Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

В. В. Макеев

О МЕРЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПОЛЕЙ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР И ТРЁХМЕРНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Введение

Как обычно, под *выпуклой фигурой* (*выпуклым телом*) K мы понимаем компактное выпуклое подмножество плоскости (пространства) с непустой внутренностью, а через $S(K)$ (соответственно, $(V(K))$ обозначаем ее площадь (его объём). Через $\operatorname{conv}(A)$ обозначается выпуклая оболочка множества A.

Хорошо известно [1, 2], что всякая выпуклая фигура K содержится в центрально-симметричной выпуклой фигуре площади $\leqslant 2S(K)$ и содержит центрально-симметричную выпуклую фигуру площади $\geqslant 2S(K)/3$. В случае, когда K – треугольник, обе оценки не могут быть улучшены.

Пусть $\gamma_2^3 : E_2(\mathbb{R}^3) \to G_2(\mathbb{R}^3)$ – тавтологическое расслоение над многообразием Грассмана плоскостей в $\mathbb{R}^3$, где слоем над плоскостью является она же, рассматриваемая как двумерное подпространство в $\mathbb{R}^3$. Мы говорим, что в расслоении γ_2^3 задано поле выпуклых фигур, если в каждом слое выделена выпуклая фигура, непрерывно от этого слоя зависящая.

Основные результаты работы – две следующие теоремы.

Теорема 1. *Во всяком поле выпуклых фигур в расслоении γ_2^3 найдётся фигура K, содержащая центрально-симметричную выпуклую фигуру площади по крайней мере*

$$\frac{4+16\sqrt{2}}{31} S(K) > 0,858\, S(K).$$

Теорема 2. *Во всяком поле выпуклых фигур в расслоении γ_2^3 найдётся фигура K, содержащаяся в центрально-симметричной вы-*

Ключевые слова : аффинно-правильный восьмиугольник.

пуклой фигуре площади, не превосходящей

$$\frac{12\sqrt{2}-8}{7}S(K) < 1,282\,S(K).$$

Из теоремы 2 в качестве следствия вытекает

Теорема 3. *Всякое трёхмерное выпуклое тело K содержится в цилиндре с выпуклым центрально-симметричным основанием и объёмом, не превосходящим*

$$\frac{36\sqrt{2}-24}{7}V(K) < 3,845\,V(K).$$

Действительно, из теоремы 2 следует, что некоторая плоская ортогональная проекция L тела K вдоль прямой l содержится в центрально-симметричной выпуклой фигуре M площади, не превосходящей

$$\frac{12\sqrt{2}-8}{7}S(L).$$

Параллельные l прямые, проведённые через всевозможные точки M, образуют бесконечный выпуклый цилиндр. Опорные к K параллельные плоскости, проведённые в концах самой длинной (среди хорд, параллельных l) хорды тела K отсекают от рассматриваемого цилиндра ограниченный цилиндр C с выпуклым центрально-симметричным основанием объёма $\leqslant (36\sqrt{2}-24)V(K)/7 < 3,845V(K)$, как следует из [3, 4]. $\bullet$

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теорем 1 и 2.

§1. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы мы воспользуемся следующим утверждением: во всяком поле выпуклых фигур в расслоении γ_2^3 найдётся фигура, описанная вокруг аффинно-правильного восьмиугольника. В [5] это доказано для полей фигур, являющихся сечениями или проекциями произвольного трёхмерного выпуклого тела, однако сформулированное утверждение доказывается совершенно аналогично.

Теперь утверждение теоремы 1 вытекает из нижеследующей леммы.

Лемма 1. *Всякая выпуклая фигура K, описанная вокруг аффинно-правильного восьмиугольника, содержит центрально-симметричную выпуклую фигуру площади по крайней мере*

$$\frac{4+16\sqrt{2}}{31}S(K) > 0,858\,S(K).$$

Докажем лемму 1. Пусть P – аффинно-правильный восьмиугольник, вписанный в фигуру K. Так как утверждение леммы носит аффинный характер, то в дальнейшем мы считаем восьмиугольник P правильным с центром в 0. Докажем, что отношение $S(K \cap (-K))/S(K)$ минимально и равно указанному в лемме, если K имеет форму, изображённую на рис. 1.

Заметим, что фигура K содержится в восьмиугольной звезде, ограниченной продолжениями сторон восьмиугольника P, полученной добавлением к P восьми равных треугольников. Докажем, что рассматриваемое отношение площадей минимально, если K имеет общие внутренние точки разве лишь с одним треугольником из каждой пары симметричных относительно 0 добавленных равных треугольников. Для этого нам понадобится

Лемма 2. *Пусть две плоские выпуклые фигуры заданной площади содержатся в треугольнике ABC, причём обе содержат сторону AB треугольника. Тогда площадь пересечения фигур минимальна, только если они являются треугольниками, две стороны которых лежат на сторонах BC и AC исходного треугольника.*

Доказательство. Стандартные вариационные соображения показывают, что площадь пересечения нельзя уменьшить малым изменением рассматриваемых фигур с сохранением их площади только если они являются указанными в лемме треугольниками. •

Из леммы 2 следует, что площадь пересечения рассматриваемых в ней фигур не меньше половины минимальной из площадей этих фигур. Тогда, выкидывая из одного из каждой пары симметричных относительно 0 добавленных равных треугольников ту часть фигуры K, которая имеет меньшую площадь, мы не увеличиваем оцениваемое отношение площадей, так как при этой операции числитель оцениваемой дроби уменьшается не меньше, чем её знаменатель. Далее мы считаем, что фигура K пересекается с внутренностью разве лишь одного из каждой пары симметричных относительно 0 добавленных равных треугольников.

Теперь оцениваемое отношение равно отношению $S(P)/S(K)$, которое минимально, если K имеет изображённую на рис. 1 форму, полученную присоединением к P двух из восьми вышеупомянутых дополнительных треугольников, а также двух равных треугольников, полученных из двух смежных из добавленных при пересечении их прямой, проходящей через их общую вершину.

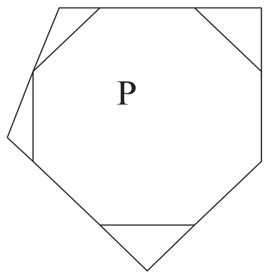

Рис. 1.

Действительно, фигура K может иметь общие внутренние точки с четырьмя добавленными треугольниками, из которых смежны только два или же все четыре. В первом случае её площадь максимальна, если она имеет изображённую на рис. 1 форму, а во втором случае, очевидно, её площадь ещё меньше. Остаётся заметить, что отношение $S(P)/S(K)$ для фигуры на рис. 1 такое, как требуется в лемме 1. Лемма 1, а с ней и теорема 1, доказаны. $\bullet$

§2. Доказательство теоремы 2

Для доказательства воспользуемся тем фактом, что во всяком поле выпуклых фигур в расслоении γ_2^3 найдётся фигура, вписанная в аффинно-правильный восьмиугольник. В [5] это доказано для полей фигур, являющимися сечениями или проекциями произвольного трёхмерного выпуклого тела, однако сформулированное выше утверждение доказывается совершенно аналогично.

Теперь утверждение теоремы вытекает из нижеследующей леммы.

Лемма 3. *Всякая выпуклая фигура K, вписанная в аффинно-правильный восьмиугольник, содержится в центрально-симметричной выпуклой фигуре площади, не превосходящей*

$$\frac{12\sqrt{2}-8}{7}S(K) < 1,282\,S(K).$$

При доказательстве леммы 3 мы также считаем описанный вокруг фигуры K восьмиугольник P правильным с центром в нуле. Покажем, что в этом случае отношение $k = S(\mathrm{conv}(K \cup (-K)))/S(K)$ максимально, если K является вписанным в P пятиугольником, изображённым на рис. 2 (вершины пятиугольника совпадают с вершинами восьмиугольника P), – для этого пятиугольника отношение k принимает указанное в лемме 3 значение. Ясно, что $k \leqslant S(P)/S(K) \leqslant \sqrt{2}$.

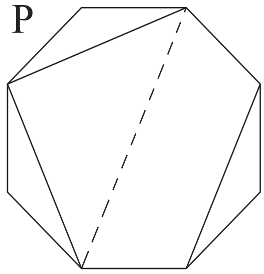

Рис. 2.

В дальнейшем для краткости множество $\mathrm{conv}(K \cup (-K))$ обозначается через $C(K)$. Доказательство мы разбиваем на нижеследующие пронумерованные п.п. 2.1–2.6.

Пусть фигура K такова, что отношение k максимально и больше указанного в лемме 3 (существование такой фигуры вытекает из стандартных соображений компактности).

2.1. Заменяя дуги границы фигуры K, лежащие внутри фигуры $-K$, отрезками, а остальную часть границы их продолжениями, мы можем считать, что K – многоугольник, так как, очевидно, при такой операции величина k не уменьшается. Ясно, что после этого каждая проходящая внутри P сторона фигуры K пересекает $-K$ по отрезку, и в дальнейшем мы не умаляя общности полагаем, что это условие выполняется.

2.2. Можно также считать, что все вершины многоугольника K лежат на границе восьмиугольника P.

В противном случае возникает ситуация, изображённая на рис. 3.

Но тогда вершину A многоугольника K можно перемещать в одну из сторон параллельно стороне BC многоугольника $-K$ (не увеличивая $S(K)$ и не уменьшая $S(C(K))$) до тех пор, пока A не попадёт

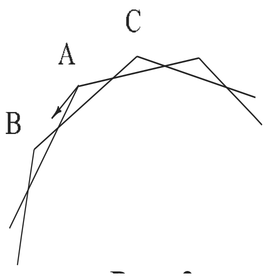

Рис. 3.

на сторону восьмиугольника P или же какая-то из вершин B и C не попадёт на границу многоугольника K, а это противоречит максимальности отношения k.

Далее мы считаем, что все вершины K лежат на границе P.

2.3. Теперь дополнения многоугольников K и $-K$ до P являются объединениями конечного числа треугольников, ни один из которых не содержится в другом, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Действительно, если, например, треугольник BAC площади s из дополнения K до P содержится в треугольнике $B'AC'$ из дополнения $-K$ до P (рис. 4), то к многоугольнику K следует добавить треугольник ABC, что увеличивает $S(K)$ на s, а $S(C(K))$ – на $2s$ и тем самым увеличивает k.

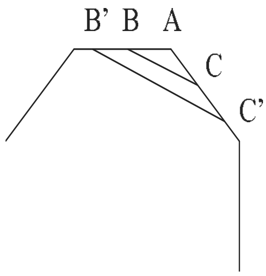

Рис. 4.

2.4. Докажем, что все стороны многоугольника K проходят внутри восьмиугольника P или же совпадают с его сторонами. Действительно, если на одной из сторон восьмиугольника P лежат стороны многоугольников K и $-K$, хотя бы одна из которых не совпадает со стороной восьмиугольника P, то, очевидно, $S(K)$ можно уменьшить, не уменьшая $S(C(K))$. Предположим, что вершина A многоугольника K (но не его сторона) принадлежит стороне a многоугольника P, на которой расположена не совпадающая с ней сторона b многоугольника $(-K)$. Ясно, что A принадлежит b, иначе можно уменьшить $S(K)$, не уменьшая $S(C(K))$. Если же A лежит внутри b, то A можно сдвигать в одну из сторон по b, не увеличивая $S(K)$ и не изменяя $S(C(K))$. Таким образом, можно считать, что A является одним из концов стороны b. В этом случае также очевидно можно уменьшить $S(K)$, не меняя $S(C(K))$, если A – не вершина восьмиугольника P. Если A – вершина P, то $-K$ не может иметь отличных от A общих точек с одной из инцидентных с A сторон восьмиугольника P, так как в противном случае из K можно выкинуть окрестность вершины $-A$, не изменив при этом $C(K)$. Многоугольник K, напротив, должен иметь некоторый общий отрезок c с этой стороной восьмиугольника P, так как обратное противоречит п. 2.3. Пусть отрезок c не совпадает со стороной восьмиугольника P. Таким образом, если у K больше нет общих вершин с P, то возникает изображённая на рис. 5 ситуация, которая, очевидно, противоречит п. 2.3 (в смысле взаимного расположения K и $-K$).

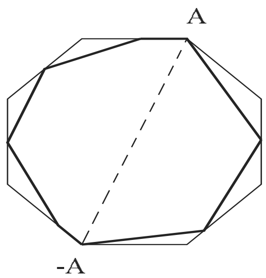

Рис. 5.

Если у K имеется отличная от A и $-A$ общая вершина с P, то это – B или C (рис. 6), что также противоречит п. 2.3, если эта вершина – C. Если же K содержит вершину B, то возникает изображённая на рис. 6 ситуация.

Легко заметить, что $b + c$ не превышает длины стороны восьмиугольника P, так как в противном случае площадь левой половины K относительно пунктирной линии на рис. 6 не менее площади правой

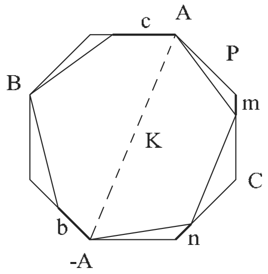

Рис. 6.

половины K на рис. 2 и площадь K не менее, чем у пятиугольника на рис. 2. Длины же отрезков m и n (см. рис. 6) не менее

$$\frac{6\sqrt{2}-4}{7}S(K)$$

длины стороны P, так как в противном случае малым уменьшением длины одного из отрезков b или c можно увеличить k. Пусть S – площадь восьмиугольника P, а s – площадь треугольника с вершинами в трёх идущих подряд вершинах восьмиугольника P. Тогда

$$\frac{12\sqrt{2}-8}{7} = \frac{S}{S-3s}.$$

Площадь K всегда не менее $S-4s$ и в силу сделанных предположений о b, c, m и n, а площадь $C(K)$ не более $S - Ss/(S-3s)$, поэтому

$$k \leqslant \frac{S - Ss/(S-3s)}{S-4s} = \frac{S}{S-3s},$$

что и завершает разбор данного случая.

Если отрезок c совпадает со стороной P (рис. 7), то легко проверить, что площадь K не менее площади пятиугольника, изображённого на рис. 2. Таким образом, из сказанного следует, что, если K имеет общую сторону с P, то его площадь не меньше требуемой, а величина k не больше требуемой, так как площадь левой части K относительно пунктирной линии на рис. 7 не менее площади правой части K относительно пунктирной линии на рис. 2, а площадь правой части K на рис. 7 не менее площади левой части K на рис. 2.

Далее мы предполагаем, что все стороны многоугольника K проходят внутри P или совпадают со сторонами P.

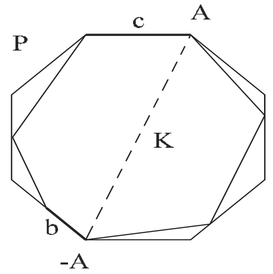

Рис. 7.

2.5. Докажем, что одна из вершин K совпадает с вершиной P. Для доказательства нам понадобится следующее простое наблюдение. (Оно было предложено Н. Ю. Нецветаевым в качестве олимпиадной задачи в 1977 г.)

Лемма 4. *Пусть из точки O плоскости исходят $2n$ лучей, разделяющие плоскость на $2n$ углов. Тогда хотя бы один из этих углов содержит симметричный относительно точки O образ другого угла.*

Доказательство. Если предположить противное, то внутри каждого из рассматриваемых углов проходит продолжение ровно одного из рассматриваемых лучей. Если один из рассматриваемых лучей является продолжением другого, то утверждение леммы, очевидно, выполняется, и далее мы предполагаем, что это не так. Пусть сумма некоторых идущих подряд n из рассматриваемых углов меньше развёрнутого. Тогда в силу сделанного предположения сумма любых n идущих подряд углов меньше развёрнутого, что противоречит тому, что общая сумма всех углов равна полному углу. •

Если предположить, что у K и P нет общих вершин, то в силу доказанного выше все стороны K проходят внутри P. Тогда по лемме 4 для некоторой стороны AB многоугольника K и некоторой стороны $A'B'$ многоугольника $-K$ возникает изображённая на рис. 8 ситуация, что противоречит п. 2.3.

2.6. Докажем, что P и K имеют не менее трёх общих вершин. Если K имеет ровно одну общую вершину с P, которую мы обозначаем A, то согласно п. 2.3 вершины K и $-K$ располагаются на границе P указанным на рис. 9 образом (через b и c обозначены длины симметричных отрезков границы P).

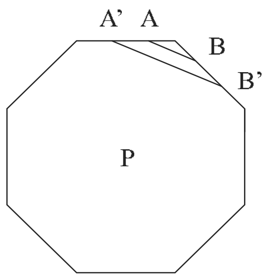

Рис. 8.

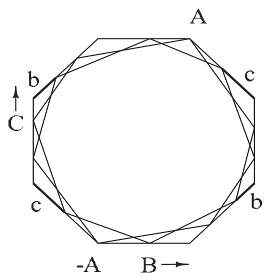

Рис. 9.

Для того, чтобы вершину B многоугольника K нельзя было сдвигать против часовой стрелки, увеличивая $S(C(K))$ и не увеличивая $S(K)$, необходимо условие $b < c$. Чтобы вершину C многоугольника K нельзя было сдвигать по часовой стрелке, увеличивая $S(C(K))$ и не увеличивая $S(K)$, необходимо условие $c < b$. Противоречие.

Случай, когда K имеет с P две общие соседние вершины уже рассмотрен в п. 2.4.

Если K имеет с P ровно две общие не соседние вершины, то K имеет шесть вершин, что, как и в п. 2.5, противоречит п. 2.3.

Если K имеет с P ровно три не соседние вершины, то они расположены в P через одну вершину и это противоречит п. 2.3.

Если K и P имеют не менее четырёх общих вершин, то либо среди них есть две соседние, а этот случай рассмотрен в п. 2.4, либо они идут через одну, что противоречит п. 2.3. Лемма 3 доказана.

Литература

1. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры.* Гостехиздат, М. 1951.

2. A. S. Besicovitch, *Measure of asymmetry of convex curves.* — J. London Math. Soc. **23** (1945), 237–240.
3. В. В. Макеев, *О параллелепипедах, описанных вокруг трёхмерного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **329** (2005), 79–87.
4. В. В. Макеев, *О приближении трёхмерного выпуклого тела цилиндрами.* — Алгебра и анализ **17**, No. 2 (2005), 133–144.
5. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.

Makeev V. V. On measure of central symmetry for fields of convex figures and three-dimensional convex bodies.

Let $\gamma_2^3 : E_2(\mathbb{R}^3) \to G_2(\mathbb{R}^3)$ be a tautological vector bundle over the Grassmann of 2-planes in $\mathbb{R}^3$, where the fiber over a plane is the plane itself regarded as a two-dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$. We say that a field of convex figures is given in γ_2^3 if in each fiber a convex figure is distinguished, which continuously depends on the fiber.

Theorem 1. *Each field of convex figures in γ_2^3 contains a figure K containing a centrally symmetric convex figure with area at least* $(4 + 16\sqrt{2})S(K)/31 > 0.858\,S(K)$. *(Here, $S(K)$ denotes the area of K.)*

Theorem 2. *Each field of convex figures in γ_2^3 contains a figure K that is contained in a centrally symmetric convex figure with area at most* $(12\sqrt{2} - 8)S(K)/7 < 1.282\,S(K)$.

Theorem 3. *Each three-dimensional convex body K is contained in a cylinder with centrally symmetric convex base and with volume at most* $(36\sqrt{2} - 24)V(K)/7 < 3.845\,V(K)$. *(Here, $V(K)$ denotes the volume of K.)*

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 25 декабря 2007 г.