

А. И. Курносенко

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ

Продолжая тему статьи [1], мы предполагаем, что читателю известны основные понятия, которыми мы оперировали ранее – инверсные инварианты δ и σ , индекс закрученности спирали (M, N) , построение биполярной системы координат и пр.

Представляемое здесь свойство логарифмической спирали состоит в возможности реализовать на дуге этой кривой *любые наперёд заданные значения инвариантов δ и σ* . Следствие этого – реализуемость *любых граничных условий, возможных на кривых с монотонной кривизной* (мы предполагаем конечные значения кривизн), путём инверсии должным образом подобранной дуги логарифмической спирали.

Для иллюстрации множества значений инвариантов, возможных на некоторой спирали $z(t) = x(t) + iy(t)$, мы предложили в [1] построение, названное $(\delta-\sigma)$ -*диаграммой* кривой: определяются значения инвариантов $\delta(t_1, t)$ и $\sigma(t_1, t)$ для подвижной точки $z(t)$ относительно фиксированной точки $z(t_1)$. Исключение t даёт однопараметрическое семейство графиков $\delta(\sigma; t_1)$.

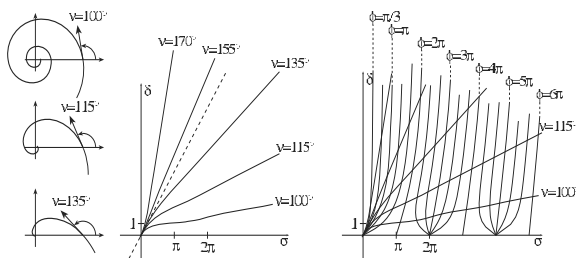


Рис. 1.

Для логарифмической спирали $r(\phi) = r_0 e^{\phi \operatorname{ctg} \nu}$ (ν – угол между касательной и полярным радиусом) в качестве параметра используем

Ключевые слова : граничные элементы кривизны, инверсное расстояние.

полярный угол ϕ . Известно, что поворот логарифмической спирали равносителен гомотетии, т.е. две её дуги $[\phi_1, \phi_2]$ и $[\phi'_1, \phi'_2]$ подобны, если $\phi_2 - \phi_1 = \phi'_2 - \phi'_1$. Поэтому вид $(\delta - \sigma)$ -диаграммы не зависит от выбора начальной точки ϕ_1 .

Диаграмма состоит из единственного графика $\delta(\sigma)$, полученного исключением ϕ из $\delta(\phi)$ и $\sigma(\phi)$.

Положение меняет наличие параметра ν . Диаграмма для семейства логарифмических спиралей с возрастающей кривизной, $\pi/2 < \nu < \pi$, заполняет весь квадрант $\delta > 0, \sigma > 0$ возможных значений инвариантов. Она показана на рис. 1 как семейство графиков $\delta(\sigma; \nu)$. На правом фрагменте рисунка дополнительно изображены линии $\phi = \text{const}$. Тем самым рисунок становится номограммой для графического решения системы уравнений

$$\delta_0 = \delta(\phi, \nu), \quad \sigma_0 = \sigma(\phi, \nu). \tag{1}$$

Её решение, ввиду монотонности вовлечённых функций, осуществляется простейшими численными методами. Доказательству существования и единственности решения предпослём одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Для всех действительных $(x, y) \neq (0, 0)$ справедливо неравенство

$$4 \frac{\text{ch } y - \cos x}{x^2 + y^2} < \frac{\text{sh } y}{y} + \frac{\sin x}{x}, \tag{2}$$

в правой части которого предполагается естественное раскрытие неопределённостей $\frac{0}{0} = 1$.

Доказательство. Предполагая функцию

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) \left(\frac{\text{sh } y}{y} + \frac{\sin x}{x} \right) - 4(\text{ch } y - \cos x)$$

положительной, представим ее в виде $F(x, y) = f(x) + g(y) + h(x, y)$, где

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x, 0) = x^2 + x \sin x - 4(1 - \cos x), \\ g(y) &= F(0, y) = y^2 + y \text{sh } y - 4(\text{ch } y - 1), \\ h(x, y) &= x^2 \left(\frac{\text{sh } y}{y} - 1 \right) - y^2 \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что $f > 0$, $g > 0$ и $h \geq 0$ при $x \neq 0$ или $y \neq 0$, т.е. при $(x, y) \neq (0, 0)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &\quad - 4 \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \dots \right) - 4 \left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Группируя члены с (x^6, x^8) , (x^{10}, x^{12}) и т.д., получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \left[1 - \frac{x^2}{2n(2n+1)} - \frac{4}{2n} + \frac{4x^2}{2n(2n+1)(2n+2)} \right] \\ &= \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left[2(n-2) - \frac{x^2(n-1)}{(n+1)(2n+1)} \right]. \end{aligned}$$

Все члены ряда положительны при $x^2 < r(n)$, где

$$r(n) = \frac{2(n-2)(n+1)(2n+1)}{(n-1)}, \quad \frac{dr}{dn} = 4n+1 + \frac{6}{(n-1)^2}.$$

Функция $r(n)$ монотонна, значит $f(x) > 0$ при $x^2 < r(3) = 28$. При $|x| > 4$, очевидно, положительны оба слагаемых в следующем представлении:

$$f(x) \equiv \frac{x(x+2 \sin x)}{2} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 4(\cos x - 1) \right].$$

Неравенство для функции $g(y)$ следует из разложения

$$\begin{aligned} g(y) &= y^2 + y \left(y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots \right) - 4 \left(\frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{y^6}{5!} + \frac{y^8}{7!} + \dots \right) - 4 \left(\frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n-1)!} \left(1 - \frac{2}{n} \right) > 0. \end{aligned}$$

Наконец, $h(x, y) = 0$ при $x = 0$ или $y = 0$, а при $x, y \neq 0$ неравенство $h(x, y) > 0$ преобразуется к виду

$$\frac{\operatorname{sh} y - y}{y^3} > \frac{x - \sin x}{x^3} \text{ и выполняется в форме } \frac{\operatorname{sh} y - y}{y^3} > \frac{1}{6} > \frac{x - \sin x}{x^3},$$

что следует из классических неравенств $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$, $\operatorname{sh} y > y + \frac{1}{6}y^3$.
□

Утверждение 2. Для любых наперёд заданных значений $\delta_0 = 0$ и $\sigma_0 \neq 0$ существуют единственная логарифмическая спираль и единственная (с точностью до гомотетии) дуга на ней, на граничных элементах кривизны которой реализуются эти значения инвариантов.

Доказательство. Получим явный вид исследуемых инвариантов. Элемент кривизны логарифмической спирали с полярным уравнением $r(\phi) = r_0 e^{\phi \operatorname{ctg} \nu}$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} x(\phi) &= r(\phi) \cos \phi, & \tau(\phi) &= \nu + \phi, & k(\phi) &= \frac{\sin \nu}{r(\phi)}. \\ y(\phi) &= r(\phi) \sin \phi, \end{aligned}$$

Далее положим $r_0 = 1$, показатель экспоненты $T(\phi, \nu) = \phi \operatorname{ctg} \nu$ обозначим T . Элементы кривизны на концах дуги $[0, \phi]$ имеют вид

$$\mathcal{K}(0) = K(1, 0, \nu, \sin \nu), \quad \mathcal{K}(\phi) = K(e^T \cos \phi, e^T \sin \phi, \nu + \phi, e^{-T} \sin \nu). \tag{3}$$

Длина $2c$ и направление μ хорды, стягивающей эту дугу, равны

$$2c = \sqrt{(e^T \cos \phi - 1)^2 + (e^T \sin \phi)^2} = \sqrt{2e^T (\operatorname{ch} T - \cos \phi)},$$

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{e^T \sin \phi}{e^T \cos \phi - 1}.$$

Элементы (3) приведём к локальной системе координат, в которой они примут вид

$$\mathcal{K}_1 = K(-c, 0, \alpha, k_1) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_2 = K(c, 0, \beta, k_2),$$

где

$$\alpha = \tau(0) - \mu, \quad k_1 = \sin \nu, \quad \beta = \tau(\phi) - \mu, \quad k_2 = e^{-T} \sin \nu.$$

Для определения инварианта σ углы α, β надо переопределить как непрерывные функции угла ϕ , и потому для достаточно длинной дуги, возможно, выходящие за пределы $[-\pi, \pi]$. Для этого от μ перейдём к функции $\tilde{\mu}(\phi)$, определённой с соблюдением непрерывности. Она растёт от $\tilde{\mu}(0) = \tau(0) = \nu$ до $\tilde{\mu}(\pi) = \pi$, затем колеблется вокруг π в пределах $\nu < \tilde{\mu}(\phi) < \frac{3}{2}\pi$ (речь идёт о спиралях с возрастающей кривизной, т.е. с $\pi/2 < \nu < \pi$, образцы которых показаны на рис. 1). Соответственно, угол у начальной точки,

$$\tilde{\alpha}(\phi) = \tau(0) - \tilde{\mu}(\phi) = \nu - \tilde{\mu}(\phi),$$

изменяется в пределах $-\pi < \tilde{\alpha}(\phi) < 0$. Это обстоятельство было выяснено в [1, следствие 5.1] как общее свойство кривых с возрастающей неотрицательной кривизной. Спирали этого типа закручиваются вблизи конечной точки, и накопленное по непрерывности значение угла $\tilde{\beta}$ сверху не ограничено. Мы получим его, прибавив к $\tilde{\alpha}$ полный поворот спирали, после чего определим σ :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(\phi) &= \tilde{\alpha}(\phi) + [\tau(\phi) - \tau(0)] = \tilde{\alpha}(\phi) + \phi, \\ \sigma(\phi) &= \tilde{\alpha}(\phi) + \tilde{\beta}(\phi) = \phi + 2[\nu - \tilde{\mu}(\phi)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматривая далее $\tilde{\mu}$ и σ как функции двух переменных (ϕ, ν) , определим производные:

$$\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi} = \frac{\sin(\phi + \nu) - e^T \sin \nu}{2 \sin \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi)}, \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \nu} = \frac{\phi \sin \phi}{2 \sin^2 \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi)},$$

и

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi} = 1 - 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \phi} = \frac{\cos \nu \sin \phi - \sin \nu \operatorname{sh} T}{\sin \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi)}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \nu} = 2 - \frac{\phi \sin \phi}{\sin^2 \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi)}.$$

Инверсное расстояние δ определим как $\operatorname{ch} \delta = 1 - 2Q$ (см. [2]), где

$$Q = (k_1 c + \sin \alpha)(k_2 c - \sin \beta) + \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Вычисление тригонометрических функций углов α и β даёт выражения

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e^T \cos(\nu - \phi) - \cos \nu}{2c}, & \sin \alpha &= \frac{e^T \sin(\nu - \phi) - \sin \nu}{2c}, \\ \cos \beta &= \frac{e^T \cos \nu - \cos(\nu + \phi)}{2c}, & \sin \beta &= \frac{e^T \sin \nu - \sin(\nu + \phi)}{2c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Получаем

$$Q = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \nu \operatorname{ch} T - \cos^2 \nu \cos \phi),$$

$$\operatorname{ch} \delta(\phi, \nu) = 1 - 2Q = \sin^2 \nu \operatorname{ch} T + \cos^2 \nu \cos \phi,$$

$$\frac{\partial(\operatorname{ch} \delta)}{\partial \phi} = \operatorname{sh} \delta \frac{\partial \delta}{\partial \phi} = \sin \nu \cos \nu \operatorname{sh} T - \cos^2 \nu \sin \phi,$$

$$\frac{\partial(\operatorname{ch} \delta)}{\partial \nu} = \operatorname{sh} \delta \frac{\partial \delta}{\partial \nu} = 2 \sin \nu \cos \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi) - \phi \operatorname{sh} T,$$

и якобиан $\frac{\partial(\delta, \sigma)}{\partial(\phi, \nu)} = \delta'_\phi \sigma'_\nu - \delta'_\nu \sigma'_\phi$ упрощается до

$$\frac{\phi(\cos^2 \nu \sin^2 \phi - \sin^2 \nu \operatorname{sh}^2 T)}{\sin^2 \nu (\operatorname{ch} T - \cos \phi) \operatorname{sh} \delta} + 4 \frac{\cos \nu}{\operatorname{sh} \delta}.$$

Выразим ν через ϕ и T :

$$\operatorname{ctg} \nu = \frac{T}{\phi}, \quad \cos \nu = \frac{T}{\sqrt{T^2 + \phi^2}}, \quad \sin \nu = \frac{\phi}{\sqrt{T^2 + \phi^2}}.$$

Якобиан принимает вид

$$\frac{\phi T^2}{\operatorname{sh} \delta (\operatorname{ch} T - \cos \phi)} \left(\frac{\operatorname{sh} T}{T} - \frac{\sin \phi}{\phi} \right) \left(\frac{\operatorname{sh} T}{T} + \frac{\sin \phi}{\phi} - 4 \frac{\operatorname{ch} T - \cos \phi}{T^2 + \phi^2} \right).$$

Все множители положительны, последний – в силу (2). Стало быть, якобиан всюду определён и нигде не обращается в нуль. \square

Для численного решения системы (1) выражение (4) удобно использовать в виде $\sigma = \phi + 2\tilde{\alpha}$. Значение $\tilde{\alpha}$ не выходит за пределы $(-\pi, 0)$, и поэтому может быть определено по своим тригонометрическим функциям (5):

$$\sigma(\phi, \nu) = \phi - 2 \arg [e^{i\nu} (e^{T-i\phi} - 1)] = \phi - 2 \arccos \frac{e^T \cos(\nu - \phi) - \cos \nu}{\sqrt{2e^T (\operatorname{ch} T - \cos \phi)}}.$$

Если кривизна убывает с ростом ϕ ($0 < \nu < \pi/2$), то однозначно определяется угол $\beta \in (0, \pi)$, и значение σ , в этом случае отрицательное, равно

$$\sigma = \phi + 2[\nu - \tilde{\mu}] \equiv -\phi + 2(\phi + \nu - \tilde{\mu}) = -\phi + 2\beta.$$

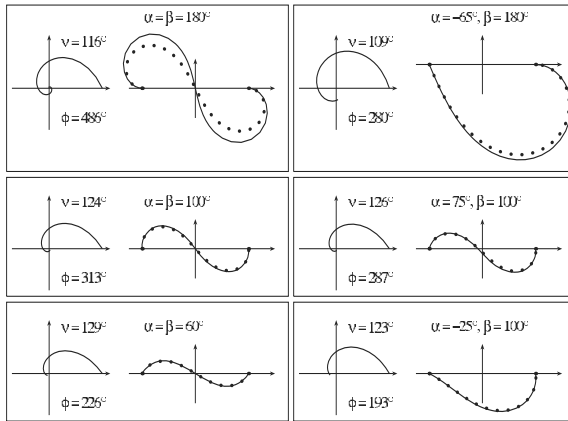


Рис. 2.

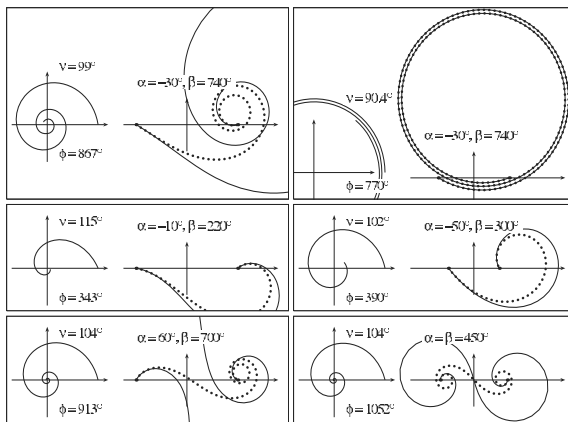


Рис. 3.

Кумулятивность инварианта σ обеспечивается естественной кумулятивностью полярного угла ϕ .

Завершающий этап построения спирали с заданными граничными условиями состоит в преобразовании найденной базовой дуги дробно-линейным отображением. Несколько примеров построения показаны на рис. 2 (короткие спирали) и на рис. 3 (длинные спирали). Во всех

случаях граничные условия были позаимствованы у спирали Корню. Слева показана подлежащая трансформации дуга логарифмической спирали, справа – результат преобразования. Спираль Корню с такими же граничными условиями показана точечной линией. Преобразование полностью описано в [1] (см. там утверждение 2 и комментарий к нему о недостатках метода и способах борьбы с ними). В силу единственности отображения результат совпадает с описанным ниже построением, использующим специфику логарифмической спирали.

Отображение $w(\phi) = \frac{az(\phi)+b}{cz(\phi)+d}$ дуги $z(\phi)$ логарифмической спирали построим по трём точкам $z_{1,2,3}$ и их образам $w_{1,2,3}$:

$$\frac{w(\phi) - w_1}{w(\phi) - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z(\phi) - z_1}{z(\phi) - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{6}$$

Точки $z_{1,2}$ – начало и конец дуги (3): $z_1 = 1, z_2 = e^{\phi_0 \operatorname{ctg} \nu} e^{i\phi_0}$; здесь ϕ_0 – угловая длина дуги, найденная вместе с ν как решение системы (1). Образы точек $z_{1,2}$ – точки $w_1 = (-1, 0)$ и $w_2 = (1, 0)$. В качестве третьей точки удобно взять точку $z_3 = z(\phi_0/2)$. Она лежит на пересечении двух срединных окружностей, и это свойство воспроизводимо по граничным условиям спирали-образа.

Утверждение 3. Точка $z(\phi/2)$ логарифмической спирали лежит на пересечении двух срединных окружностей –

- (а) биссектрисы линзы, построенной для элементов $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(\phi)$;
- (б) срединной окружности кругов кривизны $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(\phi)$.

Доказательство. Поскольку дуги $[0, \phi/2]$ и $[\phi/2, \phi]$ подобны, значения инварианта σ на каждой из них одинаковы. По теореме 3 в [3] точка $z(\phi/2)$ лежит на биссектрисе линзы, построенной для дуги $[0, \phi]$ (см. рис. 4а).

В том, что эта точка лежит на срединной окружности двух граничных кругов кривизны (рис. 4б), убедимся непосредственной проверкой. Принятая в [4] нормировка неявного уравнения окружности $K(p, q, \tau, k)$, а именно

$$C(x, y) \equiv k [(x-p)^2 + (y-q)^2] + 2(x-p) \sin \tau - 2(y-q) \cos \tau = 0,$$

позволяет получить уравнение срединной окружности $C_0(x, y) = 0$

простым суммированием уравнений двух данных окружностей (3):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(0) : C_1(x, y) &= \sin \nu [(x-1)^2 + y^2] + 2(x-1) \sin \nu - 2y \cos \nu; \\ \mathcal{K}(\phi) : C_2(x, y) &= e^{-T} \sin \nu [(x-e^T \cos \phi)^2 + (y-e^T \sin \phi)^2] \\ &\quad + 2(x-e^T \cos \phi) \sin(\nu+\phi) - 2(y-e^T \sin \phi) \cos(\nu+\phi); \\ C_0(x, y) &= \frac{C_1(x, y) + C_2(x, y)}{\pm 2\sqrt{1-Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)}}. \end{aligned}$$

Знаменатель лишь сохраняет нормировку, числитель упрощается до $\sin \nu (1+e^{-T})(x^2+y^2) + 2x \cos \nu \sin \phi - 2y \cos \nu (1+\cos \phi) - \sin \nu (1+e^T)$.

Подставляя $x = e^{T/2} \cos(\phi/2)$, $y = e^{T/2} \sin(\phi/2)$, получаем $C_0(x, y) = 0$.
□

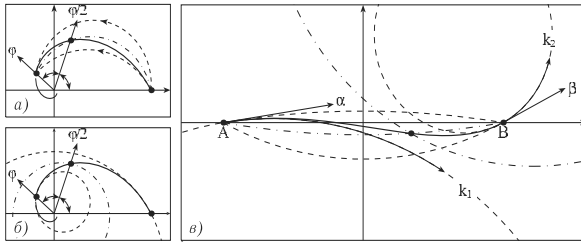


Рис. 4.

Соответственно, образ точки z_3 — точка w_3 — находится на биссектрисе линзы, определяемой заданными граничными кругами кривизны $K(-1, 0, \alpha, k_1)$ и $K(1, 0, \beta, k_2)$ (рис. 4в). Поскольку биссектриса является координатной линией $\varphi = \gamma = \text{const}$ биполярной системы координат (ρ, φ) , её параметрическое уравнение имеет вид

$$x(\rho) + iy(\rho) = \frac{\text{sh } \rho + i \sin \gamma}{\text{ch } \rho + \cos \gamma}, \quad \gamma = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad -\infty < \rho < +\infty. \quad (7)$$

Точка w_3 находится также на серединной окружности двух заданных кругов кривизны, неявное уравнение которой получается аналогичным суммированием:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= k_1 [(x+1)^2 + y^2] + 2(x+1) \sin \alpha - 2y \cos \alpha \\ &\quad + k_2 [(x-1)^2 + y^2] + 2(x-1) \sin \beta - 2y \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Найдём её как точку пересечения этой окружности с дугой (7), т.е. как решение уравнения $M(x(\rho), y(\rho)) = 0$. За счёт того, что биссектриса является лишь частью некоторой окружности, решение единственно. Биполярные координаты (ρ_3, φ_3) точки w_3 получаются равными

$$\rho_3 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin \beta - k_2}{\sin \alpha + k_1}, \quad \varphi_3 = \gamma \quad \left(w_3 = \operatorname{th} \frac{\rho_3 + i \varphi_3}{2} \right).$$

Числитель и знаменатель не равны нулю и одного знака (см. [2, следствии 2.1]). Теперь (6) преобразуется к виду

$$\frac{1 + w(\phi)}{1 - w(\phi)} = \underbrace{\frac{1 + w_3}{1 - w_3}}_{e^{\rho_3 + i \varphi_3}} \cdot \frac{z(\phi) - 1}{z(\phi) - z_2} \cdot \underbrace{\frac{z_3 - z_2}{z_3 - 1}}_{-z_3}, \tag{8}$$

где $z(\phi) = e^{(\operatorname{ctg} \nu + i)\phi}$. Параметр ϕ базовой дуги служит параметром построенной кривой. Отсюда получаются параметрические уравнения найденной кривой, как в декартовых $[x(\phi), y(\phi)]$, $0 \leq \phi \leq \phi_0$, так и в биполярных $[\rho(\phi), \varphi(\phi)]$ координатах. Логарифмируя равенство (8), в левой части сразу получаем $\rho(\phi) + i \varphi(\phi)$.

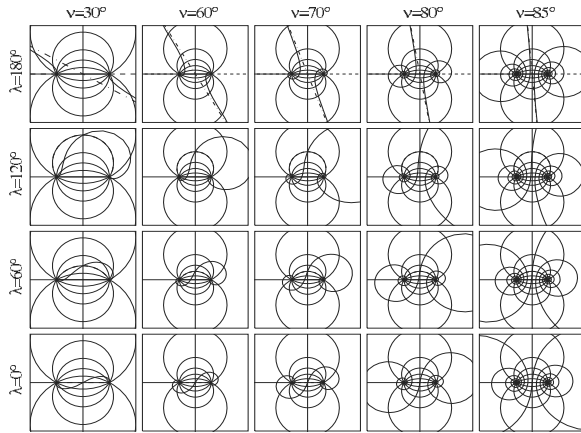


Рис. 5.

При инверсии логарифмической спирали мы получаем *двойную логарифмическую спираль*. Этот термин, отсутствующий в справочни-

ках и энциклопедиях, обнаружился в книге [5] (ср. [6]) при рассмотрении гидромеханических приложений теории аналитических функций. Уравнение двойной логарифмической спирали можно получить из (6), сделав полюс $z_1 = z(-\infty) = 0$ исходной спирали левым полюсом $w_1 = -1$ биполярной системы, бесконечно удалённую точку $z_2 = z(+\infty) = \infty$ — правым полюсом $w_2 = +1$, и направив промежуточную точку $z_3 = z(0) = 1$ в произвольное положение w_3 :

$$\frac{1 + w(\phi)}{1 - w(\phi)} = \frac{1 + w_3}{1 - w_3} \cdot z(\phi), \quad w(\phi) = \frac{z(\phi)(1 + w_3) - (1 - w_3)}{z(\phi)(1 + w_3) + (1 - w_3)}.$$

При переходе в биполярную систему уравнение становится линейным:

$$\rho(\varphi) = \operatorname{ctg} \nu (\varphi - \lambda).$$

Кривая пересекает координатные линии $\varphi = \operatorname{const}$ под постоянным углом ν и проходит через точку $(\rho, \varphi) = (0, \lambda)$ оси ординат. Третьим (неявным) параметром формы кривой является расстояние между полюсами системы координат. Рисунок 5 иллюстрирует разнообразие форм двойной логарифмической спирали.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Курносенко, *Построение спиралей с заданными граничными условиями*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **372** (2009), 62–81.
2. А. И. Курносенко, *Общие свойства плоских спиральных кривых*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 93–115.
3. А. И. Курносенко, *Длинные спирали*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **372** (2009), 44–52.
4. А. И. Курносенко, *Инверсный инвариант пары окружностей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 167–186.
5. А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич, *Введение в теорию аналитических функций*. Просвещение, М., 1977.
6. А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*. Наука, М., 1968.

Kurnosenko A. I. On a certain feature of logarithmic spirals.

A curve formed by inversion of a logarithmic spiral is called a double logarithmic spiral. The curves in this family possess the following property: there always exists such a spiral with continuous and monotone curvature satisfying any possible boundary conditions (= end points, tangents, and curvatures). Thus, the problem of constructing a spiral with continuous curvature and prescribed curvature elements at the endpoints is solved.

Московский инж.-физ. институт,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Россия
E-mail: Alexey.Kurnosenko@cern.ch

Поступило 4 августа 2007 г.