Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

В. В. Макеев

О МНОГОУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ЗАМКНУТУЮ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ КРИВУЮ

Введение

Шнирельман [1] доказал, что на всякой регулярной несамопересекающейся плоской кривой лежат вершины некоторого квадрата. Стормквист доказал, что на всякой регулярной несамопересекающейся кривой в трёхмерном пространстве лежат вершины равностороннего пространственного четырёхугольника с диагоналями равной длины (ср. статью Гриффитса [2]). В [3, 4] доказано, что на всякой регулярной несамопересекающейся замкнутой кривой в трёхмерном пространстве лежат вершины некоторого ромба. Там же доказано многомерное обобщение теоремы о вписанном ромбе: на всякой регулярной замкнутой несамопересекающейся кривой в евклидовом пространстве нечётной размерности n лежат вершины гиперплоской равнозвенной $(n+1)$-звенной ломаной.

Будем называть *выпуклой* пространственную кривую, лежащую на границе своей выпуклой оболочки. Кажется правдоподобной следующая гипотеза.

Гипотеза 1. Для любого наперед заданного невырожденного[1] четырёхугольника Q всякая регулярная замкнутая несамопересекающаяся выпуклая кривая в трёхмерном пространстве содержит вершины некоторого плоского четырёхугольника с теми же отношениями длин сторон (и в том же порядке), что и у Q.

Замечания. 1. Условие выпуклости кривой здесь существенно: если кручение рассматриваемой кривой не меняет знак, то на ней, вообще говоря, не лежат вершины некоторых плоских четырёхугольников, близких к отрезку, т.е. четырехугольников, у которых отношение длины одной из сторон к сумме длин остальных трёх сторон близко к 1.

Ключевые слова : теорема Шнирельмана, равнозвенная ломаная.

[1]Многоугольник называется вырожденным, если длина одной из его сторон равна сумме длин остальных сторон.

2. Для сферической кривой (а при переходе к пределу при стремлении радиуса сферы к бесконечности и для плоской кривой) получается, что в кривую вписан вписанный в окружность четырёхугольник с заданным отношением сторон. Такое предположение для плоской кривой ранее высказывалось автором [4, 5].

Автору известно доказательство гипотезы 1 лишь для случая ромба [3, 4].

Можно рассмотреть и более общую гипотезу.

Гипотеза 2. Для любого наперед заданного невырожденного многоугольника P всякая регулярная замкнутая несамопересекающаяся кривая в евклидовом пространстве нечётной размерности n содержит вершины ломаной с теми же отношениями длин звеньев (и в том же порядке), что и у P, $n+1$ заданных (или хотя бы идущих подряд) вершин которой лежат в одной гиперплоскости.

Ниже мы рассматриваем некоторый очень специальный случай гипотезы 2, когда ломаная имеет $n+2$ звеньев.

§1. Пятизвенные ломаные, вписанные в замкнутую пространственную кривую

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *У всякой трёхмерной замкнутой ориентированной*[2] *пятизвенной ломаной либо смешанное произведение трёх векторов, идущих по некоторым трём соседним звеньям ломаной, равно* 0*, либо какие-то два таких произведения имеют различные знаки.*

Доказательство. Предположим, что нашлась трехмерная ломаная $ABCDE$, у которой все рассматриваемые смешанные произведения не равны 0 и имеют один и тот же знак. Совершив аффинное преобразование, мы считаем, что координаты вершин суть

$$A(-1,-1,0), \quad B(0,-1,0), \quad C(0,0,0), \quad D(0,0,1), \quad E(x,y,z).$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$(\vec{AB},\vec{BC},\vec{CD}) = 1, \quad (\vec{BC},\vec{CD},\vec{DE}) = x, \quad (\vec{CD},\vec{DE},\vec{EA}) = y - x,$$

$$(\vec{DE},\vec{EA},\vec{AB}) = z - y - 1, \quad (\vec{EA},\vec{AB},\vec{BC}) = -z.$$

[2] Мы считаем, что звенья ориентированной ломаной циклически упорядочены и имеют согласованную ориентацию.

Так как в силу первого равенства рассматриваемые смешанные произведения положительны, то в силу следующих трёх равенств получаем $0 < x < y < z$, что противоречит вытекающему из последнего равенства условию $-z > 0$. Это и завершает доказательство леммы. □

Замечания. 1. Точки $A(-1,-1,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,0)$, $D(0,0,1)$, $E(0,1;1;-1)$, $F(-0,2;-0,8;-0,01)$ являются вершинами *шестизвенной* ломаной, для которой все шесть соответствующих смешанных произведений положительны.

2. Верно ли утверждение леммы 1 для замкнутой *выпуклой* ломаной[3] с произвольным числом звеньев? Верно ли, что в ряду из смешанных произведений векторов, идущих по тройкам соседних звеньев выпуклой ориентированной ломаной, имеется по крайней мере четыре перемены знака? В. Д. Седых доказал инфинитезимальный вариант этого утверждения – гипотезу Шерка о том, что на всякой трижды дифференцируемой выпуклой регулярной несамопересекающейся кривой в трёхмерном пространстве имеются четыре точки с нулевым кручением.

Теорема 1. *На всякой регулярной несамопересекающейся замкнутой кривой в трёхмерном пространстве лежат вершины некоторой равнозвенной пятизвенной замкнутой ломаной, четыре вершины которой лежат в одной плоскости.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для C^2-гладкой регулярной замкнутой кривой γ, на которой мы фиксируем некоторую ориентацию. Множество M равнозвенных, вписанных в γ ломаных с 5 вершинами, упорядоченными в согласии с ориентацией кривой γ, для типичной кривой γ, т.е. для открытого плотного в C^2-топологии множества кривых, является одномерным компактным подмногообразием многообразия γ^5.

Группа $\mathbb{Z}_5$ действует в многообразии γ^5 циклическими перестановками координат. Покажем, что M содержит связную компоненту, инвариантную относительно действия группы $\mathbb{Z}_5$. Для этого заметим, что для типичной кривой γ степень проекции $p : M \to \gamma$, сопоставляющей с ломаной её первую вершину, равна 1. Действительно, эта степень равна 1 для C^2-близких к окружности кривых γ, для которых p – гомеоморфизм. Так как рассматриваемые кривые гладко

[3] Т.е. ломаной, лежащей на границе своей выпуклой оболочки.

деформируемы друг в друга (после выхода в $\mathbb{R}^4$, чтобы избежать самопересечений), то для типичной кривой γ эта степень равна 1. Многообразие M состоит из $\mathbb{Z}_5$-инвариантных компонент и из пятёрок компонент, переходящих друг в друга под действием $\mathbb{Z}_5$. Так как степень сужения проекции p на такие пятёрки компонент делится на 5, то имеется и $\mathbb{Z}_5$-инвариантная компонента N.

Если совместить первую вершину некоторой ломаной из N со второй, непрерывно перемещая её по компоненте N, то вершины ломаной циклически переставляются и, согласно лемме 1, смешанное произведение трёх векторов, идущих по некоторым соседним звеньям ломаной, или равно 0, или же меняет знак при циклической перестановке точек, а значит по непрерывности равно 0 для некоторого промежуточного положения ломаной на N, что и завершает доказательство для типичной кривой γ.

Общий случай получается из рассмотренного гладкого случая предельным переходом с учётом того, что искомая вписанная ломаная не может вырождаться. □

§2. Многомерный случай

Аналогично лемме 1 доказывается её нижеследующий многомерный аналог.

Лемма 2. *В пространстве нечётной размерности n для всякой замкнутой ориентированной $(n+2)$-звенной ломаной или же смешанное произведение n векторов, идущих по некоторым n соседним звеньям ломаной, равно 0, или же какие-то два таких произведения имеют различные знаки.*

Замечание. В действительности, нетрудно показать, что сумма всех таких смешанных произведений векторов, идущих по некоторым n соседним звеньям ломаной, равна 0.

С учётом леммы 2 совершенно аналогично доказывается многомерный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *На регулярной несамопересекающейся замкнутой кривой γ в пространстве нечётной размерности n, для которой $n+2$ является степенью простого числа, лежат вершины некоторой равнозвенной $(n+2)$-звенной замкнутой ломаной, $n+1$ вершин которой лежат в одной гиперплоскости.*

Доказательство. В качестве множества M здесь мы рассматриваем упорядоченные в согласии с ориентацией кривой γ наборы вершин равнозвенных, вписанных в γ ломаных с $n+2$ вершинами. Для типичной кривой γ, т.е. для кривых из открытого плотного в C^2-топологии множества, M является одномерным компактным подмногообразием многообразия γ^{n+2}.

Группа $\mathbb{Z}_{n+2}$ действует в γ^{n+2} циклическими перестановками координат. Как и выше, степень проекции $p : M \to \gamma$, сопоставляющей с ломаной её первую вершину, для типичной кривой равна 1. Пусть q – простое число, для которого $n+2 = q^k$. Тогда степень сужения проекции p на объединение неинвариантных компонент делится на q. Следовательно, многообразие M содержит $\mathbb{Z}_{n+2}$-инвариантную связную компоненту. Далее доказательство проходит без изменений с учётом леммы 2. $\square$

Замечание. Вполне вероятно, что теорема 2 верна при произвольном нечётном n. Первые три размерности, в которых она не доказана, равны 13, 19 и 31.

§3. О делении длины замкнутой пространственной кривой плоскостью

В [4] доказано, что в пространстве нечётной размерности n на всякой замкнутой спрямляемой кривой найдутся $n+1$ точек, лежащих в некоторой гиперплоскости и разбивающих кривую на части равной длины.

Теорема 3. *На всякой спрямляемой замкнутой кривой в пространстве нечётной размерности n лежат принадлежащие некоторой гиперплоскости $n+1$ точек, разбивающих кривую на части, одна из которых вдвое длиннее каждой из остальных.*

Доказательство. Для доказательства ориентируем нашу кривую и для каждой её точки рассмотрим содержащее эту точку множество Σ из $n+2$ точек кривой, циклически упорядоченное в согласии с ориентацией кривой и делящее кривую на части равной длины. Если совместить первую точку конфигурации Σ со второй, непрерывно перемещая Σ по кривой, то $n+2$ точек конфигурации Σ циклически переставляются. Согласно лемме 2 смешанное произведение n векторов, идущих по некоторым n соседним звеньям ломаной с вершинами в точках конфигурации Σ, или равно 0, или же меняет знак при циклической перестановке точек. Значит, по непрерывности, для некоторого промежуточного положения конфигурации Σ это смешанное произведение равно 0, что и завершает доказательство теоремы 3. $\square$

Также кажется правдоподобным, что при нечётном n длину выпуклой спрямляемой замкнутой n-мерной кривой можно разделить гиперплоскостью на $n+1$ частей в любом наперёд заданном отношении. Существенность условия выпуклости кривой хорошо видна на примере трёхмерного пространства: если кручение на рассматриваемой кривой не меняет знак, то никакие четыре достаточно близкие её точки не лежат в одной плоскости.

Литература

1. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — УМН **10** (1944), 34–44.
2. H. Griffiths, *The topology of square pegs in round holes.* — Proc. London Math. Soc. (3) **62** (1991), 647–672.
3. В. В. Макеев, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых пространственных кривых и выпуклых тел.* — Алгебра и анализ **16**, No. 5 (2004), 92–100.
4. В. В. Макеев, *О четырёхугольниках, вписанных в замкнутую кривую, и её вершинах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **299** (2003), 241–251.
5. В. В. Макеев, *О четырёхугольниках, вписанных в замкнутую кривую.* — Мат. заметки **57**, No. 1 (1995), 129–132.

Makeev V. V. On polygons inscribed in a closed space curve.

Let n be an odd positive integer. It is proved that if $n+2$ is a power of a prime number and γ is a regular closed non-self-intersecting curve in $\mathbb{R}^n$, then γ contains vertices of an equilateral $(n+2)$-link polyline with $n+1$ vertices lying in a hyperplane. It is also proved that if γ is a rectifiable closed curve in $\mathbb{R}^n$, then γ contains $n+1$ points that lie in a hyperplane and divide γ into parts one of which is twice 1 as long as each of the others.

С.-Петербургский
государственный университет,
Старый Петергоф, Университетский пр. 28
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mvv57@mbox.ru

Поступило 21 июня 2009 г.