

А. И. Курносенко

ДЛИННЫЕ СПИРАЛИ

Мы продолжаем начатое в [1] изучение свойств плоских кривых с монотонной кривизной (спиралей). Для задач интерполяции наиболее интересны относительно короткие спиральные дуги [2]. Некоторые утверждения о коротких спиралах обобщаются и на “длинные” спирали с ограниченной вариацией поворота.

Например, остаётся в силе теорема В. Фогта, обобщение которой было дано в [2]:

$$\text{sign}(\alpha+\beta) = \text{sign}(k_2 - k_1).$$

Здесь $k_{1,2}$ – кривизны, α и β – наклоны касательных на концах кривой, измеренные относительно направления её хорды. Её дальнейшее обобщение на сколь угодно длинные спирали состоит в переходе к *кумулятивным* определениям граничных углов, которые были даны в [1, следствие 5.1]: величина угла накапливается с соблюдением непрерывности при достижении значений $\pm\pi, \dots, \pm(2n+1)\pi$. Далее они обозначены как $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$.

Верна и теорема о расположении спирали внутри линзы и её доказательство ([3, теорема 2]), что иллюстрирует рис. 1. Точка A в начале спирали неподвижна, точка B движется вдоль кривой. На каждой хорде AB_i строим линзу – пару круговых дуг, опирающихся на ту же хорду и имеющих с кривой по одной общей касательной в граничных точках. Кривые AB_1 – AB_7 удовлетворяют определению короткой спирали. Дуга AB_8 , хоть и не является короткой, по-прежнему расположена внутри линзы. Сама же линза становится всё менее похожей на линзу в традиционном смысле этого слова и с какого-то момента заполняет всю плоскость. Теорема, оставаясь верной, становится при угловой ширине линзы $\sigma > 2\pi$ неинтересной. Интересен, однако, факт монотонного возрастания ширины линзы $\sigma = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ с расширением границ дуги, также иллюстрируемый рисунком 1.

Ключевые слова : вариация поворота, кумулятивные граничные углы, линзы, инверсное расстояние.

Мы оставляем в силе определение линзы, введённое в [2], используя для её параметров кумулятивные значения углов. Так, биссектриса линзы есть дуга окружности, опирающаяся на хорду AB спирали и выходящая из точки A под углом $(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})/2$.

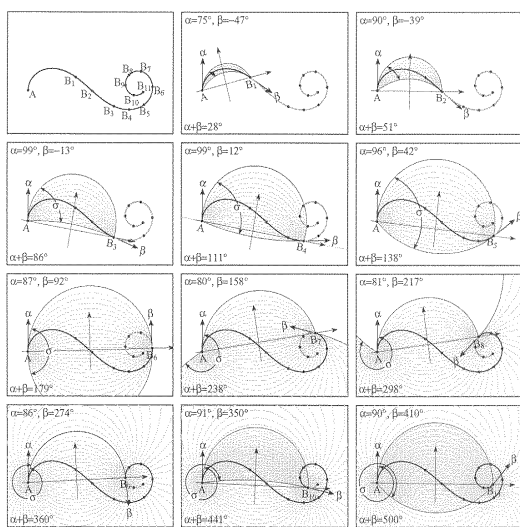


Рис. 1.

Теорема 1. У спирали $z(s)$ ширина линзы $\sigma(u, v)$ – строго монотонная функция границ спиральной дуги, за исключением участков постоянной кривизны, в пределах которых $\sigma(u, v) = \text{const} = 0$:

$$|\sigma(u_1, v_1)| < |\sigma(u, v)|, \text{ если } [u_1, v_1] \subset [u, v] \text{ и } k(u) \neq k(v).$$

При этом

$$\text{sign} \sigma(u, v) = \text{sign}[k(v) - k(u)]. \tag{1}$$

Доказательство. Для дуги $s \in [u, v]$ спирали с натуральным уравнением $k = k(s)$ и параметризацией $z(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leq s \leq S$, определим наклон касательной $\tau(s)$ и направление $\mu(u, v)$ хорды. В [1] мы ввели непрерывную функцию $\mu(u, v)$ так, что её предельное положение при $v \rightarrow u$ совпадает с касательной: $\mu(u, u) = \tau(u)$. Длина хорды

$h(u, v) = |z(v) - z(u)|$. Кумулятивные граничные углы, измеренные относительно этого направления с точностью до слагаемого, кратного 2π , равны

$$\tilde{\alpha}(u, v) = \tau(u) - \mu(u, v), \quad \tilde{\beta}(u, v) = \tau(v) - \mu(u, v),$$

а ширина линзы –

$$\sigma(u, v) = \tilde{\alpha}(u, v) + \tilde{\beta}(u, v) = \tau(u) + \tau(v) - 2\mu(u, v). \quad (2)$$

Вычисление производных даёт:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(u, v)}{\partial u} &= -\frac{\sin \alpha(u, v)}{h(u, v)}, & \frac{\partial \mu(u, v)}{\partial v} &= \frac{\sin \beta(u, v)}{h(u, v)}; \\ \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} &= k(u) + \frac{2 \sin \alpha(u, v)}{h(u, v)}, & \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} &= k(v) - \frac{2 \sin \beta(u, v)}{h(u, v)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Следствие 2.1 основного неравенства [1] для дуги (u, v) с возрастающей кривизной записывается в виде

$$\frac{1}{2}h(u, v)k(u) + \sin \alpha(u, v) < 0, \quad \frac{1}{2}h(u, v)k(v) - \sin \beta(u, v) > 0.$$

Применив его к производным (3), получаем

$$\frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial u} \leq 0, \quad \frac{\partial \sigma(u, v)}{\partial v} \geq 0.$$

Нестрогая форма неравенств учитывает возможное постоянство кривизны на внутренних участках спирали, в пределах которых $\sigma(u, v) = 0$. Если таковых нет, или как только $k(u) \neq k(v)$, функция $\sigma(u, v)$ возрастает при расширении участка (u, v) – уменьшении u и/или возрастании v . Поскольку $\sigma(s, s) = 0$, то, как только спираль отклоняется от окружности, получаем (1): $\sigma(u, v) > 0$. Для убывающей кривизны $\sigma(u, v) < 0$. \square

Угол σ есть ориентированный угол пересечения двух окружностей, образующих линзу. С учётом непрерывности $\sigma(u, v)$ заключаем:

Следствие 1.1. При инверсии спирали ширина линзы меняет знак, её абсолютная величина сохраняется.

Поворот ϱ спирали равен

$$\varrho(u, v) = \tau(v) - \tau(u) = \int_u^v k(s) ds.$$

Следствие 1.2. Вариация поворота спирали $\text{Var } \tau(s)$ ограничена неравенствами

$$|\sigma| < \text{Var } \tau(s) < |\sigma| + 2\pi,$$

и остаётся в этих пределах при инверсии спирали.

Простым аналогом этого утверждения является тот факт, что дугу окружности ($\sigma = 0$), стягиваемую малым углом $|\varrho| = \text{Var } \tau(s)$, можно инвертировать в дугу, поворот которой сколь угодно близок к 2π , но не превосходит 2π .

Доказательство. Напомним, что *опорной точкой* спирали мы называли в [1] точку s_0 , в которой абсолютное значение $|k(s)|$ минимально; это либо точка перегиба, либо, если кривизна знакопостоянна, одна из концевых точек спирали ($s_0 = 0$ или $s_0 = S$). Для возрастающей кривизны значение функции $\tau(s)$ в опорной точке минимально: $\lambda = \min \tau(s) = \tau(s_0)$. В системе координат хорды [1, лемма 4] $-\pi < \lambda < 0$. Вариация поворота равна

$$\text{Var } \tau(s) = (\tilde{\alpha} - \lambda) + (\tilde{\beta} - \lambda) = \sigma - 2\lambda.$$

При инверсии данной спирали получим спираль с убывающей кривизной (точка перегиба может появиться, остаться, исчезнуть), с выпуклой вверх функцией $\tau^*(s)$, параметрами $\sigma^* = -\sigma$ и $\lambda^* = \max \tau^*(s)$, причём $0 < \lambda^* < \pi$. По-прежнему,

$$\text{Var } \tau^*(s) = (\lambda^* - \tilde{\alpha}^*) + (\lambda^* - \tilde{\beta}^*) = -\sigma^* + 2\lambda^* = |\sigma| + 2\lambda^*.$$

(При отсутствии точки перегиба одно из слагаемых, $\tilde{\alpha} - \lambda$ либо $\tilde{\beta} - \lambda$, равно нулю.) \square

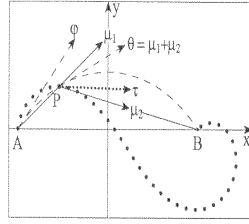


Рис. 2.

На дуге $[u, v]$ определена также функция $Q(u, v)$ – инверсный инвариант пары кругов кривизны $\mathcal{K}(u)$ и $\mathcal{K}(v)$ [1]. Они не пересекаются (точнее, их угол пересечения $i\delta$ чисто мнимый), поэтому от Q можно перейти к кокетерову *инверсному расстоянию* δ между окружностями [1]:

$$Q = -\operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{2}, \quad \delta = \operatorname{Arch}(1 - 2Q).$$

Поскольку $Q(u, v)$ с расширением дуги в одну или обе стороны монотонно убывает от нуля ([1, лемма 1]), $\delta(u, v)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим теперь точку $P = z(s)$, движущуюся по спирали от A до B , и две дуги спирали, AP и PB (рис. 2). Положим $h_1(s) = h(0, s) = |AP|$, $h_2(s) = h(s, S) = |PB|$ и применим аналогичные обозначения для функций

$$\begin{aligned} \delta_1(s) &= \delta(0, s), & \sigma_1(s) &= \sigma(0, s), & \mu_1(s) &= \tilde{\mu}(0, s), \\ \delta_2(s) &= \delta(s, S), & \sigma_2(s) &= \sigma(s, S), & \mu_2(s) &= \tilde{\mu}(s, S), \end{aligned}$$

определённых на соответствующих дугах и хордах. В частности,

$$\mu_1(0) = \tilde{\alpha}, \quad \mu_1(S) = 0, \quad \mu_2(0) = 0, \quad \mu_2(S) = \tilde{\beta}.$$

Положим также

$$\sigma_0 = \sigma(0, S) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}, \quad \delta_0 = \delta(0, S).$$

График $\sigma_1 + \sigma_2$ для дуги спирали Корню на рис. 3 иллюстрирует следующее свойство угла σ : в каком бы диапазоне не изменялись монотонные функции $\sigma_1(s)$ и $\sigma_2(s)$, их сумма заключена в интервале шириной менее 2π .

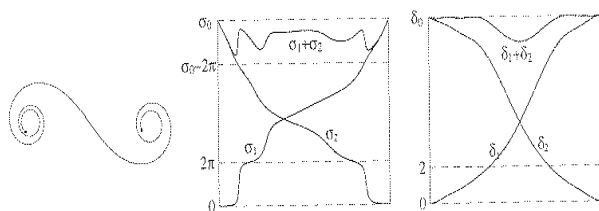


Рис. 3.

Теорема 2. Для внутренних точек спирали ($0 < s < S$) выполнено неравенство

$$|\sigma_0| - 2\pi < |\sigma_1(s)| + |\sigma_2(s)| < |\sigma_0|.$$

Доказательство. Наложим на декартову систему координат (x, y) биполярную систему (φ, ρ) , определённую в [1], с полюсами в точках $A = (-c, 0)$ и $B = (c, 0)$:

$$x = \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi}, \quad y = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi}, \quad \varphi(s) = \mu_1(s) - \mu_2(s).$$

Функция $\varphi(s)$ есть биполярная координата движущейся точки $P = (x(s), y(s))$. Определим углы μ_1 , μ_2 и $\mu_1 + \mu_2$:

$$\begin{aligned} \cos \mu_1 &= \frac{x+1}{h_1} = \frac{e^\rho + \cos \varphi}{h_1(\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)}, & \sin \mu_1 &= \frac{y}{h_1} = \frac{\sin \varphi}{h_1(\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)}, \\ \cos \mu_2 &= \frac{1-x}{h_2} = \frac{e^{-\rho} + \cos \varphi}{h_2(\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)}, & \sin \mu_2 &= \frac{-y}{h_2} = \frac{-\sin \varphi}{h_2(\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)}, \\ \cos(\mu_1 + \mu_2) &= \frac{1 + \operatorname{ch} \rho \cos \varphi}{h_1 h_2 (\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)^2}, & \sin(\mu_1 + \mu_2) &= \frac{-\sin \varphi \operatorname{sh} \rho}{h_1 h_2 (\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Координатная линия $\varphi = \operatorname{const}$, проходящая через точку P , есть дуга окружности, параметрическое уравнение которой $Z(\rho)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \frac{\operatorname{sh} \rho + i \sin \varphi}{\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi}, \quad -\infty < \rho < \infty; \\ Z'_\rho(\rho) &= \frac{(1 + \operatorname{ch} \rho \cos \varphi) - i \sin \varphi \operatorname{sh} \rho}{(\operatorname{ch} \rho + \cos \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Производная задаёт направление θ касательной к линии $\varphi = \operatorname{const}$, проходящей через P . Сравнивая её с выражениями для $\mu_1 + \mu_2$, видим, что $\mu_1 + \mu_2 = \theta$.

Теперь (для случая возрастающей кривизны, $\sigma_0, \sigma_{1,2} > 0$) рассмотрим функцию $\xi(s) = \frac{1}{2}[\sigma_1(s) + \sigma_2(s) - \sigma_0]$, значения которой, если лемма верна, находятся внутри интервала $(-\pi, 0)$. Согласно (2),

$$\sigma_1(s) = \tilde{\alpha} + \tilde{\tau}(s) - 2\mu_1(s), \quad \sigma_2(s) = \tilde{\tau}(s) + \tilde{\beta} - 2\mu_2(s),$$

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \left[\frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\tau}(s)}{2} - \mu_1(s) \right] + \left[\frac{\tilde{\tau}(s) + \tilde{\beta}}{2} - \mu_2(s) \right] - \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}{2} \\ &= \tilde{\tau}(s) - [\mu_1(s) + \mu_2(s)]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\xi(s)$ есть угол между касательной к спирали и координатной линией $\varphi = \text{const}$. По следствию 6.1 в [1], внутри спирали он изменяется в интервале $(-\pi, 0)$. \square

Теорема 3. Точка спирали, в которой $\sigma_1(s) = \sigma_2(s)$, лежит на биссектрисе линзы.

Доказательство. Используя (2), перепишем $\varphi(s) = \mu_1(s) - \mu_2(s)$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{\tilde{\tau}(0) + \tilde{\tau}(s) - \sigma(0, s)}{2} - \frac{\tilde{\tau}(s) + \tilde{\tau}(S) - \sigma(s, S)}{2} \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} + \sigma_1(s) - \sigma_2(s)]. \end{aligned}$$

Таким образом, точка с $\sigma_1 = \sigma_2$ (в каком-то смысле – средняя точка спирали) имеет биполярную координату $\varphi(s) = (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})/2$. Соответствующая координатная линия есть биссектриса линзы. \square

Неравенству $|\sigma_1| + |\sigma_2| < |\sigma_0|$ аналогично следующее утверждение для инварианта δ .

Утверждение 4. Инверсные расстояния между кругами кривизны в трёх точках спирали подчиняются неравенству

$$\delta_1(s) + \delta_2(s) \leq \delta_0,$$

причём равенство возникает в том и только в том случае, когда три окружности – промежуточная $\mathcal{K}(s)$ и граничные, $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(S)$, – коаксиальны, т.е. принадлежат одному гиперболическому пучку.

Это неравенство доказано в [3, теорема 4.1] и названо Г. Коксетером “Nontriangle inequality” for nested circles. Nested circles означает

тройку действительно вложенных одна в другую окружностей $\odot\odot$, либо тройку $\odot\circ$, приводимую к вложенной конфигурации с помощью инверсии. Этим свойством обладает любая тройка кругов кривизны на спирали: если пару граничных кругов $\mathcal{K}(0)$ и $\mathcal{K}(S)$ инвертировать в пару concentрических окружностей, то промежуточная окружность $\mathcal{K}(s)$ расположится в кольце между ними ([1, следствие 1.2]). То, что Г. Коксетер рассматривает неориентированные окружности, не мешает распространить его доказательство на случай ориентированной спирали: величина δ , в отличие от Q , не зависит от ориентации окружностей.

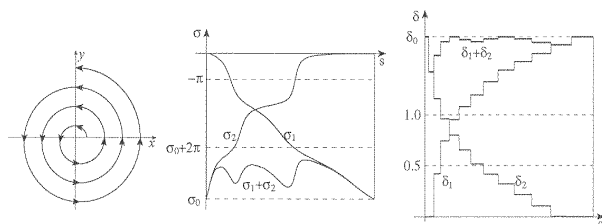


Рис. 4.

Равенство $\delta_1 + \delta_2 = \delta_0$ возникает на спирали показанной на рис. 4: её кривизна кусочно-постоянна, а дуги, попавшие в первый квадрант, concentричны; при инверсии они будут принадлежать к одному гиперболическому пучку.

Важную роль инвариантов δ и σ мы намерены проиллюстрировать, рассмотрев в дальнейшем несколько задач на построение спиралей с заданными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Курносенко, *Общие свойства плоских спиральных кривых*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 93–115.
2. А. И. Курносенко, *Короткие спирали*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **372** (2009), 34–43.
3. H. S. M. Coxeter, *The problem of Apollonius*. — Amer. Math. Monthly **75** (1968), 5–15.

Kurnosenko A. I. Long spirals.

We continue investigation of spiral curves by exploring the properties, related to the way of their winding. In particular, Vogt's theorem, concerning boundary angles of a spiral arc, is further extended.

Московский инж.-физ. институт,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Россия

Поступило 20 февраля 2007 г.

E-mail: alexey.kurnosenko@cern.ch