(x)\||Q(x)v| \\
&= \left(\lambda + K\,\mathrm{diam}\,(F(x))\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|A_i(x)\|\right)|Q(x)v| = \lambda_2(x)|Q(x)v|.
\end{aligned}
$$

Наконец,

$$
|b(x,v)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\theta_i|b_i(x,v)| \leqslant l|v|,
$$

откуда следует оценка (7).

Следствие. *Если*

$$
\lambda_0 + \kappa_0 + 2lN < 1,
$$

то F *обладает липшицевым свойством отслеживания по теореме* 1 *и липшицевым обратным свойством отслеживания в смысле теоремы* 2.

Литература

1. S. Yu. Pilyugin, *Shadowing in Dynamical Systems.* — Lect. Notes Math. **1706** (1999).
2. K. Palmer, *Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications.* Kluwer, Dordrecht, 2000.
3. W.-J. Beyn, *On the numerical approximation of phase portraits near stationary points.* — SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 1095–1113.

4. R. M. Corless, S. Yu. Pilyugin, *Approximate and real trajectories for generic dynamical systems.* — J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 409–423.
5. A. Al-Nayef et al., *Bi-shadowing and delay equations.* — Dynam. Stability Systems **11** (1996), 121–134.
6. V. Glavan, V. Gutu, *On the dynamics of contractive relations.* — In: Analysis and Optimization of Differential Systems, Kluwer, Dordrecht 2003, pp. 179–188.
7. V. Glavan, V. Gutu, *Attractors and fixed points of weakly contracting relations.* — Fixed Point Theory **5(2)** (2004), 265–284.
8. S. Yu. Pilyugin, J. Rieger, *Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. Contractive case.* — Topol. Methods Nonlinear Anal. **32** (2008), 139–149.
9. E. Akin, *Simplicial Dynamical Systems.* — Mem. Amer. Math. Soc. **667** (1999).
10. R. McGehee, E. Sander, *A new proof of the stable manifold theorem.* — Z. angew. Math. Phys. **47** (1996), 497–513.
11. E. Sander, *Hyperbolic sets for noninvertible maps and relations.* — Discrete Contin. Dynam. Systems **8(2)** (1999), 339–357.
12. S. Yu. Pilyugin, J. Rieger, *Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. Hyperbolic case.* — Top. Meth. Nonlin. Anal. **32** (2008), 151–164.
13. J. P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions.* Springer, Berlin, 1984.

Pilyugin S. Yu., Rieger J. General hyperbolicity conditions for set-valued mappings.

We give a definition of hyperbolicity for dynamical systems generated by set-valued mappings of general form in terms of local selectors. It is shown that a system hyperbolic in this sense has the shadowing and inverse shadowing properties. It is also shown that the hyperbolicity property holds true for a certain class of set-valued mappings in which images of points are convex polytopes.

Поступило 29 января 2009 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: sp@sp1196.spb.edu

Universität Bielefeld,
Bielefeld, Germany

E-mail: jrieger@math.uni-bielefeld.de