Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 372, 2009 г.

А. И. Курносенко

О ПОСТРОЕНИИ СПИРАЛИ КОРНЮ С ЗАДАННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НА КОНЦАХ

Рассматриваемая задача взята из области численных методов. Обращение к ней как к примеру приложений теории представляется уместным в связи с публикацией основных свойств спиралей [1–3].

Равномерное изменение кривизны на спирали Корню ценится при проектировании скоростных дорог. В железнодорожной технике её используют как *переходную кривую* [4, с. 262] для сопряжения двух участков дороги. При анализе задачи в [5] использовались исследования В. Фогта (цитированные в [1, 2]), поэтому рассматривались только выпуклые дуги – без точки перегиба и с небольшим поворотом.

Мы ставим своей целью предложить надёжный численный метод для нахождения дуги спирали Корню с заданными граничными условиями. Теоретическая основа такова, что никаких ограничений на длину, форму, степень закрученности спирали просто не возникает.

Постановку задачи иллюстрирует рис. 1. Требуется найти дугу спирали Корню, имеющую на концах заданные (относительно хорды) наклоны касательных α и β. Мы получим её как дугу A_iB_i на канонически расположенной спирали, описываемой натуральным уравнением $k(s) = \pm s/a^2$. Далее, ограничиваясь случаем возрастающей кривизны и фиксируя параметр формы как $a^2 = 2$, мы используем уравнения

$$k(s) = \frac{s}{2}, \quad \tau(s) = \frac{s^2}{4}, \quad \begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{Bmatrix} = \int\limits_0^s \begin{Bmatrix} \cos\tau(t) \\ \sin\tau(t) \end{Bmatrix} \mathrm{d}t, \quad s \in [u, v]. \qquad (1)$$

Конструктор может задать наклоны касательных в виде кумулятивных углов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, указывающих на желаемую степень закрученности

Ключевые слова : индекс закрученности, поворот кривой, точка перегиба.

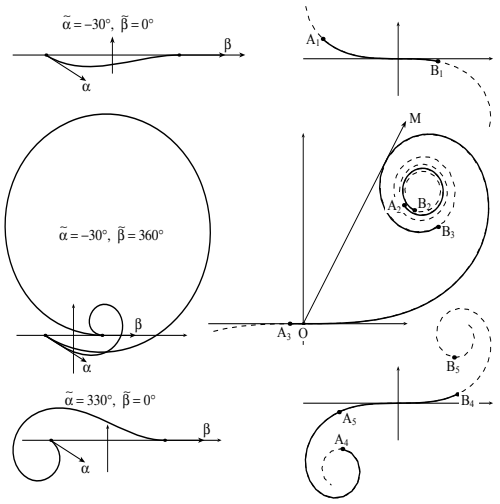

Рис. 1.

спирали. Для спиралей с возрастающей кривизной их возможные значения таковы (см. [1, следствие 4.2]):

$$\begin{matrix}\widetilde{\alpha} = \alpha + 2\pi M, \\ \widetilde{\beta} = \beta + 2\pi N:\end{matrix} \begin{cases} 0 \leqslant k_1 < k_2: & -\pi < \alpha < 0, & -\pi < \beta \leqslant \pi, & M = 0,\ N \geqslant 0; \\ k_1 < 0 < k_2: & -\pi < \alpha \leqslant \pi, & -\pi < \beta \leqslant \pi, & M \geqslant 0,\ N \geqslant 0; \\ k_1 < k_2 \leqslant 0: & -\pi < \alpha \leqslant \pi, & -\pi < \beta < 0, & M \geqslant 0,\ N = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Счётчики M и N увеличиваются на 1 при каждом пересечении кривой, соответственно, с левым или правым дополнением хорды до бесконечной полупрямой. У четырёх дуг A_iB_i на рис. 1 наклоны касательных в системе координат хорды одинаковы – $\alpha = -30°$, $\beta = 0°$. Дуга A_1B_1 — *короткая* [2], её индекс закрученности (M, N) равен (0,0). Индексу $(M, N) = (0, 1)$, т.е. $\alpha = \widetilde{\alpha} = -30°$, $\widetilde{\beta} = 360°$, соответствуют два решения, A_2B_2 и A_3B_3. Дугу A_4B_4 получим для $\widetilde{\alpha} = 330°$, $\widetilde{\beta} = 0°$, $(M, N) = (1, 0)$.

Использование симметрии позволяет ограничиться условиями

$$\sigma_0 = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} > 0, \qquad \rho_0 = \widetilde{\beta} - \widetilde{\alpha} \geqslant 0. \tag{3}$$

Первое соответствует возрастанию кривизны [3, теорема 1]. Если кривизна убывает, как у дуги A_1B_1, решим задачу для дуги, симметричной относительно оси абсцисс с $(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') = (-\tilde{\alpha}', -\tilde{\beta}')$. Если поворот ρ_0 кривой отрицателен (дуга A_4B_4), найдём дугу $A_5B_5 = [u, v]$

для $(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') = (\tilde{\beta}', \tilde{\alpha}')$ и получим искомую дугу как $s \in [-v, -u]$. Ограничением $\rho_0 \geqslant 0$ третий подкласс спиралей из перечня (2) исключается; спирали с перегибом присутствуют частично, а именно: в виде дуг, у которых левая ветвь (до точки перегиба) не длиннее правой; подкласс с $k(s) \geqslant 0$ включён полностью. Соответственно, графики функций $\tau(s)$ (см. (1)) – дуги парабол $T_1T_0T_2$ и T_3T_4 на рис. 2 – таковы, что их левая граница, точка T_1/T_3, находится не выше правой, T_2/T_4.

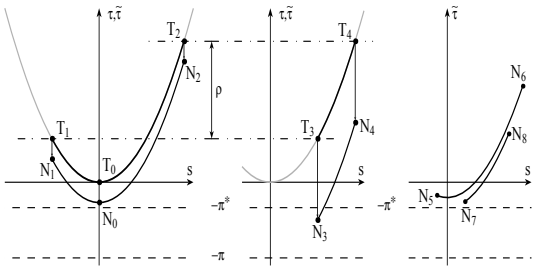

Рис. 2.

Построение целевой функции. Обозначая длину дуги $[u, v]$ спирали как $2t$, из равенств $2t = v - u$ и $\rho_0 = \frac{1}{4}(v^2 - u^2)$ получаем

$$u(t) = \frac{\rho_0}{t} - t, \quad v(t) = \frac{\rho_0}{t} + t, \quad t > 0, \tag{4}$$

что гарантирует требуемое значение ρ_0 на дугах $[u(t), v(t)]$. Определив зависимость $\sigma(t)$, сведём задачу к решению уравнения с одним неизвестным:

$$\sigma(t) = \sigma_0. \tag{5}$$

Для определения углов $\widetilde{\alpha}(t)$ и $\widetilde{\beta}(t)$, измеренных относительно хорды с учётом индексов закручивания, перейдём в систему координат хорды. Переход включает поворот кривой на угол $\mu(u, v)$, равный наклону хорды A_iB_i у спирали в каноническом положении (рис. 1). При этом параболы $T_1T_0T_2$, T_3T_4 (рис. 2), графики функции $\tau(s)$, смещаются вниз на величину $\widetilde{\mu}(u, v) = \mu(u, v) + 2K\pi$ в положения $\widetilde{\tau}(s)$, показанные как $N_1N_0N_2$, N_3N_4, $N_{1,3} = (u, \widetilde{\alpha})$, $N_{2,4} = (v, \widetilde{\beta})$. Согласно [1, лемма 4], поправка $2K\pi$ такова, что при этом смещении точка s_0 с

минимальной по модулю кривизной (*опорная точка*, T_0 или T_3) попадает в положение N_0 или N_3, заключённое в полосе

$$-\pi < \widetilde{\tau}(s_0) < 0 \text{ (для возрастающей кривизны).} \tag{6}$$

Вычислим теперь $\sigma(t)$ следующим образом. После шага (4) определяем (привлекая интегралы Френеля) проекции хорды и её наклон:

$$\begin{array}{l} \Delta x = x(v) - x(u), \\ \Delta y = y(v) - y(u), \end{array} \quad \mu(u,v) = \arg(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) \in (-\pi, \pi].$$

Для получения корректных значений $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ в соответствии с (2) его необходимо поправить на величину, кратную 2π, получив непрерывную функцию $\widetilde{\mu}(u,v) = \mu(u,v) + 2K\pi$ ($K = K(u,v)$ – целое), такую, что, например, выполнено $\widetilde{\mu}(s, s+\varepsilon) \to \tau(s)$ при $\varepsilon \to 0$. Для этого определим положение s_0 опорной точки T_0 или T_3 и наклон касательной в ней при каноническом расположении спирали:

$$s_0 = \max(0, u), \quad \tau_0 = \tau(s_0) = \frac{s_0^2}{4}.$$

Применим (6), учитывая, что функция $\arg(z)$ возвращает значение в пределах $(-\pi, \pi]$:

$$-\pi < \tau_0 - \widetilde{\mu} < 0, \quad \widetilde{\mu} = \mu + 2K\pi \Longrightarrow \tau_0 - \widetilde{\mu} = \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau_0 - \widetilde{\mu})} = \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau_0 - \mu)}.$$

Получаем искомое: $\widetilde{\mu} = \tau_0 - \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tau_0 - \mu)}$, или, развёрнуто,

$$\widetilde{\mu}(u,v) = \tau_0 - \arg[\,(\Delta x \cos\tau_0 + \Delta y \sin\tau_0) + \mathrm{i}\,(\Delta x \sin\tau_0 - \Delta y \cos\tau_0)\,]$$

(напомним, что u и v есть функции переменной t и параметра ρ_0). Окончательно:

$$\begin{array}{l} \widetilde{\alpha}(t) = \widetilde{\tau}(u) = \tau(u) - \widetilde{\mu}(u,v), \\ \widetilde{\beta}(t) = \widetilde{\tau}(v) = \tau(v) - \widetilde{\mu}(u,v), \end{array} \quad \sigma(t) = \tau(u) + \tau(v) - 2\widetilde{\mu}(u,v).$$

Графики семейства функций $\sigma(t; \rho_0)$ показаны на рис. 3. Ограничим теперь интервал значений t для поиска решений уравнения (5).

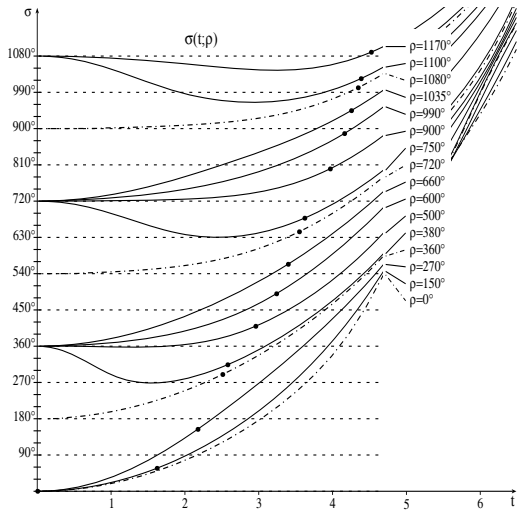

Рис. 3.

Необходимое условие существования спирали [1, теорема 2]

$$Q = (k_1 c + \sin\widetilde{\alpha})(k_2 c - \sin\widetilde{\beta}) + \sin^2\frac{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}{2} < 0 \tag{7}$$

($2c$ – длина хорды) при $k_1 = k(u(t))$, $k_2 = k(v(t))$ принимает вид:

$$\begin{aligned} 4Q &= -c^2t^2 + 2ct(\sin\widetilde{\alpha} + \sin\widetilde{\beta}) + (2 - 2\cos\rho_0) + \frac{2c\rho_0}{t}(\sin\widetilde{\alpha} - \sin\widetilde{\beta}) + \frac{c^2\rho_0^2}{t^2} \\ &= -c^2t^2 + 4ct\sin\omega\cos\gamma + 4\sin^2\gamma - \frac{8c\gamma}{t}\sin\gamma\cos\omega + \frac{4c^2\gamma^2}{t^2} < 0, \end{aligned}$$

$$\text{где}\quad \omega = \frac{\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}{2} = \frac{\sigma_0}{2} > 0, \quad \gamma = \frac{\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}}{2} = -\frac{\rho_0}{2} \leqslant 0. \tag{8}$$

Подстановка $c = t\xi$, где $0 < \xi < 1$ – отношение длины хорды $2c$ к длине кривой $2t$, даёт биквадратное неравенство относительно t:

$$t^4\xi^2 - 4t^2\xi\sin\omega\cos\gamma - 4(\xi^2\gamma^2 - 2\xi\gamma\sin\gamma\cos\omega + \sin^2\gamma) > 0.$$

Поскольку свободный член неположителен, оно сводится к

$$t^2 > f(\xi), \quad f(\xi) \equiv \frac{2}{\xi}\left(\sin\omega\cos\gamma + \sqrt{(\xi\gamma - \sin\gamma\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}\right) \geqslant 0.$$

Исследование экстремумов функции $f(\xi)$ показывает, что максимумов при $\xi > 0$ у неё нет, и приводит к следующему значению $\xi = \xi_0$, доставляющему ей минимум на интервале $0 < \xi < 1$:

		по умолчанию :	$\xi_0 = 1;$
$\sin\omega > 0,$	$\sin\gamma > 0,$	$\cos\omega + \cos\gamma < 0$:	$\xi_0 = \min(1, \xi_2);$
$\sin\omega > 0,$	$\sin\gamma < 0,$	$\cos\omega - \cos\gamma > 0$:	$\xi_0 = \min(1, \xi_1);$
$\sin\omega < 0,$	$\sin\gamma > 0,$	$\cos\omega - \cos\gamma < 0$:	$\xi_0 = \min(1, \xi_1);$
$\sin\omega < 0,$	$\sin\gamma < 0,$	$\cos\omega + \cos\gamma > 0$:	$\xi_0 = \min(1, \xi_2);$
	$\sin\gamma = 0,$	$\sin\omega\cos\gamma < 0$:	$\xi_0 = 0,\ f(\xi_0) = \lim\limits_{\xi\to 0} f(\xi) = 0.$

Выбор $\xi_0 = 1$ в первой строке соответствует монотонному убыванию или постоянству $f(\xi)$. Затем ξ_0 корректируется для четырёх случаев наличия у функции экстремума (минимума), возникающего при

$$\xi_1 = \frac{\sin\gamma(1-\cos\gamma\cos\omega)}{\gamma(\cos\omega - \cos\gamma)} \quad \text{либо при} \quad \xi_2 = \frac{\sin\gamma(1+\cos\gamma\cos\omega)}{\gamma(\cos\omega + \cos\gamma)}.$$

В каждом случае $\sin\gamma \neq 0$, поэтому неравенство (8) становится строгим ($\gamma < 0$), и $\xi_{1,2} > 0$. Записью $\xi_0 = \min(1, \xi_{1,2})$ минимумы при $\xi_{1,2} > 1$ отсекаются.

В условиях последней строки $f(\xi)$ монотонно возрастает. При этом $\cos\gamma = \pm 1$, $\sin\omega\cos\gamma = -|\sin\omega|$, поэтому

$$f(\xi) \equiv \frac{2}{\xi}\left(-|\sin\omega| + \sqrt{\xi^2\gamma^2 + \sin^2\omega}\right),$$

откуда и следует указанный выше предел. Получаем нижнюю границу для t, вычисляемую только по заданным граничным условиям:

$$t > t_0, \quad t_0 = \sqrt{f(\xi_0)}.$$

Решения без точки перегиба мы получим в тех случаях, когда левая граница дуги не попадает на левую ветвь кривой, т.е. при $u(t) \geqslant 0$, или

$$t \leqslant t_1, \quad t_1 = \sqrt{\rho_0}. \tag{10}$$

Точки на графиках $\sigma(t;\rho)$ на рис. 3 отделяют эти дуги от дуг с перегибом. При $t > t_1$ $\sigma(t)$ монотонно возрастает, поскольку увеличение t приводит к расширению отрезка $[u(t), v(t)]$ в обе стороны ($u'_t < 0$, $v'_t > 0$) [3, теорема 1].

Решения с точкой перегиба. Из неравенства (6) получим ограничения для дуг с точкой перегиба ($u < 0 < v$), являющейся в этом случае опорной точкой: $s_0 = 0$. Оно принимает вид $0 < |T_0N_0| < \pi$. Но $|T_0N_0| = |T_1N_1| = \tau(s) - \widetilde{\tau}(s) = \tau(u) - \widetilde{\alpha}$:

$$0 < \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{t} - t\right)^2 - \widetilde{\alpha} < \pi. \tag{11}$$

Неравенство (6) и, вслед за ним, (11) можно несколько усилить, если заметить, что у дуги спирали Корню, *включающей точку перегиба*, верхняя граница возможных значений $\mu(u, v)$ меньше π: максимальное значение поворота хорды и, соответственно, сдвига $T_0 \to N_0$ равно наклону вектора OM на рис. 1. Мы оцениваем эту константу (около $60.5°$) с избытком –

$$\pi^\star = 1,05533 > 1,0553291099\ldots = \max_{u<0<v} \mu(u, v),$$

оставляя тем самым уточнённое неравенство (6) строгим:

$$\begin{array}{ll} -\pi < \widetilde{\tau}(s_0) < 0 & \text{(опорная точка } N_3\text{)}; \\ -\pi^\star < \widetilde{\tau}(0) < 0 & \text{(перегиб, опорная точка } N_0\text{)}. \end{array}$$

Для дуг с перегибом, таким образом, получаем: $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\tau}(u) > \widetilde{\tau}(0) > -\pi^\star$. Из значения угла $\widetilde{\alpha}$ можно теперь сделать следующий вывод, дополняющий (2):

$$\begin{array}{rcll} -\pi < \widetilde{\alpha} \leqslant -\pi^\star & : & \text{точка перегиба отсутствует} & \text{(парабола } N_3N_4\text{)}; \\ -\pi^\star < \widetilde{\alpha} < 0 & : & \text{точка перегиба возможна} & (N_5N_6,\ N_7N_8); \\ \widetilde{\alpha} \geqslant 0 & : & \text{точка перегиба присутствует} & (N_1N_2). \end{array}$$

Преобразуем (11), заменив π на $\pi^\star$:

$$\begin{cases} t^4 - 2(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})t^2 + (\widetilde{\beta}-\widetilde{\alpha})^2 > 0\,, \\ t^4 - 2(2\pi^\star+\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})t^2 + (\widetilde{\beta}-\widetilde{\alpha})^2 < 0. \end{cases}$$

При условии $\widetilde{\beta} \geqslant \widetilde{\alpha}$ (см. (3)) решение этой системы имеет вид

$$\begin{array}{rc} -\pi^\star < \widetilde{\alpha} < 0: & t \in (t_2, t_5), \\ \widetilde{\alpha} \geqslant 0: & t \in (t_2, t_3) \cup (t_4, t_5), \end{array} \tag{12}$$

где

$$t_2 = \sqrt{\widetilde{\beta}+\pi^\star} - \sqrt{\widetilde{\alpha}+\pi^\star}, \qquad t_3 = \sqrt{\widetilde{\beta}} - \sqrt{\widetilde{\alpha}},$$
$$t_4 = \sqrt{\widetilde{\beta}} + \sqrt{\widetilde{\alpha}}, \qquad t_5 = \sqrt{\widetilde{\beta}+\pi^\star} + \sqrt{\widetilde{\alpha}+\pi^\star}.$$

С учётом тривиальных неравенств $t_2 < t_3 \leqslant t_1 \leqslant t_4 < t_5$ либо, при $\widetilde{\alpha} < 0$, $t_2 < t_1 < t_5$, оставим в (12) лишь значения $t > t_1$, соответствующие наличию перегиба:

$$\begin{aligned} -\pi^\star < \widetilde{\alpha} < 0: &\qquad t \in (t_1, t_5), \\ \widetilde{\alpha} \geqslant 0: &\qquad t \in (t_4, t_5). \end{aligned}$$

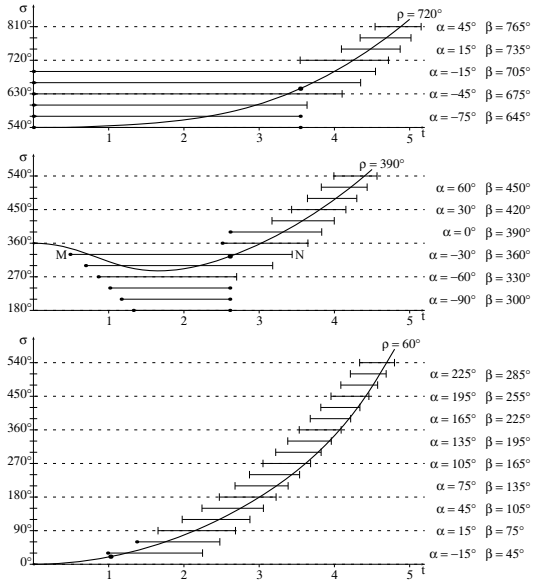

Рис. 4.

Итоговое решение. В ситуации $-\pi^\star < \widetilde{\alpha} < 0$ перегиб не гарантирован, и решения следует искать также в интервале (t_0, t_1), определённом неравенствами (9), (10):

$$\left.\begin{aligned} -\pi < \widetilde{\alpha} \leqslant -\pi^\star: &\quad t \in (t_0, t_1] \\ -\pi^\star < \widetilde{\alpha} < 0: &\quad t \in (t_0, t_5) \\ \widetilde{\alpha} \geqslant 0: &\quad t \in (t_4, t_5) \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad t > t_0.$$

Глобальным неравенством $t > t_0$ мы подчёркиваем тот факт, что при $t_{1,4,5} < t_0$ соответствующие интервалы следует считать укороченными или пустыми.

Рисунок 4 иллюстрирует найденные интервалы для различных значений $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ (соответственно, σ_0, ρ_0). На нём выделен интервал MN для граничных условий $\widetilde{\alpha} = -30°$, $\widetilde{\beta} = 360°$ (соответственно, $\rho_0 = 390°$, $\sigma_0 = 330°$), на котором получаются два решения. Они показаны на рис. 1 как дуги A_2B_2 и A_3B_3.

Традиционные системы компьютерной математики легко справляются с задачей, поданной им в таком виде.

Литература

1. А. И. Курносенко, *Общие свойства плоских спиральных кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 93–115.
2. А. И. Курносенко, *Короткие спирали.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **372** (2009), 34–43.
3. А. И. Курносенко, *Длинные спирали.* — Зап. научн. семин. ПОМИ 372 (2009), 44–52.
4. А. А. Савёлов, *Плоские кривые. Систематика, свойства, применение* (Справочное руководство). Физматгиз, М., 1960.
5. D. S. Meek, R. S. D. Thomas, *A note on finding clothoids.* — J. Comp. Appl. Math. **170** (2004), 433–453.

Kurnosenko A. I. Constructing an arc of Cornu spiral with prescribed linear elements at the endpoints.

The objective of the article is to illustrate the previously outlined theory of spiral curves by an example of its numerical application. The problem of constructing a transition curve as an arc of Cornu spiral with prescribed boundary tangents is chosen for the discussion.

Московский инж.-физ. институт,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Россия

E-mail: alexey.kurnosenko@cern.ch

Поступило 20 февраля 2009 г.