Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

**В. В. Макеев**

# ОДНО ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ВЫПУКЛЫХ ШЕСТИУГОЛЬНИКОВ

Всюду в дальнейшем под выпуклой фигурой понимаем компактное выпуклое плоское множество с непустой внутренностью, $aK$ обозначает гомотетичную копию множества $K$ с коэффициентом $a$. $S(K)$ обозначает площадь фигуры $K$.

Лассак [1] доказал, что для всякой выпуклой фигуры $K$ и содержащегося в ней треугольника $T$ максимальной площади фигура $K$ содержится в гомотетичной копии треугольника $T$ с коэффициентом $5/2$. Кажется правдоподобной следующая гипотеза.

**1. Гипотеза.** *Для всякой плоской выпуклой фигуры $K$ и содержащегося в ней треугольника $T$ максимальной площади фигура $K$ содержится в $\sqrt{5}T$.*

Ниже мы покажем, что для полного доказательства гипотезы её достаточно проверить в случае, когда $K$ – выпуклый шестиугольник, но докажем её лишь для случая, когда $K$ – выпуклый пятиугольник.

Пусть $a_2$ – минимальное число $> 0$ такое, что для всякой плоской выпуклой фигуры $K$ и вписанного в неё треугольника $T$ максимальной площади фигура $K$ содержится в $a_2T$.

**2. Утверждение.** *Вышеопределённое минимальное значение $a_2$ реализуется в случае некоторого выпуклого многоугольника $K$ с $\leqslant 6$ вершинами. При этом $a_2 = S(K)/S(T)$, где $T$ – вписанный в $K$ треугольник максимальной площади.*

**Доказательство.** Пусть $A$, $B$ и $C$ – вершины вписанного в выпуклую фигуру $K$ треугольника $T$ максимальной площади. Очевидно, что $A$, $B$ и $C$ лежат на границе фигуры $K$. Проведём к $K$ опорные прямые, параллельные прямым $AB$, $BC$ и $CA$ и имеющие с $K$ некоторые общие точки $D$, $E$ и $F$, соответственно. Очевидно, что эти

---

*Ключевые слова* : треугольник максимальной площади, симплекс максимального объема.

опорные прямые ограничивают минимальный треугольник $T'$, гомотетичный $T$ и содержащий $K$. Нетрудно видеть, что $T'$ гомотетичен $T$ с коэффициентом $S(ADBECF)/S(\triangle ABC)$. При этом очевидно, что треугольник $T'$ заведомо является треугольником максимальной площади, вписанным в выпуклый многоугольник $ADBECF$ с $\leqslant 6$ вершинами, что и завершает доказательство. $\square$

**3. Замечание.** В [2, с. 69] доказано, что во всякую плоскую выпуклую фигуру $K$ вписан $n$-угольник площади по крайней мере

$$\frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} S(K).$$

Отсюда следует, что для всякой плоской выпуклой фигуры $K$ и содержащегося в ней треугольника $T$ максимальной площади выполняется неравенство $S(K) \leqslant 4\pi S(T)/(3\sqrt{3})$. Тем более для шестиугольника $ADBECF$ из доказательства утверждения 2 выполняется неравенство

$$\frac{S(ADBECF)}{S(T)} \leqslant \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} < 2,419,$$

что улучшает оценку $5/2$, полученную Лассаком.

**4. Теорема.** *Гипотеза* 1 *верна в случае, когда* $K$ *– выпуклый пятиугольник.*

**Доказательство.** Пусть $K$ – выпуклый пятиугольник с вершинами $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$, и пусть $T$ – вписанный в $K$ треугольник максимальной площади.

Заметим, что по крайней мере две вершины треугольника $T$ совпадают с вершинами пятиугольника $K$, поскольку в противном случае две вершины треугольника $T$ можно так сдвинуть, что его площадь возрастёт. (Разумеется, это верно и тогда, когда $K$ – произвольный выпуклый многоугольник.)

В дальнейшем мы не умаляя общности можем считать, что никакие три подряд идущие вершины пятиугольника $K$ не являются вершинами треугольника $T$ максимальной площади. Действительно, пусть $A$, $B$ и $C$ – вершины треугольника $T$. Проведём параллельную $AC$ опорную к пятиугольнику $K$ прямую $\ell$, проходящую, например, через вершину $D$. Так как $S(\triangle ADC) \leqslant S(\triangle ABC)$, то $\ell$ и прямые $AB$ и $BC$ ограничивают треугольник положительно гомотетичный $\triangle ABC$ с коэффициентом $\leqslant 2$ и содержащий $K$.

В дальнейшем мы также можем считать, что каждая вершина пятиугольника $K$ является одной из вершин по крайней мере двух различных содержащихся в $K$ треугольников максимальной площади и имеющих свои вершины в вершинах $K$. Действительно, если вершина $A$ является вершиной ровно одного вписанного в пятиугольник $K$ треугольника $AGH$ максимальной площади, то вершину $A$ пятиугольника можно сдвигать параллельно его стороне $GH$ в одну из сторон, не уменьшая $S(K)$ до тех пор, пока это условие единственности не нарушится, или же пятиугольник $K$ не превратится в четырёхугольник, для которого требуемую оценку для $S(K)/S(T)$ можно даже заменить на 2. Если же вершина $H$ рассматриваемого треугольника $AGH$ максимальной площади расположена внутри стороны пятиугольника $K$, то её можно заменить на любой из концов этой стороны.

Вышеизложенные соображения позволяют нам в дальнейшем считать, что по крайней мере четыре из пяти треугольников с вершинами в вершинах пятиугольника $K$ и имеющих с ним только одну общую сторону, имеют максимальную площадь.

Пусть, например,

$$S(\triangle ABD) = S(\triangle BCE) = S(\triangle CDA) = S(\triangle DEB) \geqslant S(\triangle ACE).$$

В этом случае $AE \| BD$, $BC \| AD$ и $BE \| CD$. Обозначим длину отрезка $AE$ буквой $x$, длину $BD$ – буквой $y$, и пусть $k = y/(x+y)$, а $S = S(ABDE)$. Простые вычисления показывают, что

$$S(\triangle DBE) = kS, \quad S(K) = (1+k^2)S \quad \text{и} \quad S(\triangle ACE) = (1-k^2)S.$$

Значит, $(1-k^2)S \leqslant kS$ и $k \geqslant (\sqrt{5}-1)/2$. Тогда

$$\frac{S(K)}{S(\triangle DBE)} = \frac{(1+k^2)}{k} \leqslant \sqrt{5},$$

так как $k < 1$. При этом равенство достигается только при $k = (\sqrt{5}-1)/2$, причём в этом случае $ABCDE$ – аффинно-правильный пятиугольник. Теорема доказана. □

**5. Замечание.** Интересен также вопрос о нахождении минимального положительного числа $a_n$ такого, что для всякого выпуклого тела $K$ в $\mathbb{R}^n$ и любого вписанного в него симплекса $T$ максимального объёма тело $K$ содержится в $a_n T$. Приведённые выше рассуждения показывают, что $a_n$ реализуется в случае некоторого выпуклого многогранника $K$ с $\leqslant 2(n+1)$ вершинами, при этом $a_n = V(K)/V(T)$. Кроме того, симплекс $T$ имеет вершины в вершинах $K$, и каждая вершина экстремального многогранника $K$ является вершиной не менее $n$ вписанных в него симплексов максимального объёма. Предположительный вид такого многогранника даже при $n = 3$ автору не известен.

## Литература


1. M. Lassak, *Approximation of convex bodies by triangles.* — Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 207–210.
2. Л. Ф. Тот, *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве.* Физматлит, М. 1958.



Makeev V. V. An extremal property of convex hexagons.

The following conjecture is discussed: if $K$ is a plane convex figure and $T$ is a triangle of maximal area contained in $K$, then $K$ is contained in $\sqrt{5}T$. It is shown that it suffices to check the conjecture in the case where $K$ is a convex hexagon, but the conjecture is proved only in the case where $K$ is a pentagon.



С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

*E-mail*: mvv57@inbox.ru


Поступило 22 ноября 2008 г.