Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

В. В. Макеев

О ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛАХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Тело постоянной ширины — это выпуклое тело K с постоянным расстоянием между любыми параллельными опорными плоскостями. Как хорошо известно (см. [1]), это расстояние является диаметром тела K, и в каждом направлении у K проходит ровно один диаметр, который от этого направления непрерывно зависит. Ниже мы также используем известную теорему о том, что в евклидовом пространстве всякое множество диаметра 1 содержится в теле постоянной ширины 1.

Для трёхмерного тела K постоянной ширины 1 и прямой L обозначим через $L(K)$ множество точек касания касательных к телу K прямых, параллельных L. Ясно, что $L(K)$ состоит из концов перпендикулярных прямой L диаметров тела K, и $L(K)$ гомеоморфно ортогонально проектируется на границу фигуры постоянной ширины на ортогональную прямой L плоскость P.

Теорема 1. *Для произвольного трёхмерного тела K постоянной ширины 1 и прямой L кривая $L(K)$ спрямляема и имеет длину $\leqslant \sqrt{2}\pi$, причём данная оценка не улучшаема.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть отрезки AB и CD единичной длины составляют не превосходящий прямого угол φ (рис. 1), и пусть диаметр тетраэдра $ABCD$ равен 1. Тогда $|AC| + |BD| \leqslant 2\sqrt{2}\sin(\varphi/2)$, причём равенство достигается только если отрезки AB и CD – скрещенные диагонали параллельных боковых граней правильной четырёхугольной призмы с ребром основания $\sin(\varphi/2)$.*

Доказательство. Будем раздвигать отрезки AB и CD в перпендикулярном к ним направлении до тех пор, пока $|AD|$ или $|BC|$ не достигнет 1. Пусть $|AD| = 1$. Далее будем поворачивать отрезок AD

Ключевые слова : выпуклое тело, фигура постоянной ширины.

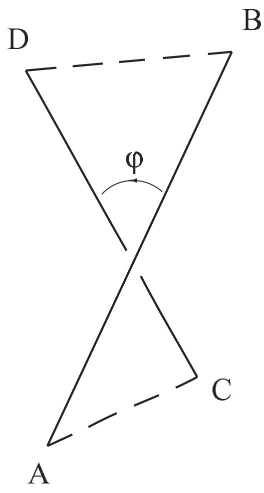

Рис. 1.

вокруг точки A в плоскости, перпендикулярной к параллельной отрезкам AB и CD плоскости, сохраняя направление отрезка CD и увеличивая расстояние между прямыми AB и CD, пока не выполнится равенство $|BC| = 1$. При этом углы $\angle DAB$ и $\angle ADC$, а значит, и длины $|AC|$ и $|BD|$ не уменьшаются.

Итак, можно считать, что $|AD| = |BC| = 1$. Спроектируем отрезки AB и CD на параллельную им плоскость, сохраняя обозначения для их концов, и пусть O – точка пересечения их проекций. Пусть $|OB| = |OD| = x$. Как показывают простые вычисления, в этом случае до проектирования сумма

$$|AC| + |BD| = 2(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \sin \frac{\varphi}{2},$$

которая максимальна при $x = 1/2$, что и требовалось. $\bullet$

Доказательство теоремы 1. Мы должны показать, что длина любой вписанной в $L(K)$ ломаной не превосходит $\sqrt{2}\pi$. Добавив в случае необходимости дополнительные вершины, мы считаем, что концы звеньев вписанной ломаной – концы n перпендикулярных прямой L диаметров тела K, соседние из которых составляют угол φ_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда по лемме 1 сумма длин двух звеньев ломаной, отвечающих двум соседним диаметрам, не превосходит

$$2\sqrt{2} \sin \frac{\varphi_i}{2} < \sqrt{2}\varphi_i.$$

Складывая все полученные неравенства, получаем требуемое.

Для доказательства точности оценки рассмотрим правильный $2n$-угольник диаметра 1, повернем его вокруг центра на угол $\pi/2n$ и сдвинем повёрнутый многоугольник на $\sin(\pi/4n)$ в перпендикулярном плоскости многоугольника направлении L. Вершины исходного многоугольника вместе с вершинами его образа при описанном движении являются вершинами антипризмы единичного диаметра. Пусть K – тело постоянной ширины 1, содержащее эту призму. По построению длина кривой $L(K)$ не менее суммы длин боковых рёбер антипризмы, которая равна $4n\sqrt{2}\sin(\pi/4n)$, откуда и следует требуемое. $\bullet$

Замечание. Рассматривая множество антипризм вышеописанного типа с общим центром, быстро уменьшающейся длиной бокового ребра, и выкинув в случае необходимости близкие вершины различных призм, чтобы диаметр объединения не превосходил 1, нетрудно построить для любых положительных a, b и c тело K постоянной ширины (содержащее объединение указанных призм), a-близкое к шару единичного диаметра и такое, что для любого направления L' найдётся некоторое направление L, составляющее с L' угол $< b$ и дающее кривую $L(K)$ длины по крайней мере $\sqrt{2}\pi - c$. Автору не известно, можно ли для произвольных положительных a и b построить такое a-близкое к шару единичного диаметра тело K постоянной ширины 1, чтобы для любого направления L длина кривой $L(K)$ составляла по крайней мере $\sqrt{2}\pi - b$.

Лемма 2. *Пусть отрезки AB и CD единичной длины составляют угол $\varphi \leqslant \pi/2$, и пусть диаметр тетраэдра $ABCD$ равен 1. Тогда расстояние между прямыми AB и CD не превосходит $\sin(\varphi/2)$, причём равенство достигается только в том случае, когда отрезки AB и CD – скрещенные диагонали параллельных боковых граней правильной четырёхугольной призмы с ребром основания $\sin(\varphi/2)$.*

Доказательство. Спроектируем снова отрезки AB и CD на параллельную им плоскость, сохранив обозначения для их концов. Пусть O – точка пересечения проекций отрезков AB и CD. Пусть $|OA| + |OD| \geqslant 1$. Покажем, что $|AD| \geqslant \cos(\varphi/2)$.

По теореме косинусов

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |OA|^2 + |OD|^2 + 2|OA||OD|\cos\varphi \\ &= (|OA| + |OD|)^2 - 4|OA||OD|\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

$$\geqslant (|OA| + |OD|)^2 - (|OA| + |OD|)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = (|OA| + |OD|)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Теперь требуемое неравенство леммы следует из теоремы Пифагора. Очевидно, что равенство возможно лишь в случае, когда $|OA| = |OD| = 1/2$, что и требовалось. •

Из леммы 2 следует, что для тела K постоянной ширины 1 длина ортогональной проекции кривой $L(K)$ на прямую L не превосходит $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. При этом если K содержит правильный тетраэдр с единичным ребром, а прямая L перпендикулярна скрещивающимся рёбрам тетраэдра, то длина ортогональной проекции кривой $L(K)$ на прямую L равна $1/\sqrt{2}$.

Теорема 2. *Для произвольного трёхмерного тела K постоянной ширины 1 существует такая прямая L, что длина ортогональной проекции кривой $L(K)$ на L не превосходит*

$$\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{20} < 0,466.$$

Доказательство. Из теоремы 6 работы [2] следует, что существует плоскость P, в которой лежат четыре из пяти диаметров тела K, соседние из которых составляют углы $\pi/5$. Из леммы 1 следует, что кривая $L(K)$ отклоняется от плоскости P не более чем на $\sin(\pi/10) + \sin(\pi/20)$, где L – перпендикулярная плоскости P прямая. Теорема 2 доказана. •

Замечание. Из правдоподобного утверждения (доказательство которого автору не известно), состоящего в том, что имеется плоскость P, в которой лежат четыре диаметра тела K, соседние из которых составляют угол $\pi/8$, следовало бы, что кривая $L(K)$ отклоняется от плоскости P не более чем на $2\sin(\pi/16) < 0,393$, где L – перпендикулярная плоскости P прямая.

Литература

1. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры.* Гостехиздат, М., 1951.
2. В. В. Макеев, *Плоские сечения выпуклых тел и универсальные расслоения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001), 219–233.

Makeev V. V. On three-dimensional bodies of constant width.

The main results are as follows. Let K be a three-dimensional body of constant width 1, and let L be a line. We denote by $L(K)$ the set of

all points where tangent lines of K parallel to L touch K. It is proved that for each L the curve $L(K)$ is rectifiable and its length is at most $\sqrt{2}\pi$; this estimate is sharp. Furthermore, there always exists a line L such that the length of the orthogonal projection of $L(K)$ to L is at most $\sin(\pi/10) + \sin(\pi/20) < 0.466$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 25 декабря 2008 г.