Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

А. В. Малютин

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ПСЕВДОХАРАКТЕРОВ ГРУПП КОС

1. Введение

0.1. Псевдохарактеры. Пусть G – произвольная группа. Функционал $\varphi : G \to \mathbb{R}$ называется *квазихарактером* (или *квазиморфизмом*) с *дефектом* C, если выполняется следующее условие:

$$\sup_{g_1,g_2\in G} |\varphi(g_1g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2)| = C < \infty. \tag{1}$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$\forall\, z \in \mathbb{Z}, \quad g \in G: \ \varphi(g^z) = z\varphi(g), \tag{2}$$

то φ называют *псевдохарактером* (или *псевдоморфизмом*).

Как известно, для любого квазихарактера $\psi : G \to \mathbb{R}$ существует единственный псевдохарактер $\overline{\psi} : G \to \mathbb{R}$ такой, что функционал $\psi-\overline{\psi}$ ограничен. При этом для любого $g \in G$ имеет место равенство

$$\overline{\psi}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(g^n)}{n}.$$

Из определения ясно, что псевдохарактеры группы G образуют вещественное линейное пространство. Это пространство обозначается через $\mathcal{PX}(G)$. Каждый гомоморфизм из G в $\mathbb{R}$ является псевдохарактером с дефектом 0, так что пространство $\mathrm{Hom}\,(G,\mathbb{R})$ вещественнозначных гомоморфизмов группы G является подпространством в $\mathcal{PX}(G)$. Как хорошо известно, *любой псевдохарактер является инвариантом сопряженности.*

Ключевые слова : трансфер, квазиморфизмы, узлы и зацепления.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты No. 08-01-00379-а и No. 09-01-12175-офи_м .

0.2. Псевдохарактеры групп кос. *Группа кос Артина бесконечного ранга* задается копредставлением

$$B_\infty := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots \;\middle|\; \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geqslant 2;\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \right\rangle.$$

Элементы группы B_∞ называются *косами*, а образующие σ_i – *артиновскими образующими*. Для целого $n \geqslant 2$ *группа кос Артина ранга* n есть подгруппа в B_∞, порожденная образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Группа B_2 изоморфна $\mathbb{Z}$. Группы B_0 и B_1 полагаются тривиальными. При $k < n$ группа B_k является подгруппой в B_n. В настоящей работе вложение $B_k \to B_n$ обозначается через $\mathcal{I}_{n,k}$.

При $n \geqslant 3$ пространство псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_n)$ имеет бесконечную размерность (это следует, например, из результатов работы [2]). Пространство $\operatorname{Hom}(B_n, \mathbb{R})$ при $n \geqslant 2$ имеет размерность 1. Поскольку $B_2 \simeq \mathbb{Z}$, пространство $\mathcal{PX}(B_2)$ совпадает с $\operatorname{Hom}(B_2, \mathbb{R})$. Пространство $\mathcal{PX}(B_\infty)$ также состоит только из гомоморфизмов (и имеет размерность 1).

Единственный (с точностью до умножения на константу) вещественнозначный гомоморфизм (т.е. псевдохарактер с нулевым дефектом) для группы кос задается правилом $\sigma_i \mapsto 1$. Мы будем называть этот псевдохарактер *экспоненциальной суммой*. Другие описанные в литературе псевдохарактеры для B_n – это закрученность косы (см. [10]) и псевдохарактеры, соответствующие сигнатурам замыканий кос (см. [6] – сами сигнатуры являются квазихарактерами). Для B_3 рассматривается также квазихарактер, являющийся при стандартном гомоморфизме $B_3 \to \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ поднятием знаменитой функции Радемахера, которая является квазиморфизмом для $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$. Однако, соответствующий функции Радемахера псевдохарактер в B_3 является линейной комбинацией закрученности и экспоненциальной суммы. (Это следует из результатов работ [6] и [8].)

0.3. Отправным пунктом для настоящего исследования послужила задача нахождения новых псевдохарактеров для групп кос. Эта задача интересна по следующей причине. С одной стороны, как недавно стало известно, псевдохарактеры групп кос имеют различные применения в маломерной топологии и динамике (см. [5–8, 10, 11]). С другой стороны, несмотря на то, что пространство псевдохарактеров группы кос бесконечномерно, в настоящий момент в литературе описано лишь несколько серий псевдохарактеров групп кос (см. вышеуказанные работы).

В настоящей работе представлен, наряду с прочими результатами, способ получения новых псевдохарактеров групп кос из уже известных, – пользуясь геометрической интерпретацией кос, мы выводим специального вида комбинаторные формулы, задающие преобразования функционалов группы кос, которые переводят псевдохарактеры в псевдохарактеры. Взяв алгоритм для вычисления какого-нибудь псевдохарактера группы кос и выбрав любую из наших комбинаторных формул, мы автоматически получаем алгоритм для вычисления некоторого нового псевдохарактера.

Вышеупомянутые комбинаторные формулы представляют собой отображения из группы в групповое кольцо (подробное объяснение можно найти ниже), а задаваемые ими преобразования пространств псевдохарактеров групп кос являются линейными операторами. Эти операторы и являются центральным объектом настоящей работы, – мы описываем их базовые свойства, из которых следуют новые результаты о псевдохарактерах группы кос и о структуре всего пространства этих псевдохарактеров.

Описанные в настоящей статье техники могут служить базой для конструктивного задания богатого семейства операторов между пространствами псевдохарактеров групп кос, однако мы ограничиваемся рассмотрением достаточно узкого – наиболее простого по построению – подсемейства таких операторов. Мы называем операторы этого подсемейства Г-*диагональными*. Это замкнутое подсемейство операторов; в пространстве всевозможных линейных операторов из пространства псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_n)$ группы кос B_n в пространство псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_k)$ группы кос B_k (при произвольных натуральных n и k) Г-диагональные операторы образуют подпространство конечной размерности $\min(k-1, n-1)$. Все Г-диагональные операторы из $\mathcal{PX}(B_n)$ в $\mathcal{PX}(B_n)$ диагональны.

Мы используем два подхода к описанию наших операторов. Один из этих подходов базируется на геометрическом представлении кос и удобен для доказательства различных свойств рассматриваемых операторов и соответствующих комбинаторных формул; второй – играющий в настоящей работе, скорее, вспомогательную роль, но описываемый нами в первую очередь (поскольку именно в рамках этого подхода доказывается, что рассматриваемые нами отображения действительно являются операторами пространств псевдохарактеров) – использует общую конструкцию *трансфера псевдохарактеров*. Трансфером псевдохарактеров, по аналогии с трансфером когомологий, мы называем один канонический оператор $\mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$ для группы G и ее нормальной подгруппы конечного индекса H.

Конструкция трансфера псевдохарактеров описана в §2. В §3 с помощью трансфера строится первая серия однотипных нетривиальных Г-диагональных операторов $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}$ $(k < n)$. Оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}$ действует из $\mathcal{PX}(B_k)$ в $\mathcal{PX}(B_n)$. (Заметим, что определение Г-диагональности дается лишь в §8 работы.) Далее, в §§4–6, представлен вышеупомянутый геометрический подход к описанию рассматриваемых операторов. Здесь мы вводим имеющую ясный геометрический смысл *процедуру удаления нитей косы* (§§4, 5) и задаем оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}$ через эту процедуру (§6). С точностью до умножения на константу оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}$ описывается в терминах процедуры удаления нитей следующим образом: $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}$ переводит псевдохарактер $\phi : B_k \to \mathbb{R}$ в псевдохарактер $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,k}(\phi) : B_n \to \mathbb{R}$, значение которого на косе $\beta \in B_n$ близко к сумме значений, принимаемых псевдохарактером ϕ на всевозможных косах из B_k, получающихся из косы β удалением того или иного поднабора из $n - k$ нитей.

В §7 мы строим еще одну серию Г-диагональных операторов

$$\mathcal{A}^!_{n,k} : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(B_n) \qquad (k < n).$$

Оператор $\mathcal{A}^!_{n,k}$ замечателен тем, что расщепляет естественный оператор проекции $\mathcal{I}^!_{n,k} : \mathcal{PX}(B_n) \to \mathcal{PX}(B_k)$, который можно определить как оператор, переводящий псевдохарактер группы B_n в его ограничение на подгруппу $B_k \subset B_n$. Таким образом, естественный оператор проекции сюръективен. Это означает, что верно следующее

Следствие (из предложения 7.2). *При $0 \leqslant k < n$ любой псевдохарактер группы B_k можно продолжить до некоторого псевдохарактера группы $B_n \supset B_k$.*

Отметим, что в рамках рассматриваемого подхода можно получить конструктивное доказательство последнего факта – благодаря комбинаторной формуле для оператора $\mathcal{A}^!_{n,k}$ мы можем по алгоритму для псевдохарактера $\phi : B_k \to \mathbb{R}$ предъявить алгоритм для вычисления продолжения $\mathcal{A}^!_{n,k}(\phi) : B_n \to \mathbb{R}$.

Построив серию операторов $\mathcal{A}^!_{n,k}$, которые естественно рассматривать как канонические вложения пространств псевдохарактеров групп кос друг в друга, мы получаем возможность определить в пространстве псевдохарактеров $\mathcal{PX}(B_n)$ некоторую внутреннюю структуру, которая описывается и изучается в §8. Здесь вводятся понятия *ядерных* и *субъядерных* псевдохарактеров, а также *степени* и *ранга* псевдохарактера.

1. Псевдогомоморфные отображения и кольцевые операторы

1.1. Новые псевдохарактеры иногда удается получить из уже известных псевдохарактеров с помощью гомоморфизмов, – как нетрудно видеть, для произвольных гомоморфизма групп $f : G \to H$ и псевдохарактера $\varphi : H \to \mathbb{R}$ композиция $\varphi \circ f : G \to \mathbb{R}$ является псевдохарактером. В терминах теории категорий это означает, что функтор, ставящий в соответствие группе пространство ее псевдохарактеров, контравариантен: гомоморфизму групп $f : G \to H$ соответствует линейный оператор $f^! : \mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$. К примеру, известный гомоморфизм из B_4 в B_3, задаваемый правилом $\sigma_1 \mapsto \sigma_1$, $\sigma_2 \mapsto \sigma_2$, $\sigma_3 \mapsto \sigma_1$, позволяет получить новые псевдохарактеры для B_4. Однако оказывается, что этот пример – в случае групп кос – едва ли не единственен, и другие попытки получить новые псевдохарактеры с помощью гомоморфизмов между группами кос не приводят к желаемому результату. В определенной степени это иллюстрируют следующие замечания (a)–(c).

(a) Ясно, что любому автоморфизму группы соответствует автоморфизм ее пространства псевдохарактеров. При этом в силу того, что псевдохарактеры являются инвариантами сопряженности, каждому внутреннему автоморфизму группы соответствует тождественный оператор в пространстве псевдохарактеров. Таким образом, для произвольной группы G определено действие группы ее внешних автоморфизмов $\operatorname{Out}(G) = \operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Inn}(G)$ на $\mathcal{PX}(G)$. Как известно, $\operatorname{Out}(B_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $n \geqslant 2$ (см. [4]); под действием оператора $\xi^! : \mathcal{PX}(B_n) \to \mathcal{PX}(B_n)$, соответствующего единственному нетривиальному элементу $\xi \in \operatorname{Out}(B_n)$, все известные псевдохарактеры группы кос меняют знак. (Вопрос: совпадает ли оператор $\xi^!$ с оператором $-\mathrm{id}_{\mathcal{PX}(B_n)}$?)

(b) При $k < n \neq 4$ образ любого нетривиального гомоморфизма из B_n в B_k есть циклическая группа (см. [9]); отсюда следует, что для произвольного гомоморфизма $f : B_n \to B_k$ и псевдохарактера $\varphi : B_k \to \mathbb{R}$ композиция $\varphi \circ f : B_n \to \mathbb{R}$ является гомоморфизмом; а как упоминалось выше, гомоморфизм из B_n в $\mathbb{R}$ с точностью до умножения на константу единственен.

(c) Заметим, что для произвольной группы G и ее подгруппы $H \subset G$ соответствующий вложению $\mathcal{I} : H \to G$ оператор $\mathcal{I}^! : \mathcal{PX}(G) \to \mathcal{PX}(H)$ переводит псевдохарактер $\phi : G \to \mathbb{R}$ в его ограничение $\phi|_H : H \to \mathbb{R}$. Гомоморфизм вложения $\mathcal{I}_{n,k} : B_k \to B_n$ $(k < n)$ настолько естественен, что, как правило, не служит источником получения "новых" псевдохарактеров – обычно удается обнаружить сразу целую серию псевдохарактеров $\phi_i \in \mathcal{PX}(B_i)$, $i = 1, 2, 3 \ldots$, для которой либо $\phi_n \circ \mathcal{I}_{n,k} = \phi_k$, либо $\phi_n \circ \mathcal{I}_{n,k} = 0$.

Другие известные нам эндоморфизмы группы кос B_n и гомоморфизмы из B_k в B_n при $k < n$ новых псевдохарактеров также не дают. Вместе с тем, для групп кос удается обнаружить и описать в явном виде не гомоморфизмы, но *отображения между групповыми кольцами*, которые индуцируют инъективные операторы между пространствами псевдохарактеров. Для изучения и описания такого рода отображений между групповыми кольцами мы вводим специальную терминологию.

1.2. Псевдогомоморфные отображения и кольцевые операторы пространств псевдохарактеров. Произвольному отображению $f : G \to \mathbb{R}H$ из группы G в групповое кольцо $\mathbb{R}H$ группы H соответствует линейный оператор f^* из пространства функционалов на группе H в пространство функционалов на группе G. Если при этом образ $f^*(\mathcal{PX}(H))$ лежит в $\mathcal{PX}(G)$, будем говорить, что отображение f *псевдогомоморфно*, а ограничение $f^*|_{\mathcal{PX}(H)} : \mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$ будем называть *кольцевым оператором пространств псевдохарактеров* и обозначать через $f^!$. Псевдогомоморфные отображения, которым соответствует один и тот же кольцевой оператор, назовем *эквивалентными*. Отображения из группы в групповое кольцо, являющиеся линейными комбинациями гомоморфизмов, назовем *гомоморфными*. (Таким образом, любое гомоморфное отображение псевдогомоморфно.)

1.3. Соглашение. Как правило, мы не будем различать отображение из группы в групповое кольцо и его линейное продолжение до отображения групповых колец. Так, под композицией $f_2 \circ f_1$ отображений $f_1 : F \to \mathbb{R}G$ и $f_2 : G \to \mathbb{R}H$ из групп в групповые кольца понимается композиция $\overline{f}_2 \circ f_1 : F \to \mathbb{R}H$, где $\overline{f}_2 : \mathbb{R}G \to \mathbb{R}H$ – линейное продолжение отображения f_2. Это не приводит к путанице, поскольку композиция $f_2 \circ f_1$ в обычном смысле не определена.

Аналогичным образом, формально нарушая обозначения, мы будем переходить от функционалов (в частности, псевдохарактеров) группы к их линейным продолжениям на групповое кольцо. Например, если заданы функционал $\phi : G \to \mathbb{R}$ и отображение $f : F \to \mathbb{R}G$, то под композицией $\phi \circ f$ понимается функционал $f^*(\phi) : F \to \mathbb{R}$, где f^* – соответствующий отображению f линейный оператор из пространства функционалов на группе G в пространство функционалов на группе F.

1.4. Замечания. Как нетрудно видеть, линейные комбинации и композиции (см. соглашение 1.3) псевдогомоморфных отображений псевдогомоморфны. Соответственно, линейные комбинации и композиции кольцевых операторов являются кольцевыми.

Если пространство $\mathcal{PX}(H)$ конечномерно, то любой линейный оператор $\mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$ является кольцевым, если же $\mathcal{PX}(H)$ бесконечномерно, а $\mathcal{PX}(G)$ нетривиально, то всегда найдутся операторы из $\mathcal{PX}(H)$ в $\mathcal{PX}(G)$, кольцевыми не являющиеся.

Ясно, что кольцевые операторы сохраняют часть полезных свойств операторов, соответствующих гомоморфизмам. В частности, если для кольцевого оператора $f^! : \mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$ псевдогомоморфное отображение $f : G \to \mathbb{R}H$ задано в явном виде, то, имея алгоритм вычисления некоторого псевдохарактера $\phi : H \to \mathbb{R}$, мы получаем и алгоритм для псевдохарактера $f^!(\phi) : G \to \mathbb{R}$.

Примеры псевдогомоморфных отображений, неэквивалентных никаким гомоморфным отображениям, во множестве могут быть получены в рамках конструкции трансфера, которая описана в следующем параграфе (из одного псевдогомоморфного отображения, комбинируя его различными способами с гомоморфными отображениями, можно получить целый каскад псевдогомоморфных отображений, неэквивалентных гомоморфным).

2. Трансфер псевдохарактеров

Стандартная конструкция *когомологического трансфера* (см., например, [3]) имеет аналог для случая ограниченных когомологий и для псевдохарактеров. Конструкция трансфера псевдохарактеров описывается следующим образом. Пусть G – произвольная группа, H – ее нормальная подгруппа конечного индекса (скажем, индекса s). Пусть $Q \subset G$ – произвольный набор представителей классов смежности подгруппы H. Заметим, что для любого элемента $g \in G$ его s-ая степень g^s лежит в H, и что, поскольку подгруппа H нормальна, для любых элементов $h \in H$ и $g \in G$ элемент ghg^{-1} лежит в H. Таким образом, формула

$$g \mapsto \frac{\sum_{q \in Q} q g^s q^{-1}}{s^2}$$

задает некоторое отображение из группы G в кольцо $\mathbb{R}H$. Обозначим это отображение через $\mathcal{T}_{G;H;Q}$.

2.1. Предложение. *Отображение $\mathcal{T}_{G;H;Q}$ псевдогомоморфно, а соответствующий кольцевой оператор $\mathcal{T}^!_{G;H;Q} : \mathcal{PX}(H) \to \mathcal{PX}(G)$ однозначно определяется парой (G, H) и от выбора Q не зависит* (поэтому мы будем обозначать этот оператор через $\mathcal{T}^!_{G;H}$).

Кольцевой оператор $\mathcal{T}^!_{G;H}$ будем называть *трансфером*.

2.2. Замечание. Трансфер $\mathcal{T}^!_{G;H}$ сюръективен и расщепляется оператором $\mathcal{J}^! : \mathcal{PX}(G) \to \mathcal{PX}(H)$, отвечающим естественному вложению $\mathcal{J} : H \to G$ (иными словами, $\mathcal{T}^!_{G;H} \circ \mathcal{J}^! = \mathrm{id}_{\mathcal{PX}(G)}$).

2.3. Замечание. Коэффициент $1/s^2$ в формуле, определяющей отображение $\mathcal{T}_{G;H;Q}$, возникает естественным образом (на псевдогомоморфность отображения умножение на ненулевой коэффициент, конечно же, не влияет). О его уместности свидетельствует, к примеру, тот упомянутый выше факт, что $\mathcal{T}^!_{G;H} \circ \mathcal{J}^! = \mathrm{id}_{\mathcal{PX}(G)}$.

3. Один кольцевой оператор для групп кос

Конструкция трансфера открывает возможность получения множества кольцевых операторов между пространствами псевдохарактеров групп кос. Напомним, что *группа крашеных кос* $P_n \subset B_n$ является в B_n нормальной подгруппой индекса $n!$, так что имеется трансфер $\mathcal{T}^!_{B_n;P_n} : \mathcal{PX}(P_n) \to \mathcal{PX}(B_n)$; при этом существуют различного вида гомоморфизмы из P_n как в B_n, так и в группы кос других рангов, которым отвечают "невырожденные" кольцевые операторы; комбинируя эти кольцевые операторы с трансфером $\mathcal{T}^!_{B_n;P_n}$, мы получаем кольцевые операторы для групп кос, никаким гомоморфным отображениям не соответствующие. В настоящем разделе, следуя такой схеме, мы определяем один кольцевой оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,k} : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(B_n)$ для пространств псевдохарактеров групп кос B_k и B_n при $k < n$.

3.1. Крашеные косы. Пусть Σ_∞ – группа конечных перестановок множества натуральных чисел и пусть $\Sigma_n \subset \Sigma_\infty$ — симметрическая группа перестановок множества $\{1, \dots, n\}$. Как известно, отображение множества артиновских образующих в группу Σ_∞, переводящее образующую σ_i в перестановку $(i, i+1)$, продолжается до эпиморфизма $\mathit{\Sigma} : B_\infty \to \Sigma_\infty$, причем $\mathit{\Sigma}(B_n) = \Sigma_n$. Ядром эпиморфизма $\mathit{\Sigma}$ является *группа крашеных кос бесконечного ранга* P_∞. Косы из P_∞ называются *крашеными*. *Группой крашеных кос ранга* n $(n \geqslant 0)$ называется подгруппа $P_\infty \cap B_n$. Подгруппа P_n является в B_n нормальной подгруппой индекса $|\Sigma_n| = n!$, и для любой косы $\beta \in B_n$ коса $\beta^{n!}$ является крашеной.

3.2. Определение: гомоморфизм забывания нитей $\mathcal{K}_{n,\,k} : P_n \to P_k$. Введем следующее обозначение: для чисел i и j таких, что $1 \leqslant i < j$, положим

$$a_{ij} := \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \in B_\infty.$$

Как известно (см., например, [12]), набор $\{a_{ij} : \ 1 \leqslant i < j \leqslant m\}$ порождает группу крашеных кос P_m. Будем называть элементы a_{ij} *образующими Маркова*.

Пусть $0 \leqslant k < n$. Обозначим через $H_{n,\,k}$ подгруппу в B_∞, порожденную элементами

$$\{a_{ij} : \ 1 \leqslant i < j \leqslant n, \ k+1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Как известно, $H_{n,\,k}$ есть нормальная подгруппа в P_n; кроме того, P_n является полупрямым произведением своих подгрупп $H_{n,\,k}$ и P_k. Обозначим через $\mathcal{K}_{n,\,k}$ гомоморфизм из P_n в P_k, который тождественен на $P_k \subset P_n$ и ядром которого является подгруппа $H_{n,\,k}$.

3.3. Определение: оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,k}$. Рассмотрим следующие отображения.

1. Естественное вложение $\mathcal{J}_k : P_k \to B_k$ и соответствующий оператор

$$\mathcal{J}_k^! : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(P_k).$$

2. Эпиморфизм $\mathcal{K}_{n,\,k} : P_n \to P_k$ и отвечающий ему оператор

$$\mathcal{K}_{n,\,k}^! : \mathcal{PX}(P_k) \to \mathcal{PX}(P_n).$$

3. Определенный в силу предложения 2.1 кольцевой оператор (трансфер)

$$\mathcal{T}^{!}_{B_n;P_n} : \mathcal{PX}(P_n) \to \mathcal{PX}(B_n).$$

Определим оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,k}$ из $\mathcal{PX}(B_k)$ в $\mathcal{PX}(B_n)$ как композицию операторов $\mathcal{J}^{!}_{k}$, $\mathcal{K}^{!}_{n,\,k}$ и $\mathcal{T}^{!}_{B_n;P_n}$:

$$\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,k} := \mathcal{T}^{!}_{B_n;P_n} \circ \mathcal{K}^{!}_{n,\,k} \circ \mathcal{J}^{!}_{k} : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(B_n).$$

$$\begin{array}{ccc}
B_k & \longrightarrow & B_n \\
\bigcup & & \bigcup \\
P_k & \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} & P_n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{PX}(B_k) & & \mathcal{PX}(B_n) \\
\downarrow \mathcal{J}^{!}_{k} & & \uparrow \mathcal{T}^{!}_{B_n;P_n} \\
\mathcal{PX}(P_k) & \overset{\mathcal{K}^{!}_{n,\,k}}{\longrightarrow} & \mathcal{PX}(P_n)
\end{array}$$

Оператор $\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,k}$, будучи композицией кольцевых операторов, является кольцевым.

3.4. Предложение. *Для любых* $0 \leqslant m < n$ *оператор* $\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,m}$ *инъективен.*

3.5. Предложение. *Пусть* $0 \leqslant k < m < n$. *Тогда*

$$\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,k} = \widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,m} \circ \widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{m,\,k}.$$

4. Процедуры удаления нитей косы

В настоящем параграфе определяется вспомогательное семейство отображений в группе кос B_∞, которые мы называем *процедурами удаления нитей косы* и обозначаем через $\mathtt{red}_J$ ($J \subset \mathbb{N}$). В последующих параграфах эти процедуры используются для задания псевдогомоморфных отображений между группами кос. В частности, в терминах этих процедур задается псевдогомоморфное отображение, соответствующее кольцевому оператору $\widetilde{\mathcal{R}}^{!}_{n,\,k}$. С использованием свойств отображений $\mathtt{red}_J$ доказываются различные свойства построенных с их помощью псевдогомоморфных отображений и связанных с ними кольцевых операторов. Процедуры удаления нитей косы определяются в терминах классической геометрической интерпретации групп кос.

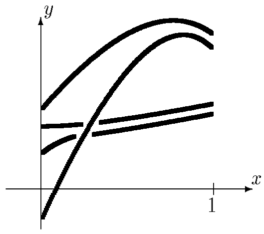

Рис. 1. Проекция геометрической косы на плоскость $z = 0$.

4.1. Геометрические косы. *Геометрической косой из n нитей* будем называть набор из n попарно непересекающихся кривых $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, где каждая из кривых $\gamma_i =: (\gamma_i^x, \gamma_i^y, \gamma_i^z)$ имеет вид $\gamma_i^x(t) = t$, $\gamma_i^z(0) = \gamma_i^z(1) = 0$. Геометрическая коса однозначно задается своим образом $\gamma_1([0,1]) \cup \dots \cup \gamma_n([0,1]) \subset \mathbb{R}^3$, и иногда мы будем считать, что геометрическая коса есть подмножество в $\mathbb{R}^3$.

Множество геометрических кос снабжено естественной топологией (как подпространство топологического пространства компактных подмножеств в $\mathbb{R}^3$). Компоненты связности топологического пространства геометрических кос будем называть (изотопическими) *классами* геометрических кос. Множество классов геометрических кос из n нитей обозначим через $\mathbf{B}_n$.

В отличие от обычной геометрической интерпретации кос, мы не требуем, чтобы у геометрической косы $\mathbf{b} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ множества $\mathbf{b}_{|0} := \{\gamma_1^y(0), \dots, \gamma_n^y(0)\}$ и $\mathbf{b}_{|1} := \{\gamma_1^y(1), \dots, \gamma_n^y(1)\}$ совпадали. Однако ясно, что в каждом классе геометрических кос найдется элемент $\mathbf{b}$, у которого множества $\mathbf{b}_{|0}$ и $\mathbf{b}_{|1}$ совпадают; более того, в каждом классе найдется элемент, у которого $\mathbf{b}_{|0} = \mathbf{b}_{|1} = \{1, \dots, n\}$. Будем называть такие элементы (т.е. элементы, у которых $\mathbf{b}_{|0} = \mathbf{b}_{|1} = \{1, \dots, n\}$) *стандартными*.

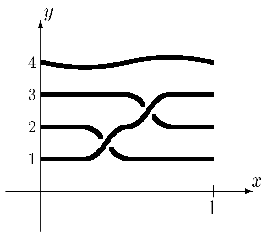

Рис. 2. Проекция стандартной косы.

Для двух стандартных геометрических кос $\mathbf{b} \subset \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{b}' \subset \mathbb{R}^3$ из n нитей образ $P(\mathbf{b}, \mathbf{b}') := D_{1/2}\big(\mathbf{b} \cup E_1(\mathbf{b}')\big)$, где $D_{1/2}$ и E_1 – гомеоморфизмы $\mathbb{R}^3$, задаваемые формулами $(x, y, z) \mapsto (x/2, y, z)$ и $(x, y, z) \mapsto (x+1, y, z)$ соответственно, является стандартной геометрической косой.

Определим на множестве $\mathbf{B}_n$ бинарную операцию $\times$, положив для классов β и β' из $\mathbf{B}_n$ класс $\beta \times \beta'$ равным классу, представленному косой $P(\mathbf{b}, \mathbf{b}')$, где $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ – произвольные стандартные представители классов β и β' соответственно. Как известно, приведенное определение операции $\times$ корректно, а множество $\mathbf{B}_n$ с операцией $\times$ является группой, изоморфной группе кос B_n. Зафиксируем канонический изоморфизм между группами B_n и $\mathbf{B}_n$, поставив в соответствие образующей σ_i класс, представленный геометрической косой, проекция которой изображена на рис. 3.

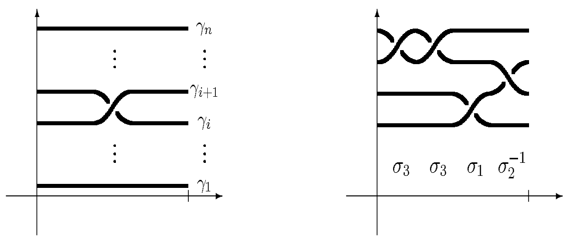

Рис. 3. Проекции геометрических кос, представляющих косы $\sigma_i \in B_n$ и $\sigma_3\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_4$.

4.2 Определение: процедура удаления нитей косы. Пусть $J \subset \mathbb{N}$. Для геометрической косы $\mathbf{b} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ из n нитей, кривые которой занумерованы так, что $\gamma_i^y(1) < \gamma_j^y(1)$ при $i < j$, обозначим через $red_J(\mathbf{b})$ состоящую из $n - |J \cap \{1, \ldots, n\}|$ нитей геометрическую косу $\{\gamma_k \ : \ k \in \{1, \ldots, n\} \setminus J\}$.

Ясно, что если геометрические косы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ лежат в одном классе, то и косы $red_J(\mathbf{b})$ и $red_J(\mathbf{b}')$ лежат в одном классе. Более того, из стандартных соображений следует, что если геометрические косы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}'$ (имеющие, возможно, различные индексы) представляют[1] одну и ту же косу из B_∞, то и геометрические косы $red_J(\mathbf{b})$ и $red_J(\mathbf{b}')$ пред-

[1]Поскольку каждая геометрическая коса из m нитей представляет некоторую косу из B_m, а $B_m \subset B_\infty$, естественно считать, что каждая геометрическая коса представляет некоторую косу из B_∞.

ставляют одну и ту же косу из B_∞. Это доказывает корректность следующего определения.

Пусть $J \subset \mathbb{N}$ и $\beta \in B_\infty$. Определим косу $\mathtt{red}_J(\beta) \in B_\infty$ как косу, представленную геометрической косой $red_J(\mathbf{b})$, где $\mathbf{b}$ – произвольная геометрическая коса, представляющая косу β.

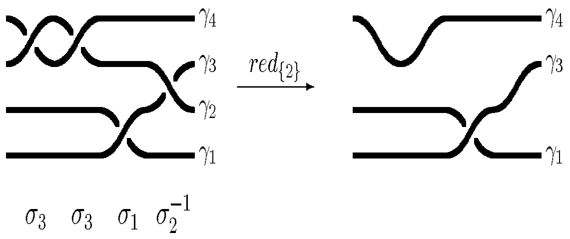

Рис. 4. Удаление нити.

5. Свойства процедур удаления нитей и определение гомоморфизмов RED

Введем вспомогательные обозначения.

5.1. Обозначения: симметрическая группа. Пусть $\Sigma : B_\infty \to \Sigma_\infty$ – эпиморфизм, введенный в п. 3.1. Для косы $\beta \in B_\infty$ образ подмножества $J \subset \mathbb{N}$ под действием перестановки $\Sigma(\beta)$ будем обозначать через $\beta(J)$.

5.2. Обозначения: удаление подмножеств. Пусть $I \subset \mathbb{N}$. Обозначим через R_I отображение из $\mathbb{N} \setminus I$ в $\mathbb{N}$, переводящее элемент $m \in \mathbb{N} \setminus I$ в элемент

$$R_I(m) := m - |\{1, \dots, m\} \cap I|.$$

Для подмножеств I и J множества $\mathbb{N}$ положим

$$J/I := R_I(J \setminus I)$$

(таким образом, если $m \in I$, то $\{m\}/I = \varnothing$).

5.3. Соглашение. Когда это не приводит к путанице, фигурные скобки в обозначении множеств будем опускать. Так, будем писать m/I вместо $\{m\}/I$, $\beta(2,3)$ вместо $\beta(\{2,3\})$ и т.п.

Следующие леммы легко выводятся непосредственно из определений.

5.4. Лемма. *Пусть $J \subset \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$, $\delta \in \{+1, -1\}$. Тогда*

$$\mathtt{red}_J(\sigma_i^\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in J \text{ или } i+1 \in J; \\ \sigma_{i/J}^\delta, & \text{если } \{i, i+1\} \cap J = \varnothing. \end{cases}$$

5.5. Лемма. *Пусть $J \subset \mathbb{N}$, $i < j \in \mathbb{N}$, и пусть a_{ij} — образующая Маркова* (см. определение в п. 3.2). *Тогда*

$$\mathtt{red}_J(a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \cap J \neq \varnothing; \\ a_{i'j'}, \text{ где } i' = i/J \text{ и } j' = j/J, & \text{если } \{i,j\} \cap J = \varnothing. \end{cases}$$

5.6. Лемма. *Пусть $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Тогда*

$$\mathtt{red}_J(B_n) = B_{n-|J|}.$$

5.7. Лемма. *Пусть $J \subset \{n+1, n+2, \ldots\}$, $\beta \in B_n$. Тогда*

$$\mathtt{red}_J(\beta) = \beta.$$

5.8. Лемма. *Пусть $J \subset \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in B_\infty$. Тогда*

$$\mathtt{red}_J(\alpha\beta) = \mathtt{red}_{\beta(J)}(\alpha) \cdot \mathtt{red}_J(\beta).$$

5.9. Лемма. *Пусть $I, J \subset \mathbb{N}$. Тогда*

$$\mathtt{red}_{I \cup J} \equiv \mathtt{red}_{I/J} \circ \mathtt{red}_J.$$

5.10. Замечание. Семейство отображений $\mathtt{red}$ однозначно определяется свойствами, сформулированными в леммах 5.4 и 5.8. В частности, из этих двух лемм следуют и все остальные леммы, приведенные в настоящем параграфе.

5.11. Замечание. На основе свойств отображений $\mathtt{red}$, сформулированных в леммах 5.4 и 5.8, нетрудно составить практический алгоритм, вычисляющий косу $\mathtt{red}_J(\beta)$ по описанию косы β в виде произведения образующих Артина и обратных к ним.

5.12. Определение: гомоморфизмы $\mathtt{RED}$. Ограничение отображения $\mathtt{red}_J$ на подгруппу крашеных кос $P_\infty \subset B_\infty$ будем обозначать через $\mathtt{RED}_J$.

Из лемм 5.5 и 5.8 прямо следует, что для любого $J \subset \mathbb{N}$ отображение $\mathtt{RED}_J : P_\infty \to B_\infty$ является гомоморфизмом и что образ этого гомоморфизма лежит в P_∞.

5.13. Следствие. *Пусть $0 \leqslant k < n$. Тогда ограничение $\mathtt{RED}_{\{k+1,\ldots,n\}}|_{P_n}$ совпадает с гомоморфизмом забывания $\mathcal{K}_{n,k} : P_n \to P_k$* (см. определение в п. 3.2).

6. Операторы $\mathcal{R}^!_{n,\,k}$

В настоящем параграфе в терминах процедур удаления нитей косы определяется псевдогомоморфное отображение $\mathcal{R}_{n,\,k} : B_n \to \mathbb{R}B_k$ (для $k < n$) и формулируются некоторые его свойства.

6.1. Определение: отображение $\mathcal{R}_{n,\,k}$. Пусть $0 \leqslant k < n$. Определим отображение $\mathcal{R}_{n,\,k}$ из группы B_n в групповое кольцо $\mathbb{R}B_k$, положив

$$\mathcal{R}_{n,\,k}(\beta) := \sum_{J \in \mathbf{C}_n^{n-k}} \frac{\mathtt{RED}_J(\beta^{n!})}{n!},$$

$$\text{где} \quad \mathbf{C}_n^{n-k} := \bigl\{ I \subset \{1, \dots, n\} \ : \ |I| = n - k \bigr\}.$$

6.2. Предложение. *Отображение $\mathcal{R}_{n,\,k}$ псевдогомоморфно. Соответствующий кольцевой оператор $\mathcal{R}^!_{n,\,k} : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(B_n)$ совпадает с оператором $C_n^k \cdot \widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,k}$.*

6.3. Следствие. *Для любых $0 \leqslant m < n$ оператор $\mathcal{R}^!_{n,\,m}$ инъективен.*

6.4. Следствие. *Пусть $0 \leqslant k < m < n$. Тогда*

$$\mathcal{R}^!_{n,\,m} \circ \mathcal{R}^!_{m,\,k} = C_{n-k}^{m-k} \cdot \mathcal{R}^!_{n,\,k},$$

где $C_{n-k}^{m-k} = C_{n-k}^{n-m} = \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}$.

6.5. Замечание. На практике при вычислении значений псевдохарактера $\mathcal{R}^!_{n,\,k}(\phi)$ (когда задан алгоритм вычисления псевдохарактера $\phi : B_k \to \mathbb{R}$) можно избежать рассмотрения “длинных” кос вида $\beta^{n!}$ и сопутствующих вычислений величин типа $\phi\bigl(\mathtt{RED}_J(\beta^{n!})\bigr)$. Так, заметим, что если для косы $\beta \in B_n$ и некоторого $s \neq 0$ коса β^s – крашеная, то для каждого $J \subset \mathbf{C}_n^{n-k}$ (и для каждого псевдохарактера $\phi \in \mathcal{PX}(B_k)$) имеет место равенство

$$\phi\bigl(\mathtt{RED}_J(\beta^{n!})\bigr)/n! = \phi\bigl(\mathtt{RED}_J(\beta^{s})\bigr)/s.$$

Кроме того, если для косы $\beta \in B_n$, множества $J \subset \mathbf{C}_n^{n-k}$ и числа $s_J \neq 0$ имеет место равенство $\beta^{s_J}(J) = J$, то

$$\phi\bigl(\mathtt{RED}_J(\beta^{n!})\bigr)/n! = \phi\bigl(\mathtt{RED}_J(\beta^{s_J})\bigr)/s_J.$$

6.6. Замечание. Пусть $0 \leqslant k < n$. Определим отображение $\mathcal{P}_{n,\,k}$ из группы B_n в групповое кольцо $\mathbb{R}B_k$, положив

$$\mathcal{P}_{n,\,k}(\beta) := \sum_{J \in \mathbf{C}_n^{n-k}} \mathtt{RED}_J(\beta).$$

В общем случае отображение $\mathcal{P}_{n,\,k}$ не псевдогомоморфно, однако оно является *квазигомоморфным*: для каждого квазиморфизма $\psi : B_k \to \mathbb{R}$ функционал $\mathcal{P}^*_{n,\,k}(\psi) : B_n \to \mathbb{R}$ (значение которого на косе $\beta \in B_n$ равно сумме $\sum_{J \in \mathbf{C}_n^{n-k}} \psi\big(\mathtt{RED}_J(\beta)\big)$) также является квазиморфизмом. Заметим, что при этом для произвольного псевдохарактера $\phi : B_k \to \mathbb{R}$ разница между квазихарактером $\mathcal{P}^*_{n,\,k}(\phi)$ и псевдохарактером $\mathcal{R}^!_{n,\,k}(\phi)$ является ограниченным функционалом.

7. Операторы $\mathcal{A}^!_{n,\,k}$ и сюръективность операторов $\mathcal{I}^!_{n,\,k}$

7.1. Определение: операторы $\mathcal{A}^!_{n,\,k}$. Для $m > 0$ определим отображение $\mathcal{A}_{m,\,m-1}$ из группы B_m в групповое кольцо $\mathbb{R}B_{m-1}$, положив

$$\mathcal{A}_{m,\,m-1} := \sum_{k=0,1,\dots,m-1} (-1)^{m-k+1} \cdot \mathcal{R}_{m,\,k}, \tag{7.1}$$

где $\mathcal{R}_{m,\,k}$ – отображение из B_m в $\mathbb{R}B_k$, определенное в п. 6.1 (здесь мы пользуемся тем, что $B_k \subset B_{m-1}$ и, следовательно, $\mathbb{R}B_k \subset \mathbb{R}B_{m-1}$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$). Таким образом, в силу определения отображений $\mathcal{R}_{m,\,k}$ значение отображения $\mathcal{A}_{m,\,m-1}$ на косе β задается следующей формулой:

$$\mathcal{A}_{m,\,m-1}(\beta) = \sum_{\{J \subset \{1,\dots,m\}\ :\ J \neq \varnothing\}} \frac{(-1)^{|J|+1} \cdot \mathtt{RED}_J(\beta^{m!})}{m!}. \tag{7.2}$$

Будучи в силу своего определения линейной комбинацией псевдогомоморфных отображений, отображение $\mathcal{A}_{m,\,m-1}$ псевдогомоморфно. Соответствующий кольцевой оператор

$$\mathcal{A}^!_{m,\,m-1} : \mathcal{PX}(B_{m-1}) \to \mathcal{PX}(B_m)$$

в силу (7.1) выражается через операторы $\mathcal{R}^!_{n,\,k}$ и $\mathcal{I}^!_{n,\,k}$ следующим образом:

$$\mathcal{A}^!_{m,\,m-1} = \mathcal{R}^!_{m,\,m-1} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-2} (-1)^{m-k+1} \cdot \mathcal{R}^!_{m,\,k} \circ \mathcal{I}^!_{m-1,\,k}. \tag{7.3}$$

Для $0 \leqslant k < n$ определим оператор $\mathcal{A}^!_{n,\,k}$ из $\mathcal{PX}(B_k)$ в $\mathcal{PX}(B_n)$, положив

$$\mathcal{A}^!_{n,\,k} := \mathcal{A}^!_{n,\,n-1} \circ \mathcal{A}^!_{n-1,\,n-2} \circ \dots \circ \mathcal{A}^!_{k+2,\,k+1} \circ \mathcal{A}^!_{k+1,\,k}. \tag{7.4}$$

7.2. Предложение. *Для любых* $0 \leqslant k < n$ *верно* $\mathcal{I}^!_{n,k} \circ \mathcal{A}^!_{n,k} = \mathrm{id}_{\mathcal{PX}(B_k)}$. *Таким образом, оператор* $\mathcal{A}^!_{n,k}$ *инъективен, а оператор* $\mathcal{I}^!_{n,k}$ *сюръективен.*

8. Структура пространства $\mathcal{PX}(B_n)$

8.1. Определение: ядерные псевдохарактеры. Пусть $m > 0$ и $\mathcal{I}^!_{m,m-1}$ – оператор из $\mathcal{PX}(B_m)$ в $\mathcal{PX}(B_{m-1})$, отвечающий естественному вложению $\mathcal{I}_{m,m-1} : B_{m-1} \to B_m$. Назовем ядро оператора $\mathcal{I}^!_{m,m-1}$ *пространством ядерных псевдохарактеров группы* B_m и обозначим его через Γ_m. Псевдохарактеры из Γ_m будем называть *ядерными*.

8.2. Замечание. Пространство $\Gamma_1 = \mathcal{PX}(B_1)$ тривиально, а $\Gamma_2 = \mathcal{PX}(B_2) \simeq \mathbb{R}$. Нетрудно показать, что подпространство ядерных псевдохарактеров в $\mathcal{PX}(B_3)$ имеет коразмерность 1 и, следовательно, бесконечномерно (поскольку $\mathcal{PX}(B_3)$ бесконечномерно – см. п. 0.2). Естественно предположить, что Γ_m бесконечномерно и при $m \geqslant 4$, но априори в $\mathcal{PX}(B_m)$ при $m \geqslant 4$ существование нетривиальных ядерных псевдохарактеров неочевидно. Результаты работы [10], в которой описана серия ядерных псевдохарактеров групп кос, позволяют утверждать, что пространство ядерных псевдохарактеров группы B_m при $m \geqslant 4$ имеет ненулевую размерность.

8.3. Определение: субъядерные псевдохарактеры. Пусть $0 < k < m$. Образ $\mathcal{A}^!_{m,k}(\Gamma_k) \subset \mathcal{PX}(B_m)$, где $\mathcal{A}^!_{m,k}$ – оператор из $\mathcal{PX}(B_k)$ в $\mathcal{PX}(B_m)$, определенный в п. 7.1, назовем *пространством субъядерных псевдохарактеров степени* k *группы кос* B_m и обозначим его через $\Gamma_{m,k}$. Нетривиальные псевдохарактеры из $\Gamma_{m,k}$ будем называть *субъядерными псевдохарактерами степени* k.

Для удобства формулировок в некоторых случаях мы называем ядерные псевдохарактеры в $\mathcal{PX}(B_m)$ *субъядерными псевдохарактерами степени* m и обозначаем пространство Γ_m через $\Gamma_{m,m}$.

8.4. Замечание. Для произвольного $m > 1$ пространство $\Gamma_{m,1}$ тривиально, а $\Gamma_{m,2} \simeq \mathbb{R}$. Нетрудно показать, что

$$\Gamma_{m,2} = \mathrm{Hom}\,(B_m, \mathbb{R}).$$

Из предложения 7.2 вытекает следующее утверждение.

8.5. Предложение. *Пространство псевдохарактеров группы кос* B_n $(n > 0)$ *является прямой суммой подпространства его ядерных псевдохарактеров и подпространств его субъядерных псевдохарактеров:*

$$\mathcal{PX}(B_n) = \Gamma_n \oplus \Gamma_{n,\,n-1} \oplus \cdots \oplus \Gamma_{n,\,2}.$$

8.6. Определение: класс Г-диагональных операторов. Пусть $m \geqslant 0$. Назовем оператор $X : \mathcal{PX}(B_m) \to \mathcal{PX}(B_m)$ Г-*диагональным*, если для любого $t \in \{1, \ldots, m\}$ ограничение оператора X на подпространство субъядерных псевдохарактеров $\Gamma_{m,\,t}$ является умножением на некоторую (возможно, нулевую) константу c_t. При $0 \leqslant k < n$ операторы $Y : \mathcal{PX}(B_k) \to \mathcal{PX}(B_n)$ и $Z : \mathcal{PX}(B_n) \to \mathcal{PX}(B_k)$ будем называть Г-*диагональными*, если композиции $Y \circ \mathcal{I}^!_{n,\,k}$ и $\mathcal{A}^!_{n,\,k} \circ Z$ являются Г-диагональными операторами.

8.7. Замечание. Из предложения 7.2 прямо следует, что для любых $0 \leqslant k < n$ операторы $\mathcal{I}^!_{n,\,k}$ и $\mathcal{A}^!_{n,\,k}$ являются Г-диагональными и что серии операторов $\{\mathcal{I}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$ и $\{\mathcal{A}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$ *порождают* (путем взятия всевозможных композиций и их линейных комбинаций) весь класс Г-диагональных операторов. Это означает, в частности, что все Г-диагональные операторы являются кольцевыми.

8.8. Замечание. Ясно, что для произвольных $n > 0$ и $s > 0$ Г-диагональные операторы из $\mathcal{PX}(B_n)$ в $\mathcal{PX}(B_s)$ образуют линейное пространство размерности $\min\{n, s\} - 1$.

8.9. Предложение. *Для любых* $0 \leqslant m < n$ *операторы* $\mathcal{R}^!_{n,\,m}$ *и* $\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,m}$ Г-*диагональны.*

8.10. Замечание. Пусть $1 < k < n$. Ясно, что произвольный Г-диагональный оператор X, действующий из $\mathcal{PX}(B_k)$ в $\mathcal{PX}(B_n)$, однозначно определяется набором коэффициентов $c_2, c_3, \ldots, c_k$, где $c_t := c_t(X)$ – такая константа, что для любого субъядерного псевдохарактера $\phi \in \Gamma_{k,\,t}$ имеет место равенство $\mathcal{I}^!_{n,\,k} \circ X(\phi) = c_t \cdot \phi$.

Заметим, что для произвольных $2 \leqslant t \leqslant k < n$ выполняется равенство

$$c_t(\mathcal{R}^!_{n,\,k}) = C^{k-t}_{n-t}.$$

Отсюда в силу предложения 6.2 следует, что

$$c_t(\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,k}) = \frac{c_t(\mathcal{R}^!_{n,\,k})}{C^k_n} = \frac{C^{k-t}_{n-t}}{C^k_n} = \frac{C^t_k}{C^t_n}.$$

8.11. Определение: степени и ранги псевдохарактеров группы кос. В силу предложения 8.5 произвольный псевдохарактер $\phi : B_n \to \mathbb{R}$ единственным образом представим в виде суммы

$$\phi = \phi_n + \phi_{n-1} + \cdots + \phi_2, \tag{8.1}$$

где $\phi_k \in \Gamma_{n,k}$. Количество нетривиальных элементов в сумме (8.1) будем называть *рангом* псевдохарактера ϕ, а максимальный коэффициент $t \in \{2, \ldots, n\}$, при котором $\phi_t \neq 0$, назовем *степенью* псевдохарактера ϕ.

8.12. Замечание. В силу замечания 8.4 в пространстве $\mathcal{PX}(B_n)$ множество псевдохарактеров степени 1 пусто, а множество псевдохарактеров степени 2 совпадает с множеством $\Gamma_{n,2} \setminus 0$ нетривиальных вещественнозначных гомоморфизмов.

8.13. Замечание. Данное в п. 8.3 определение степени для субъядерных псевдохарактеров очевидным образом согласуется с общим определением степени (п. 8.11).

8.14. Замечание. Для произвольной косы $\beta \in B_n$ значения, принимаемые на косе β псевдохарактерами степени не выше k, однозначно восстанавливаются по набору кос $\sum_{J \in \mathbf{C}_n^{n-k}} \mathtt{RED}_J(\beta^{n!}) \in \mathbb{R}B_k$.

8.15. Замечание. Имея алгоритм для вычисления псевдохарактера $\phi : B_n \to \mathbb{R}$, мы можем найти и алгоритмы для вычисления его субъядерных слагаемых $\phi_2, \ldots, \phi_n$. Действительно, в силу определений для произвольного псевдохарактера $\phi : B_n \to \mathbb{R}$ имеем

$$\phi_n = \phi - \mathcal{A}^!_{n,\,n-1} \circ \mathcal{I}^!_{n,\,n-1}(\phi)$$

и

$$\phi_k = \mathcal{A}^!_{n,\,k} \circ \mathcal{I}^!_{n,\,k}(\phi) - \mathcal{A}^!_{n,\,k-1} \circ \mathcal{I}^!_{n,\,k-1}(\phi) \quad \text{при} \quad k < n.$$

Размерность подпространства $\langle\phi\rangle \subset \mathcal{PX}(B_n)$, порожденного этими субъядерными слагаемыми, равна рангу псевдохарактера ϕ. Из представленных результатов очевидным образом следует, что подпространство $\langle\phi\rangle$ – это и есть все те псевдохарактеры в $\mathcal{PX}(B_n)$, которые получаются из ϕ в результате применения к нему всевозможных Г-диагональных операторов (или, иными словами, всевозможных линейных комбинаций и композиций операторов из серий $\{\mathcal{I}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$, $\{\widetilde{\mathcal{R}}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$, $\{\mathcal{R}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$, $\{\mathcal{A}^!_{n,\,k}\}_{0 \leqslant k < n}$).

8.16. Пространство $\mathcal{PX}_\infty(B_\infty)$. Как уже упоминалось во введении, пространство $\mathcal{PX}(B_\infty)$ состоит из гомоморфизмов и имеет размерность 1. Назовем функционал $\tau : B_\infty \to \mathbb{R}$ *предельным псевдохарактером*, если для любого n его ограничение на подгруппу B_n является псевдохарактером. Пространство всех предельных псевдохарактеров обозначим через $\mathcal{PX}_\infty(B_\infty)$. Из полученных результатов очевидно следует, что существует естественная биекция между пространством $\mathcal{PX}_\infty(B_\infty)$ и пространством всевозможных бесконечных последовательностей вида $\{\phi_k\}_{k=2,3,\ldots}$, где $\phi_k \in \Gamma_k \subset \mathcal{PX}(B_k)$. При этой биекции последовательности $\{\phi_k\}_{k=2,3,\ldots}$ соответствует предельный псевдохарактер $\Phi \in \mathcal{PX}_\infty(B_\infty)$, у которого при любом $n \geqslant 2$ ограничение $\Phi|_{B_n}$ совпадает с суммой

$$\phi_n + \sum_{2 \leqslant k \leqslant n-1} \mathcal{A}^!_{n,\,k}(\phi_k).$$

8.17. Задача. В работе [6] показано, что для произвольного натурального n функционал

$$\operatorname{sgn}_n : B_n \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}_n(\beta) = \operatorname{sgn}(L(\beta)),$$

ставящий в соответствие косе классическую сигнатуру представленного этой косой зацепления, является квазиморфизмом. Пусть

$$\overline{\operatorname{sgn}}_n : B_n \to \mathbb{R}, \quad \overline{\operatorname{sgn}}_n(\beta) := \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sgn}_n(\beta^k)}{k},$$

– соответствующий псевдохарактер (см. начало введения).

Задача: вычислить степень и ранг псевдохарактера $\overline{\operatorname{sgn}}_n$ при $n \geqslant 4$. (Нетрудно видеть, что у $\overline{\operatorname{sgn}}_3$ степень равна трем, а ранг – двум.)

8.18. Задача. Из результатов работ [6] и [8] следует, что определенный в п. 8.17 псевдохарактер $\overline{\operatorname{sgn}}_3$ является линейной комбинацией закрученности (см. определение в [10]) и экспоненциальной суммы.

Задача: проверить, существуют ли другие нетривиальные линейные зависимости между псевдохарактерами, которые можно получить, применяя описанные в настоящей работе операторы к псевдохарактерам $\overline{\operatorname{sgn}}_n$ и псевдохарактерами, которые можно получить, применяя эти операторы к закрученностям.

Благодарности. Я сердечно благодарен С. С. Подкорытову за полезные обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. R. Bell, D. Margalit, *Injections of Artin groups.* — Comment. Math. Helv. **82** (2007), 725–751.
2. M. Bestvina, K. Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups.* — Geom. Topol. **6** (2002), 69–89.
3. К. С. Браун, *Когомологии групп.* Наука, М., 1987.
4. J. Dyer, E. Grossman, *The automorphism groups of the braid groups.* — Amer. J. Math. **103** (1981), 1151–1169.
5. J.-M. Gambaudo, É. Ghys, *Commutators and diffeomorphisms of surfaces.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), 1591–1617.
6. J.-M. Gambaudo, É. Ghys, *Braids and signatures.* — Bull. Soc. Math. France **133** (2005), 541–579.
7. K. Honda, W. Kazez, G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary.* I. — Invent. Math. **169** (2007), 427–449.
8. K. Honda, W. Kazez, G. Matić, *Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary.* II. — Geom. Topol. **12** (2008), 2057–2094.
9. V. Lin, *Braids and permutations.* Preprint, `ArXiv:math/0404528`.
10. А. В. Малютин, *Закрученность (замкнутых) кос.* — Алгебра и анализ **16**, No. 5 (2004), 59–91.
11. А. В. Малютин, *Признаки простоты зацеплений в терминах псевдохарактеров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 150–161.
12. А. А. Марков, *Основы алгебраической теории кос.* — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **16** (1945), 3–54.

Malutin A. V. Transformation formulas for pseudo-characters of braid groups.

We develop the theory of pseudo-characters of braid groups. We study a special family of operators between spaces of pseudo-characters of braid groups and describe techniques of obtaining new pseudo-characters of braid groups from known ones. A number of general results on the structure of the spaces of pseudo-characters is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

Поступило 16 ноября 2006 г.