Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

В. В. Макеев

О ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ И ЦЕНТРАЛЬНО–СИММЕТРИЧНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ПРИЗМАХ, ОПИСАННЫХ ВОКРУГ ТРЁХМЕРНОГО ЦЕНТРАЛЬНО–СИММЕТРИЧНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Всюду в дальнейшем выпуклым телом (выпуклой фигурой в двумерном случае) называем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью, а $V(K)$ (соответственно, $S(K)$) обозначает объём тела (площадь фигуры) K.

В работе [6] доказано, что всякая плоская центрально-симметричная выпуклая фигура K содержится в параллелограмме площади не более $4S(K)/3$.

Теорема 1. *Всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело K содержится в центрально-симметричной шестиугольной призме или параллелепипеде объёма, не превосходящего*

$$\frac{4}{\sqrt[3]{3}} V(K) < 2,7735\, V(K).$$

Доказательство. Мы докажем теорему для случая строго выпуклого тела K. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Пусть K_1 – центральное сечение тела K плоскостью P. В [1] (теорема 4.7) доказано, что в K_1 вписан аффинно-правильный шестиугольник A такой, что опорные плоскости к телу K в его вершинах параллельны некоторой прямой ℓ и ограничивают в плоскости P центрально-симметричный шестиугольник B, площадь которого не превосходит $4S(A)/3$.

Проведём к телу K опорные плоскости P_1 и P_2, параллельные P и касающиеся K в точках A_1 и A_2, соответственно. Так как теорема

Ключевые слова : аффинно-правильный шестиугольник, решетчатая упаковка.

1 – аффинная, то, совершив аффинное преобразование, можно считать, что бипирамида с вершинами в точках A_1 и A_2 и вершинах шестиугольника A – правильная, причём длины сторон правильного шестиугольника A равны $a/\sqrt{2}$, а длина высоты A_1A_2 равна $\sqrt{3}a$. При сделанных предположениях вершины A_1 и A_2 являются двумя концами большой диагонали некоторого куба с ребром длины a, а вершины шестиугольника A – середины рёбер этого куба, не имеющих общих вершин с указанной диагональю куба, объём рассматриваемой бипирамиды равен $3a^3/4$, а площадь грани равна $3a^2/8$.

Опорные плоскости тела K вместе с плоскостями P_1 и P_2 ограничивают центрально-симметричную шестиугольную призму C объёма $V(C) \leqslant 3a^3$, так как у призмы C и бипирамиды равные высоты, а площади оснований связаны неравенством $S(B) \leqslant 4S(A)/3$. Проведём к телу K опорные плоскости, параллельные граням рассматриваемой вписанной правильной бипирамиды. Эти плоскости естественным образом разбиваются на две тройки пар параллельных плоскостей, каждая из которых ограничивает описанный вокруг тела K прямоугольный параллелепипед. Пусть Q – тот из этих двух параллелепипедов, у которого сумма длин исходящих из одной вершины рёбер не больше, чем у другого. Обозначим эту сумму через s.

Ясно, что $V(Q) \leqslant (s/3)^3$ и $V(K) \geqslant a^2s/4$. Первое неравенство следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом, а второе из того, что тело K, кроме бипирамиды объёма $3a^3/4$, содержит ещё двенадцать треугольных пирамид с основанием площади $3a^2/8$ и суммой высот не менее $2s - 6a$. Таким образом, отношение объёма тела K к объёмам параллелепипеда Q и призмы C не меньше $27a^2/4s^2$ и $s/12a$, соответственно.

Первое отношение убывает с ростом s, а второе возрастает. При $s = 3\sqrt[3]{3}a$ они равны $\sqrt[3]{3}/4$. Теорема 1 доказана. •

Следствие. *Всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело K допускает решётчатую упаковку в пространстве плотности по крайней мере*

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{4} > 0,3605.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть решётчатое покрытие пространства (без общих внутренних точек) указанными в теореме 1 центрально-симметричными шестиугольными призмами или параллелепипедами. •

Замечание. Из приведённых рассуждений видно, что имеет место следующее более сильное утверждение: всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело K имеет пару параллельных опорных плоскостей, слой между которыми допускает решётчатую упаковку транслятами тела K плотности по крайней мере $\sqrt[3]{3}V(K)/4 > 0,3605$. (Если K – шар, то плотность такой упаковки не превосходит $\pi/(3\sqrt{3}) < 0,6046$.) В [4] доказано, что всякое трёхмерное выпуклое тело K имеет пару параллельных опорных плоскостей, слой между которыми допускает решётчатую упаковку транслятами тела K плотности $\geqslant 1/4$.

Вопрос о плотнейшей решётчатой упаковке для произвольной выпуклой фигуры на плоскости решён в [5], где доказано, что она не менее 2/3 и для треугольника не может быть больше. Вопрос о плотнейшей решётчатой упаковке для произвольной центрально-симметричной выпуклой фигуры на плоскости, кажется, до сих пор не решён.

В [2] доказано, что всякое трёхмерное выпуклое тело K содержится в параллелепипеде объёма $\leqslant 3\sqrt{2}V(K)$.

Теорема 2. *Всякое трёхмерное центрально-симметричное выпуклое тело K содержится в параллелепипеде объёма*

$$\frac{4}{3}\left(3+\frac{6}{\sqrt{3}(1+\operatorname{ctg}(\pi/12))}\right)^{2/3}\cdot V(K) < 3,2082V(K).$$

Доказательство. В [3] доказано, что центральное сечение тела K некоторой плоскостью P описано вокруг аффинного образа S полуправильного выпуклого равностороннего двенадцатиугольника с равными взятыми через один углами. Описанная вокруг S выпуклая фигура K_1 содержится в звёздной фигуре Z, являющейся объединением двух равных правильных шестиугольников, каждый из которых ограничен продолжениями взятых через одну сторон двенадцатиугольника S. Взятые через одну вершины двенадцатиугольника S составляют вершины двух правильных шестиугольников с общим центром. Обозначим через A тот из этих шестиугольников, длина стороны которого не меньше, чем у другого.

Фигура K_1 содержится в параллелограмме R, ограниченном опорными прямыми к K_1 в двух противоположных вершинах шестиугольника A и параллельными проходящей через эти вершины опорными прямыми к звёздной фигуре Z. Простые вычисления показывают, что

$$S(R) \leqslant \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}(1+\operatorname{ctg}(\pi/12))}\right) \cdot S(A).$$

Проведём к телу K опорные плоскости P_1 и P_2, параллельные плоскости P и касающиеся тела K в точках A_1 и A_2, соответственно. Как и при доказательстве теоремы 1, совершив аффинное преобразование, мы считаем, что бипирамида с вершинами в точках A_1 и A_2 и вершинах шестиугольника A – правильная, причём длины сторон правильного шестиугольника A равны $a/\sqrt{2}$, а длина высоты A_1A_2 равна $\sqrt{3}a$. В качестве фигуры K_1 рассматриваем пересечение плоскости P и тела K, которое, как и выше, мы считаем строго выпуклым.

Рассмотрим два содержащих тело K параллелепипеда Q_1 и Q_2. В качестве Q_1 возьмём параллелепипед Q из доказательства теоремы 1, а в качестве Q_2 возьмём параллелепипед, ограниченный плоскостями P_1 и P_2 и опорными плоскостями тела K, проходящими через стороны параллелограмма R. Отношение объёмов параллелепипедов Q_1 и Q_2 к объёму тела K не превосходит, соответственно, $4s^2/(27a^2)$ и

$$\frac{a}{s}\left(12 + \frac{24}{\sqrt{3}(1+\operatorname{ctg}(\pi/12))}\right),$$

где s означает то же, что и в доказательстве теоремы 1. Как и выше, наименьшая из этих двух величин максимальна, когда они равны. Тогда отношение объёмов рассматриваемых параллелепипедов к объёму тела K не превосходит

$$\frac{4}{3}\left(3 + \frac{6}{\sqrt{3}(1+\operatorname{ctg}(\pi/12))}\right)^{2/3} \leqslant 3,2082.$$

Теорема 2 доказана. $\bullet$

Литература

1. В. В. Макеев, *Трёхмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов.* 2. — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 110–133.
2. В. В. Макеев, *О параллелепипедах, описанных вокруг трёхмерного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **329** (2005), 79–87.
3. В. В. Макеев, *Плоские сечения выпуклых тел и универсальные расслоения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001), 219–233.

4. В. В. Макеев, *Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 131–155.
5. I. Fáry, *Sur la densité des réseaux de domains convexes.* — Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 152–161.
6. И. К. Бабенко, *Асимптотический объём торов и геометрия выпуклых тел.* — Мат. заметки **44**, No. 2 (1988), 177–190.

Makeev V. V. On parallelepipeds and centrally symmetric hexagonal prisms circumscribed about a three-dimensional centrally symmetric convex body.

Let K be a three-dimensional centrally symmetric compact convex set of unit volume. It is proved that K is contained in a centrally symmetric hexagonal prism or a parallelepiped with volume $4/\sqrt[3]{3} < 2.7735$. This fact implies that K admits a lattice packing in space with density at least $\sqrt[3]{3}/4 > 0.3605$. Furthermore, K is contained in a parallelepiped with volume $4(3+6/(\sqrt{3}(1+\mathrm{ctg}(\pi/12))))^{2/3}/3 < 3.2082$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@inbox.ru

Поступило 24 января 2008 г.