Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

А. И. Курносенко

ПОСТРОЕНИЕ СПИРАЛЕЙ С ЗАДАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В статье [1] было выяснено необходимое условие существования спиралей (кривых с монотонной кривизной) с заданными граничными элементами кривизны –

$$\mathcal{K}_1 = K(-c, 0, \alpha, k_1) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_2 = K(c, 0, \beta, k_2). \tag{1}$$

Здесь α, β – наклоны касательных, $k_{1,2}$ – кривизны в граничных точках $A = (-c, 0)$, $B = (c, 0)$. Если исключить простейшую спираль, составленную из двух дуг окружностей (бидугу), то условие имеет вид

$$Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = (k_1 c + \sin\alpha)(k_2 c - \sin\beta) + \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} < 0. \tag{2}$$

Для доказательства его достаточности были построены спирали с кусочно-постоянной кривизной.

Интересно было бы найти решение в классе кривых с непрерывной кривизной, тем более, что эта задача занимает умы многих математиков, работающих в области Computer Aided Design [2–4]. Речь идёт о построении *переходной кривой* (например, гладко сопрягающей два участка дороги), усложнённом требованиями (а) непрерывности кривизны в точках сопряжения и (б) её монотонности на переходной кривой.

Так, в [3], сетуя на недостаточную гибкость спирали Корню, авторы наделяют её дополнительной степенью свободы. Предлагаемая кривая с дробно-линейной функцией кривизны, в каком-то смысле гибрид спирали Корню ($k(s) \sim s$) и логарифмической спирали ($k(s) \sim s^{-1}$), названа обобщённой спиралью Корню. Дано приближённое решение для малых дуг, требующее коррекции заданных кривизн. Ряд исследований сводится к выделению спиральных участков на кривых с полиномиальной или рациональной параметризацией, традиционно используемых в CAD-приложениях.

Ключевые слова : элемент кривизны, переходная кривая, линзы, биполярные координаты.

В предлагаемом решении мы компенсируем недостаточную гибкость практически любой известной спирали тем, что варьируем её форму с помощью инверсии, т.е. двух дополнительных параметров – координат центра инверсии (радиус инверсии отвечает за масштаб). При таких вариациях спиральность сохраняется, но могут появиться или исчезнуть точки перегиба. Метаморфозы, претерпеваемые при инверсии частью гиперболы, заключённой между двумя вершинами, иллюстрирует рис. 1.

Неравенство (2) означает, что угол пересечения $\mathrm{i}\delta$ двух кругов кривизны спирали чисто мнимый (окружности не пересекаются и "правильно" ориентированы). Убедившись, что оно выполнено, можно перейти от инверсного инварианта Q к коксетерову *инверсному расстоянию* δ между окружностями [1], не учитывающему ориентацию:

$$Q = -\mathrm{sh}^2\frac{\delta}{2}, \quad \delta = \mathrm{Arch}\,(1-2Q). \tag{3}$$

Второй важный инвариант – σ, угловая ширины линзы, ограничивающей спиральную дугу [5, 6]. Для *короткой спирали* (т.е. не пересекающей лучи $x \in (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$ и $y = 0$) $\sigma = \alpha+\beta$, где наклоны касательных α, β берутся в пределах $(-\pi, \pi]$ для возрастающей и $[-\pi, \pi)$ – для убывающей кривизны. Это соглашение для α, β учитывается и в общем случае:

$$\sigma = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\alpha} = \alpha + 2mM\pi, \quad \widetilde{\beta} = \beta + 2mN\pi. \tag{4}$$

Здесь $m = \mathrm{sign}\,(k_2-k_1) = \pm 1$ – характер монотонности кривизны спиральной дуги, а $M, N \geqslant 0$ – её *индекс закрученности* [1]: счётчики M и N увеличиваются при каждом пересечении кривой, соответственно, левого или правого дополнения хорды до бесконечной прямой.

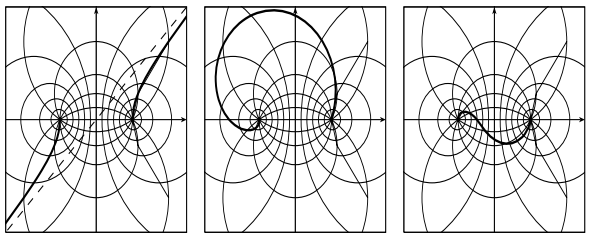

Рис. 1.

Построение спирали с граничными условиями (1) выполняется так:

(i) по исходным данным (1) определяются значения инверсных инвариантов (2), (4);

(ii) на некоторой параметризованной спирали $z(t) = x(t)+\mathrm{i}y(t)$, далее называемой *базовой спиралью*, ищется дуга $t\in[u,v]$, такая, чтобы на ней реализовывались требуемые значения

$$\delta_0 = \delta(\mathcal{K}(u), \mathcal{K}(v)), \quad \sigma_0 = \sigma(\mathcal{K}(u), \mathcal{K}(v)); \tag{5}$$

(iii) подбирается окружность радиуса R с центром в точке (a,b), инверсия относительно которой даст кривую с граничными условиями $\{c, -\alpha, -\beta, -k_1, -k_2\}$ – поскольку инверсия меняет характер монотонности кривизны; он восстанавливается последующей симметрией относительно хорды вместе с получением требуемых значений $\{c, \alpha, \beta, k_1, k_2\}$.

Таким образом, задача с пятью неизвестными $\{c, \alpha, \beta, k_1, k_2\}$ решается вариацией пяти параметров $\{u, v, a, b, R\}$. Основная проблема – выбор базовой спирали и решение системы уравнений (5). Выбор параметров инверсии – задача независимая и легко решаемая.

О выборе базовой спирали. Проиллюстрируем возможности, предоставляемые различными спиралями в плане решения системы (5).

На спирали $z(t) = x(t)+\mathrm{i}y(t)$ зафиксируем некоторую точку $z(t_1)$ в качестве начальной и построим функции $\delta(t;t_1)$ и $\sigma(t;t_1)$ относительно элемента кривизны в точке $z(t_1)$. Эти функции монотонны по каждой из переменных ([1, лемма 1] и [6, теорема 1]). Для точек слева от t_1 доопределим функции следующим образом:

$$t < t_1: \quad \delta(t;t_1) = -\delta(t_1;t), \quad \sigma(t;t_1) = -\sigma(t_1;t).$$

Такое определение сохраняет монотонность функций. Исключая t, изобразим возможные на данной кривой (относительно данной точки) значения инвариантов δ и σ в виде графика $\delta(\sigma;t_1)$. Для разных фиксированных точек t_1 получим семейство таких графиков – (δ-σ)-*диаграмму* кривой.

Диаграмма для спирали Корню, кривой с натуральным уравнением $k(s) = s/a^2$, показана на рис. 2. Изменение параметра a приводит к подобному преобразованию кривой и не влияет на вид диаграммы. В качестве точек $z(s_1)$ взяты точки A, B, C, D (параметр s – длина

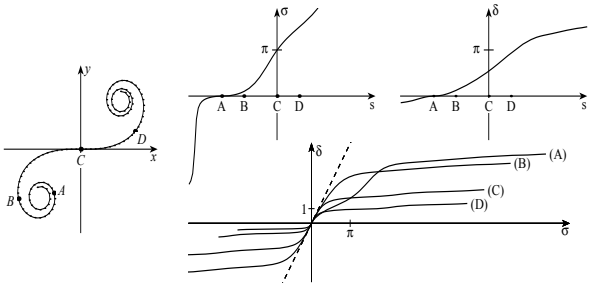

Рис. 2.

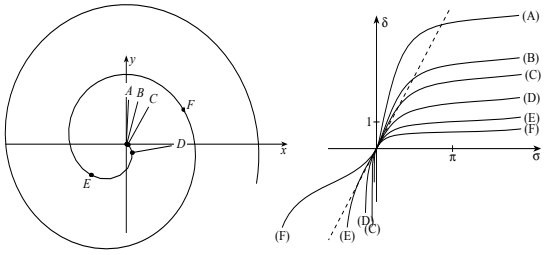

Рис. 3.

дуги). Показаны графики функций $\delta(s; s_A)$ и $\sigma(s; s_A)$, а также функций $\delta(\sigma)$ относительно каждой из четырёх точек. Их поведение вблизи нуля, $\delta \sim \sigma\sqrt{3}$, отмеченное пунктирной касательной, характерно для всех кривых, кривизна $k(s)$ которых аналитична в окрестности точки $s = 0$, и $k'(0) = k'_0 = 0$: разложения

$$
\begin{aligned}
k(s) &= k_0 + k'_0 s + \frac{1}{2}k''_0 s^2 + O(s^3),\\
\tau(s) &= k_0 s + \frac{1}{2}k'_0 s^2 + \frac{1}{6}k''_0 s^3 + O(s^4),\\
x(s) &= s - \frac{1}{6}k_0^2 s^3 - \frac{1}{8}k_0 k'_0 s^4 + O(s^5),\\
y(s) &= \frac{1}{2}k_0 s^2 + \frac{1}{6}k'_0 s^3 + O(s^4) \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}
$$

приводят в итоге к

$$
\sigma(s) = \frac{1}{6}k'_0 s^2 + O(s^3), \quad \delta(s) = \frac{\sqrt{3}}{6}k'_0 s^2 + O(s^3).
$$

Диаграмма для эвольвенты окружности показана на рис. 3. Мы ограничимся интуитивными выводами на основе этих двух иллюстраций: значения $|\delta| > |\sigma|\sqrt{3}$ на спирали Корню не реализуются; на эвольвенте окружности, видимо, достижимы любые значения δ, σ. Строгому анализу мы подвергнем логарифмическую спираль, на которой система (5) для любых наперёд заданных значений инвариантов имеет однозначное решение.

Для логарифмической спирали $p(\theta) = p_0 \mathrm{e}^{\theta \operatorname{ctg} \nu}$ (ν – угол между касательной и полярным радиусом) в качестве параметра используем полярный угол θ. Известно, что поворот логарифмической спирали равносилен гомотетии, т.е. две её дуги $[\theta_1, \theta_2]$ и $[\theta_1', \theta_2']$ подобны, если $\theta_2 - \theta_1 = \theta_2' - \theta_1'$. Поэтому вид ($\delta$-$\sigma$)-диаграммы не зависит от выбора начальной точки θ_1, и можно положить $\theta_1 = 0$. Диаграмма состоит из единственного графика $\delta(\sigma)$, полученного исключением θ_2 из $\delta(\theta_2; 0)$ и $\sigma(\theta_2; 0)$.

Положение меняет наличие параметра ν. Диаграмма для *семейства логарифмических спиралей* с $\pi/2 < \nu < \pi$ заполняет весь квадрант $\delta > 0$, $\sigma > 0$ возможных значений инвариантов. Она показана на рис. 4 как семейство графиков $\delta(\sigma; \nu)$. На правом фрагменте рисунка дополнительно изображены линии $\theta = \mathrm{const}$. Тем самым рисунок становится номограммой для графического решения системы уравнений

$$\delta_0 = \delta(\theta, \nu), \quad \sigma_0 = \sigma(\theta, \nu). \tag{6}$$

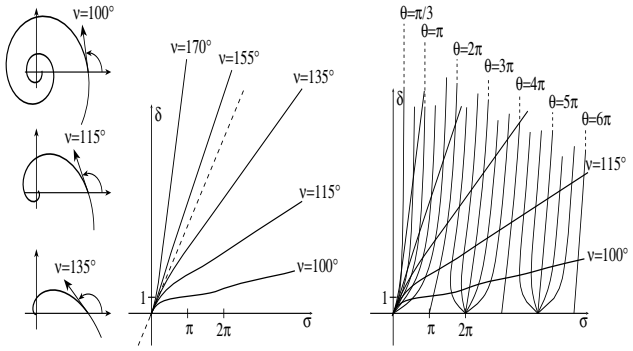

Рис. 4.

При инверсии спиральных дуг конических сечений могут быть по-

лучены дуги многих известных кривых – строфоид, лемнискат, циссоид и др. (см., например, [7]). Если исходить из рациональной параметризации коник, то инверсные образы будут рациональными параметрическими кривыми 4-го порядка.

Преобразование дуги базовой спирали. Инверсию и симметрию мы заменим дробно-линейным отображением кривой

$$W(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{7}$$

которое, как известно, либо включает оба эти преобразования ($c \neq 0$), либо их вместе исключает ($c = 0$), ограничиваясь гомотетией, поворотом и переносом. В первом случае характер монотонности кривизны (и знак у σ) меняется и восстанавливается, во втором – не затрагивается. Из этого следует:

Утверждение 1. *Характер монотонности кривизны при дробно-линейном отображении сохраняется; сохраняются и значения инвариантов Q и σ.* □

Если на кривой есть точка z, такая, что $cz+d = 0$, то будет получена разрывная кривая, состоящая из двух спиральных ветвей с $k(s) < 0$ и $k(s) \geqslant 0$, имеющих общую асимптоту или, в случае разрыва кривизны в z, пару параллельных асимптот. Обратно, если базовая кривая является разрывной спиралью (например, гипербола на рис. 1), то разрыв при преобразовании может исчезнуть.

На рис. 1 на декартову систему координат (x, y) наложена биполярная система (ρ, φ) с полюсами в точках $(-F, 0)$ и $(F, 0)$. Её использование связано с тем, что уравнение любой спирали может быть представлено в биполярных координатах в виде однозначной функции $\rho(\varphi)$ [1, теорема 6]. Соответствие между двумя системами имеет вид

$$\begin{aligned} z &= x+\mathrm{i}y = F\,\mathrm{th}\frac{\zeta}{2} = F\frac{\mathrm{sh}\rho + \mathrm{i}\sin\varphi}{\mathrm{ch}\rho + \cos\varphi}, \\ \zeta &= \rho+\mathrm{i}\varphi = \ln\frac{F+z}{F-z} = 2\,\mathrm{arth}\,\frac{z}{F}. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее мы полагаем $F = 1$.

Без ограничения общности можно считать, что пара элементов кривизны $\mathcal{K}(u)$ и $\mathcal{K}(v)$ базовой спирали линейным отображением совмещена по граничным точкам с заданной парой (1) и вместе они

приведены к единичной хорде, – с коррекцией кривизн $k_{1,2} \to ck_{1,2}$, накладываемой гомотетией. Это позволяет далее ограничиться отображениями, оставляющими концевые точки $A = (-1, 0)$ и $B = (1, 0)$ неподвижными. Они составляют семейство с одним комплексным параметром z_0:

$$W_0(z; z_0) = \frac{z + z_0}{1 + z_0 z}, \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \neq \pm 1.$$

Биполярное представление параметра z_0 обозначим ζ_0:

$$\zeta_0 = \rho_0 + \mathrm{i}\varphi_0 = 2 \operatorname{arth} z_0.$$

В биполярных координатах отображение (9) сводится к "параллельному переносу":

$$\widetilde{W}_0(\zeta; \zeta_0) = \zeta + \zeta_0.$$

Утверждение 2. *Дробно-линейное отображение* (9), *преобразующее пару кругов кривизны одной спирали –*

$$\mathcal{K}_1 = K(-1, 0, \alpha, k_1), \quad \mathcal{K}_2 = K(1, 0, \beta, k_2),$$

в пару кругов кривизны другой спирали –

$$\mathcal{K}_1^\star = K(-1, 0, \alpha^\star, k_1^\star), \quad \mathcal{K}_2^\star = K(1, 0, \beta^\star, k_2^\star),$$

таких, что

$$\sigma(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \sigma(\mathcal{K}_1^\star, \mathcal{K}_2^\star), \tag{10}$$

$$Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = Q(\mathcal{K}_1^\star, \mathcal{K}_2^\star), \tag{11}$$

существует и единственно.

Доказательство. Условие (11) может быть записано как

$$(k_1 + \sin\alpha)(k_2 - \sin\beta) = (k_1^\star + \sin\alpha^\star)(k_2^\star - \sin\beta^\star) \quad \left[= Q - \sin^2\frac{\sigma}{2}\right].$$

При этом выполнены неравенства (см. [1, следствие 2.1])

$$\begin{aligned} k_1 + \sin\alpha &\lesseqgtr 0, \quad k_2 - \sin\beta \gtreqless 0, \\ k_1^\star + \sin\alpha^\star &\lesseqgtr 0, \quad k_2^\star - \sin\beta^\star \gtreqless 0 \end{aligned} \tag{12}$$

(верхние знаки – для возрастающей кривизны, нижние – для убывающей). Если $z(s)$ – натуральная параметризация окружности $\mathcal{K}_1$, т.е.

$$z(s) = -1 + \frac{\mathrm{i}}{k_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s}), \quad z_s'(s) = \mathrm{e}^{\alpha + \mathrm{i}k_1 s}, \quad z_{ss}''(s) = \mathrm{i}k_1 \mathrm{e}^{\alpha + \mathrm{i}k_1 s},$$

то $w(s) = W_0(z(s); z_0)$ – некая параметризация её образа $\mathcal{K}_1^\star$. Вычисление производной при $z(0) = w(0) = -1$ даёт следующее:

$$\begin{aligned} w_s'(s) &= z_s'(s)\frac{1 - z_0^2}{[1 + z_0 z(s)]^2}, \\ w_s'(0) &= z_s'(0)\frac{1 - z_0^2}{[1 + z_0 z(0)]^2}, \quad \frac{w_s'(0)}{z_s'(0)} = \frac{1 + z_0}{1 - z_0}. \end{aligned}$$

Зная направления касательных к обеим окружностям в общей начальной точке, заключаем, что $z_s'(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ и $w_s'(0) = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^\star}$. Появление множителя $r_0 > 0$ связано с тем, что для кривой $w(s)$ параметр s в общем случае уже не является натуральным. Получаем

$$\frac{1 + z_0}{1 - z_0} = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha^\star - \alpha)}, \quad z_0 = \frac{r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha^\star - \alpha)} - 1}{r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha^\star - \alpha)} + 1}.$$

При любом $r_0 > 0$ найденное значение z_0 обеспечивает преобразование $\alpha \to \alpha^\star$. Для управления кривизной потребуется вторая производная:

$$\begin{aligned} w_{ss}''(s) &= z_{ss}''\frac{1 - z_0^2}{[1 + z_0 z(s)]^2} - 2z_0 {z_s'}^2 \frac{1 - z_0^2}{[1 + z_0 z(s)]^3}, \\ w_{ss}''(0) &= \mathrm{i}k_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{1 + z_0}{1 - z_0} - 2z_0 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\frac{1 + z_0}{(1 - z_0)^2} = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^\star}(\mathrm{i}k_1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^\star}). \end{aligned}$$

Выделим действительные и мнимые части – $w_s'(0) = u_1 + \mathrm{i}v_1$, $w_{ss}''(0) = u_2 + \mathrm{i}v_2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_0 \cos\alpha^\star, \quad v_1 = r_0 \sin\alpha^\star, \\ u_2 &= r_0 \cos(\alpha + \alpha^\star) - r_0 k_1 \sin\alpha^\star - r_0^2 \cos(2\alpha^\star), \\ v_2 &= -r_0 \sin(\alpha + \alpha^\star) - r_0 k_1 \cos\alpha^\star - r_0^2 \sin(2\alpha^\star). \end{aligned}$$

Кривизна окружности $\mathcal{K}_1^\star$ равна

$$k_1^\star = \frac{v_2 u_1 - v_1 u_2}{(u_1^2 + v_1^2)^{3/2}} = \frac{k_1 + \sin\alpha}{r_0} - \sin\alpha^\star.$$

Получаем значение r_0 и, в итоге, z_0, дающее преобразования $k_1 \to k_1^\star$, $\alpha \to \alpha^\star$:

$$z_0 = \frac{r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0} - 1}{r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0} + 1}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \lambda_0 = \alpha^\star - \alpha = \beta - \beta^\star, \\ r_0 = \dfrac{k_1 + \sin\alpha}{k_1^\star + \sin\alpha^\star} = \dfrac{k_2^\star - \sin\beta^\star}{k_2 - \sin\beta}. \end{cases} \tag{13}$$

(в биполярных координатах $\zeta_0 = \ln r_0 + \mathrm{i}\lambda_0$). Числитель и знаменатель в выражении для r_0 не равны нулю и одного знака (12), поэтому $r_0 > 0$. Требуемые значения $\beta^\star$ и $k_2^\star$ обеспечиваются условиями (10), (11) и сохранением инвариантов. □

Отметим, что предложенным способом мы не решаем задачу построения спирали с заданным индексом закручивания (M, N): решением системы (5) реализуется только значение σ. В некоторых случаях мы можем получить разрывную спираль. Эти проблемы не возникают, если строится короткая спираль – $|\widetilde{\alpha}|$, $|\widetilde{\beta}| \leqslant \pi$ (см. [5]): у неё $M = N = 0$, спираль расположена внутри линзы, разрывы исключены. Не возникнут они и при построении длинных спиралей со знакопостоянной кривизной, где $k(s) \leqslant 0$ либо $k(s) \geqslant 0$: для них либо $M = 0$, либо $N = 0$ (см. [1, следствие 5.1]).

Спираль с заданным индексом (M, N) можно построить, назначив волевым образом положение точки перегиба L и наклон касательной в ней. Возможности выбора точки перегиба поясняет следствие 2.3 в [1]. Далее строятся две спирали, AL и LB, в силу знакопостоянства кривизны лишённые указанных недостатков.

Преобразования логарифмической спирали. Пусть в качестве базовой спирали выбрана логарифмическая спираль. Решение системы уравнений (6), ввиду монотонности вовлечённых функций, осуществляется простейшими численными методами. Доказательству существования и единственности решения предпошлём одно вспомогательное утверждение:

Утверждение 3. *Для всех действительных* $(x, y) \neq (0, 0)$ *справедливо неравенство*

$$4\frac{\operatorname{ch} y - \cos x}{x^2 + y^2} < \frac{\operatorname{sh} y}{y} + \frac{\sin x}{x}. \tag{14}$$

(В его правой части при возникновении неопределённости предполагается естественное раскрытие $0/0 = 1$*).*

Доказательство. Предполагаемую положительной функцию

$$F(x,y) = (x^2+y^2)\left(\frac{\operatorname{sh} y}{y} + \frac{\sin x}{x}\right) - 4(\operatorname{ch} y - \cos x)$$

представим в виде $F(x,y) = f(x)+g(y)+h(x,y)$, где

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x,0) = x^2 + x\sin x - 4(1-\cos x),\\ g(y) &= F(0,y) = y^2 + y\operatorname{sh} y - 4(\operatorname{ch} y-1),\\ h(x,y) &= x^2\left(\frac{\operatorname{sh} y}{y} - 1\right) - y^2\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right). \end{aligned}$$

Покажем, что $f > 0$, $g > 0$ и $h \geqslant 0$ при $x \neq 0$ или $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)\\ &\quad - 4\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots\right)\\ &= \left(\frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \frac{x^{10}}{9!} - \frac{x^{12}}{11!} + \cdots\right)\\ &\quad - 4\left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{12}}{12!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Группируя члены с (x^6, x^8), (x^{10}, x^{12}) и т.д., получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}\left[1 - \frac{x^2}{2n(2n+1)} - \frac{4}{2n} + \frac{4x^2}{2n(2n+1)(2n+2)}\right]\\ &= \sum_{n=3,5,\ldots}^{\infty} \frac{x^{2n}(n-1)}{(2n)!(n+1)(2n+1)}\left[r(n) - x^2\right], \end{aligned}$$

где $r(n) = \dfrac{2(n-2)(n+1)(2n+1)}{(n-1)}$.

Функция $r(n)$ монотонна: $r'_n = 4n+1+6/(n-1)^2$, $r(n) \geqslant r(3) = 28$. Все члены ряда положительны при $x^2 < 28$, значит $f(x) = 0$ при $|x| < \sqrt{28}$. При $|x| > 4$, очевидно, положительны оба слагаемых в следующем представлении:

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}x(x+2\sin x) + \left[\frac{1}{2}x^2+4(\cos x-1)\right].$$

Неравенство для функции $g(y)$ следует из разложения

$$\begin{aligned} g(y) &= y^2 + y\left(y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots\right) - 4\left(\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\right) \\ &= \left(\frac{y^6}{5!}+\frac{y^8}{7!}+\cdots\right) - 4\left(\frac{y^6}{6!}+\frac{y^8}{8!}+\cdots\right) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n-1)!}\left(1-\frac{2}{n}\right) > 0. \end{aligned}$$

Наконец, $h(x,y)=0$ при $x=0$ или $y=0$, а при $x,y\neq 0$ неравенство $h(x,y)>0$ преобразуется к виду

$$\frac{\operatorname{sh} y - y}{y^3} > \frac{x-\sin x}{x^3}$$

и выполняется в форме

$$\frac{\operatorname{sh} y - y}{y^3} > \frac{1}{6} > \frac{x-\sin x}{x^3},$$

что следует из классических неравенств $\sin x \lesseqgtr x-\frac{1}{6}x^3$, $\operatorname{sh} x \lesseqgtr x+\frac{1}{6}x^3$ при $x \lesseqgtr 0$. □

Утверждение 4. *Для любых наперёд заданных значений $\delta_0 \neq 0$ и $\sigma_0 \neq 0$ существуют единственная логарифмическая спираль и единственная (с точностью до гомотетии) дуга на ней, на граничных элементах кривизны которой реализуются эти значения инвариантов.*

Доказательство. Получим явный вид инвариантов. Элемент кривизны логарифмической спирали с полярным уравнением $p(\theta) = p_0\,\mathrm{e}^{\theta \operatorname{ctg}\nu}$ имеет компоненты

$$\begin{aligned} x(\theta) &= p(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) &= p(\theta)\sin\theta, \end{aligned} \qquad \tau(\theta) = \nu+\theta, \qquad k(\theta) = \frac{\sin\nu}{p(\theta)}.$$

Далее положим $p_0 = 1$, показатель экспоненты $T(\theta,\nu) = \theta\operatorname{ctg}\nu$ обозначим T. Элементы кривизны на концах дуги $[0,\theta]$ принимают вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(0) = K(1,0,\nu,k_1), && k_1 = \sin\nu; \\ &\mathcal{K}(\theta) = K(\mathrm{e}^T\cos\theta, \mathrm{e}^T\sin\theta, \nu+\theta, k_2), && k_2 = \mathrm{e}^{-T}\sin\nu. \end{aligned} \tag{15}$$

Длина $2c$ и направление μ хорды, стягивающей эту дугу, равны

$$2c = \sqrt{(\mathrm{e}^T \cos\theta - 1)^2 + (\mathrm{e}^T \sin\theta)^2} = \sqrt{\mathrm{e}^{2T} - 2\mathrm{e}^T \cos\theta + 1},$$
$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{e}^T \sin\theta}{\mathrm{e}^T \cos\theta - 1}.$$

Поворотом и переносом приведём элементы (15) в систему координат хорды:

$$\mathcal{K}_1 = K(-c, 0, \alpha, k_1), \qquad \alpha = \tau(0) - \mu(\theta),$$
$$\mathcal{K}_2 = K(c, 0, \beta, k_2), \qquad \beta = \tau(\theta) - \mu(\theta).$$

Вычисление тригонометрических функций углов α и β даёт выражения

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^T \cos(\nu - \theta) - \cos\nu}{2c}, \qquad \sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^T \sin(\nu - \theta) - \sin\nu}{2c},$$
$$\cos\beta = \frac{\mathrm{e}^T \cos\nu - \cos(\nu + \theta)}{2c}, \qquad \sin\beta = \frac{\mathrm{e}^T \sin\nu - \sin(\nu + \theta)}{2c}.$$

Для определения инварианта σ углы α, β надо переопределить как непрерывные функции параметра θ, и потому для достаточно длинной дуги, возможно, выходящие за пределы $(-\pi, \pi)$. Для этого от μ перейдём к функции $\widetilde{\mu}(\theta)$, определённой с соблюдением непрерывности. Она растёт от $\widetilde{\mu}(0) = \lim\limits_{\theta \to 0} \mu(\theta) = \tau(0) = \nu$ до $\widetilde{\mu}(\pi) = \pi$, затем колеблется вокруг π в пределах $\nu < \widetilde{\mu}(\theta) < \frac{3}{2}\pi$ (речь идёт о спиралях с возрастающей кривизной, т.е. с $\pi/2 < \nu < \pi$, образцы которых показаны на рис. 4). Соответственно, угол между касательной и хордой в начальной точке,

$$\widetilde{\alpha}(\theta) = \tau(0) - \widetilde{\mu}(\theta) = \nu - \widetilde{\mu}(\theta),$$

изменяется в пределах $-\pi < \widetilde{\alpha}(\theta) < 0$. Это обстоятельство было выяснено в [1] (следствие 5.1) как общее свойство кривых с возрастающей неотрицательной кривизной. Спирали этого типа закручиваются вблизи конечной точки, и накопленное по непрерывности значение угла $\widetilde{\beta}$ сверху не ограничено. Его получим, прибавив к $\widetilde{\alpha}$ полный поворот спирали –

$$\widetilde{\beta}(\theta) = \widetilde{\alpha}(\theta) + [\tau(\theta) - \tau(0)] = \widetilde{\alpha}(\theta) + \theta,$$

после чего определим σ:

$$\sigma(\theta) = \widetilde{\alpha}(\theta)+\widetilde{\beta}(\theta) = \theta + 2[\nu - \widetilde{\mu}(\theta)]$$
$$= \theta + 2\alpha = \theta - 2\arccos\frac{\mathrm{e}^T\cos(\nu-\theta) - \cos\nu}{\sqrt{\mathrm{e}^{2T} - 2\mathrm{e}^T\cos\theta + 1}}.$$

(Если кривизна убывает ($0 < \nu < \pi/2$), то однозначно определяется угол $\beta\in(0,\pi)$, и значение σ, в этом случае отрицательное, получается равным $2\beta-\theta$.) Кумулятивность σ обеспечивается естественной кумулятивностью полярного угла θ.

Рассматривая далее $\widetilde{\mu}$ и σ как функции двух переменных, определим производные исходя из выражения $\sigma(\theta,\nu) = \theta+2\nu-2\widetilde{\mu}(\theta,\nu)$:

$$\frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta} = \frac{\sin(\theta+\nu) - \mathrm{e}^T\sin\nu}{2\sin\nu(\operatorname{ch}T - \cos\theta)},$$
$$\frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial\nu} = \frac{\theta\sin\theta}{2\sin^2\nu(\operatorname{ch}T - \cos\theta)},$$

и

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = 1 - 2\frac{\partial\widetilde{\mu}}{\partial\theta} = \frac{\cos\nu\sin\theta - \sin\nu\operatorname{sh}T}{\sin\nu(\operatorname{ch}T - \cos\theta)},$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\nu} = 2 - \frac{\theta\sin\theta}{\sin^2\nu(\operatorname{ch}T - \cos\theta)}.$$

Инверсное расстояние δ определим как $\operatorname{ch}\delta = 1-2Q$ (см. (2), (3)). Получаем

$$Q = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\nu\operatorname{ch}T - \cos^2\nu\cos\theta\right),$$
$$\operatorname{ch}\delta(\theta,\nu) = 1-2Q = \sin^2\nu\operatorname{ch}T + \cos^2\nu\cos\theta,$$
$$\frac{\partial(\operatorname{ch}\delta)}{\partial\theta} = \operatorname{sh}\delta\frac{\partial\delta}{\partial\theta} = \sin\nu\cos\nu\operatorname{sh}T - \cos^2\nu\sin\theta,$$
$$\frac{\partial(\operatorname{ch}\delta)}{\partial\nu} = \operatorname{sh}\delta\frac{\partial\delta}{\partial\nu} = 2\sin\nu\cos\nu(\operatorname{ch}T - \cos\theta) - \theta\operatorname{sh}T,$$

и якобиан $\dfrac{\partial(\delta,\sigma)}{\partial(\theta,\nu)} = \delta'_\theta\sigma'_\nu - \delta'_\nu\sigma'_\theta$ упрощается до

$$\frac{\theta(\operatorname{ctg}^2\nu\,\sin^2\theta - \operatorname{sh}^2T)}{(\operatorname{ch}T - \cos\theta)\operatorname{sh}\delta} + 4\frac{\cos\nu}{\operatorname{sh}\delta}.$$

Выразим ν через θ и T:

$$\operatorname{ctg}\nu = \frac{T}{\theta}, \quad \cos\nu = \frac{T}{\sqrt{T^2+\theta^2}}.$$

Якобиан принимает вид

$$\frac{\theta T^2}{\operatorname{sh}\delta(\operatorname{ch}T-\cos\theta)}\left(\frac{\operatorname{sh}T}{T}-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\operatorname{sh}T}{T}+\frac{\sin\theta}{\theta}-4\frac{\operatorname{ch}T-\cos\theta}{T^2+\theta^2}\right).$$

Все сомножители положительны, последний – в силу (14). Стало быть, якобиан всюду определён и нигде не обращается в нуль. □

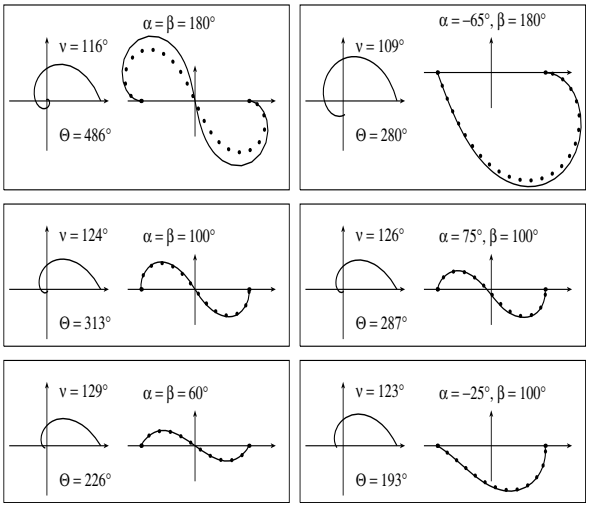

Рис. 5.

Завершающий этап построения искомой спирали состоит в преобразовании найденной базовой дуги дробно-линейным отображением. Несколько примеров показаны на рис. 5 (короткие спирали) и на рис. 6 (длинные спирали). Слева на каждом фрагменте показана подлежащая трансформации дуга логарифмической спирали; Θ – её угловая длина, найденная вместе с параметром формы ν как решение системы (6). Справа – результат преобразования. Граничные углы

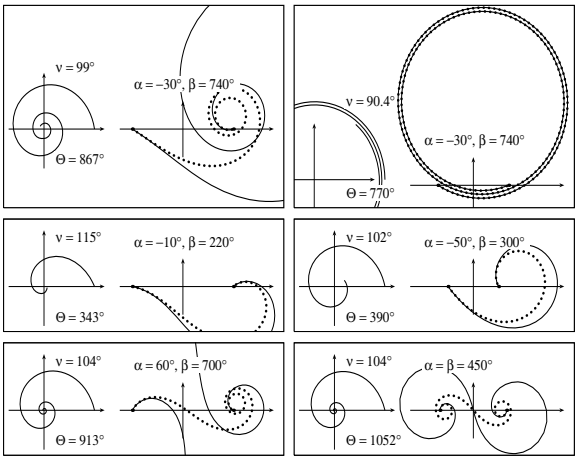

Рис. 6.

α, β и кривизны были позаимствованы у спирали Корню, изображённой в виде точечной линии.

Отображение $w(\theta) = \frac{a\,z(\theta)+b}{c\,z(\theta)+d}$ дуги $z(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \Theta$, логарифмической спирали удобно строить по трём точкам $z_{1,2,3}$ и их образам $w_{1,2,3}$:

$$\frac{w(\theta)-w_1}{w(\theta)-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z(\theta)-z_1}{z(\theta)-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{16}$$

Точки $z_{1,2}$ – начало и конец дуги (15), их образы, точки $w_{1,2}$ – границы хорды. В качестве третьей точки взята точка $z_3 = z(\Theta/2)$. Она лежит на пересечении двух серединных окружностей, и это свойство, воспроизводимое на спирали-образе, позволяет определить точку w_3 по заданным граничным условиям:

$$\begin{aligned} &z_1=1, && z_2=\mathrm{e}^{\Theta\,\mathrm{tg}\,\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}, && z_3=z\left(\frac{\Theta}{2}\right);\\ &w_1=-1, && w_2=1, && w_3=\mathrm{th}\,\frac{\rho_3+\mathrm{i}\varphi_3}{2}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{где } \rho_3=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\beta-k_2}{\sin\alpha+k_1},\quad \varphi_3=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(в силу (12) аргумент логарифма положителен).

Утверждение 5. *Точка $z(\theta/2)$ логарифмической спирали лежит на пересечении двух серединных окружностей –*

(а) *биссектрисы линзы, построенной для линейных элементов $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(\theta)$;*

(б) *серединной окружности кругов кривизны $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(\theta)$.*

Доказательство. Поскольку дуги $[0,\theta/2]$ и $[\theta/2,\theta]$ подобны, значения инварианта σ на каждой из них одинаковы. По теореме 3 в [6], точка $z(\theta/2)$ лежит на биссектрисе линзы, построенной для дуги $[0,\theta]$ (рис. 7а).

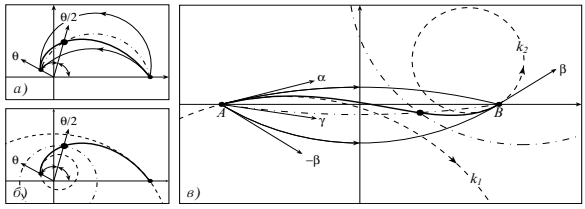

Рис. 7.

В том, что эта точка лежит на серединной окружности двух граничных кругов кривизны (рис. 7б), убедимся непосредственной проверкой. Принятая в [8] нормировка коэффициентов неявного уравнения окружности

$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0 \quad \text{в виде} \quad B^2+C^2-AD=1$$

позволяет получить уравнение серединной окружности $C_0(x,y)=0$ простым суммированием уравнений двух данных окружностей. Для окружности $K(x_0,y_0,\tau,k)$ нормированное уравнение имеет вид

$$C(x,y)\equiv k\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]+2(x-x_0)\sin\tau-2(y-y_0)\cos\tau=0.$$

В частности, для кругов кривизны (15) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(0)\colon C_1(x,y) &= \sin\nu[(x-1)^2+y^2]+2(x-1)\sin\nu-2y\cos\nu;\\ \mathcal{K}(\theta)\colon C_2(x,y) &= \mathrm{e}^{-T}\sin\nu[(x-\mathrm{e}^T\cos\theta)^2+(y-\mathrm{e}^T\sin\theta)^2]\\ &\quad+2(x-\mathrm{e}^T\cos\theta)\sin(\nu+\theta)-2(y-\mathrm{e}^T\sin\theta)\cos(\nu+\theta).\end{aligned}$$

В уравнении серединной окружности

$$C_0(x,y) = \frac{C_1(x,y) + C_2(x,y)}{\pm 2\sqrt{1-Q(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2)}}$$

знаменатель лишь сохраняет нормировку, числитель упрощается до

$$\sin\nu(1+\mathrm{e}^{-T})(x^2+y^2) + 2x\cos\nu\sin\theta - 2y\cos\nu(1+\cos\theta) - \sin\nu(1+\mathrm{e}^{T}).$$

Подставляя $x = \mathrm{e}^{T/2}\cos(\theta/2)$, $y = \mathrm{e}^{T/2}\sin(\theta/2)$, получаем $C_0(x,y) = 0$. □

Соответственно, образ точки z_3 – точка w_3 с биполярными координатами (ρ_3, φ_3) – находится на биссектрисе линзы, определяемой заданными элементами кривизны $K(-1,0,\alpha,k_1)$ и $K(1,0,\beta,k_2)$ (рис. 7в). Биссектриса является координатной линией $\varphi = \mathrm{const}$ биполярной системы координат (8), а именно

$$\varphi = \gamma = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

поэтому $\varphi_3 = \gamma$. Параметрическое уравнение биссектрисы имеет вид

$$x(\rho) + \mathrm{i}y(\rho) = \frac{\operatorname{sh}\rho + \mathrm{i}\sin\gamma}{\operatorname{ch}\rho + \cos\gamma}, \quad -\infty < \rho < +\infty. \tag{18}$$

Точка w_3 находится также на серединной окружности двух заданных кругов кривизны, уравнение которой получается аналогичным суммированием:

$$\begin{aligned} M(x,y) = {} & k_1[(x+1)^2 + y^2] + 2(x+1)\sin\alpha - 2y\cos\alpha \\ & + k_2[(x-1)^2 + y^2] + 2(x-1)\sin\beta - 2y\cos\beta = 0. \end{aligned}$$

Найдём ρ_3 как пересечение этой окружности с дугой (18), т.е. как решение уравнения $M(x(\rho_3), y(\rho_3)) = 0$. За счёт того, что биссектриса является лишь частью некоторой окружности, решение единственно. Получаем указанные в (17) значения (ρ_3, φ_3). Теперь (16) преобразуется к виду

$$\underbrace{\frac{1+w(\theta)}{1-w(\theta)}}_{\mathrm{e}^{\rho(\theta)+\mathrm{i}\varphi(\theta)}} = \underbrace{\frac{1+w_3}{1-w_3}}_{\mathrm{e}^{\rho_3+\mathrm{i}\varphi_3}} \cdot \frac{z(\theta)-1}{z(\theta)-z_2} \cdot \underbrace{\frac{z_3-z_2}{z_3-1}}_{-z_3}, \quad \text{где} \quad z(\theta) = \mathrm{e}^{(\operatorname{ctg}\nu+\mathrm{i})\theta}.$$

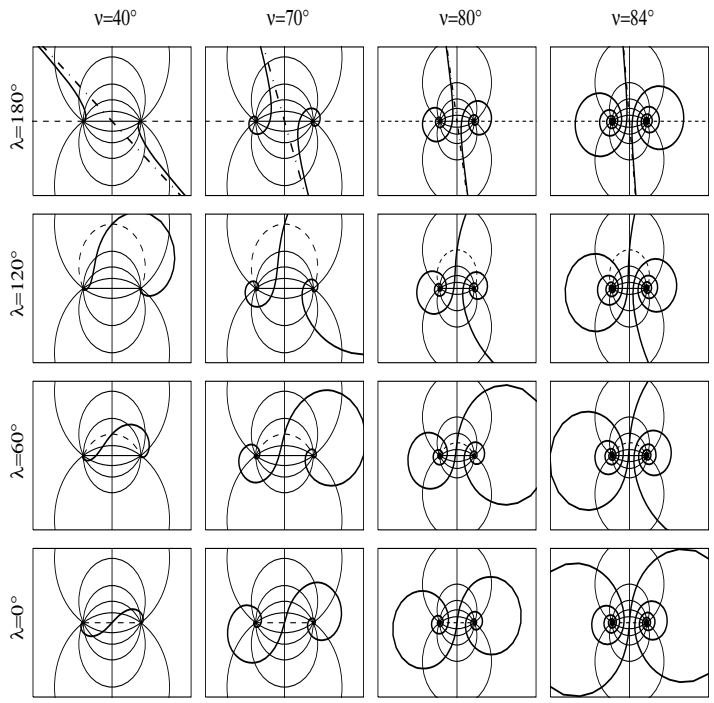

Рис. 8.

Параметр θ базовой дуги, $0 \leqslant \theta \leqslant \Theta$, служит параметром построенной кривой. Отсюда получаются её параметрические уравнения в декартовых $[x(\theta), y(\theta)]$ и в биполярных $[\rho(\theta), \varphi(\theta)]$ координатах.

Двойная логарифмическая спираль. При инверсии логарифмической спирали мы получаем *двойную логарифмическую спираль*. Этот термин, отсутствующий в справочниках и энциклопедиях, обнаружился в книге [9, с. 279] при рассмотрении гидромеханических приложений теории аналитических функций. Каноническим можно считать уравнение двойной логарифмической спирали, получаемое способом (16), если полюс $z_1 = z(-\infty) = 0$ исходной спирали сделать левым полюсом биполярной системы $w_1 = -1$, бесконечно удалённую точку $z_2 = z(+\infty) = \infty$ – правым полюсом $w_2 = 1$ и напра-

вить промежуточную точку $z_3 = z(0) = 1$ в произвольное положение $w_3 = \operatorname{th}\frac{\rho_3+\mathrm{i}\varphi_3}{2}$:

$$\frac{1+w(\theta)}{1-w(\theta)} = \frac{1+w_3}{1-w_3}\cdot z(\theta) \implies \mathrm{e}^{\rho(\theta)+\mathrm{i}\varphi(\theta)} = \mathrm{e}^{\rho_3+\mathrm{i}\varphi_3}\cdot \mathrm{e}^{(\operatorname{ctg}\nu+\mathrm{i})\theta}.$$

При переходе в биполярную систему получаем линейные параметрические уравнения $[\rho(\theta), \varphi(\theta)]$. Исключение θ и подстановка $\varphi_3 = \lambda+\rho_3/\operatorname{ctg}\nu$ дают явное уравнение

$$\rho(\varphi) = \operatorname{ctg}\nu\,(\varphi-\lambda).$$

Кривая пересекает координатные линии $\varphi = \mathrm{const}$ под постоянным углом ν и проходит через точку $(\rho,\varphi) = (0,\lambda)$ на оси ординат. Третьим (неявным) параметром формы кривой является расстояние F между полюсами биполярной системы. Рисунок 8 иллюстрирует разнообразие форм двойной логарифмической спирали.

Литература

1. А. И. Курносенко, *Общие свойства плоских спиральных кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 93–115.
2. D. S. Meek, D. J. Walton, *Planar spirals that match G^2 Hermite data.* — Comp. Aided Geom. Design **15** (1998), 103–126.
3. J. M. Ali, R. M. Tookey, J. V. Ball, A. A. Ball, *The generalised Cornu spiral and its application to span generation.* — J. Comp. Appl. Math. **102** (1999), 37–47.
4. D. A. Dietz, B. Piper, *Interpolation with cubic spirals.* — Comp. Aided Geom. Design **21** (2004), 165–180.
5. А. И. Курносенко, *Короткие спирали.* — Зап. науч. семин. ПОМИ 372 (2009), 34–43.
6. А. И. Курносенко, *Длинные спирали.* — Зап. науч. семин. ПОМИ 372 (2009), 44–52.
7. А. Руинский, *Инверсии равносторонней гиперболы.* — Матем. просв., сер. 3, вып. 4 (2000), 120–126.
8. А. И. Курносенко, *Инверсный инвариант пары окружностей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 167–186.
9. А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич, *Введение в теорию аналитических функций.* Просвещение, М., 1977.

Kurnosenko A. I. Generating spirals with predefined boundary conditions.

Spirality, considered as monotonicity of curvature, is preserved under inversions. This property is used to construct a spiral transition curve

with predefined curvature elements at the end points. These boundary conditions define two invariant values: Coxeter's inversive distance and the width of the lense. To solve the problem, it is sufficient to realize corresponding values on two curvature elements of any known spiral. The rest is achieved by inversion. In particular, any boundary conditions, compatible with spirality, can be satisfied by inverting an arc of logarithmic spiral.

Московский инж.-физ. институт,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Россия

E-mail: alexey.kurnosenko@cern.ch

Поступило 3 августа 2007 г.