

А. И. Курносенко

КОРОТКИЕ СПИРАЛИ

Как в ранних, так и в недавних исследованиях спиральных кривых имеется ряд утверждений, касающихся ограниченных дуг спиралей, с двумя типами ограничений:

- дуга и её хорда образуют выпуклую фигуру [1–3] (таковы дуги 1, 2, 6, 7 на рис. 1, далее называемые выпуклыми);
- дуга однозначно проектируется на хорду [4] (дуги 1, 3, 6).

Дуги 4, 5 не охвачены этими утверждениями. Мы распространим их на расширенный класс *коротких спиралей*, представленных на рис. 1. Дуга рассматривается в системе координат хорды, в которой её граничные элементы кривизны равны

$$\mathcal{K}_1 = K(-c, 0, \alpha, k_1) \text{ и } \mathcal{K}_2 = K(c, 0, \beta, k_2). \quad (1)$$

Объединяющие свойства спиралей на рис. 1 описаны в следующих определениях.

Определение 1. *Спиральную кривую назовём короткой, если направление касательной $\tau(s)$ внутри спирали не достигает значения $\pm\pi$ – противоположного направлению хорды (это допускается на концах кривой).*

Определение 2. *Спиральную кривую назовём короткой, если она не имеет общих точек с дополнением хорды до бесконечной прямой.*

Из леммы 5 в [5] следует, что оба определения эквивалентны. Для короткой спирали длины S

$$-\pi < \tau(s) < \pi \text{ при } 0 < s < S. \quad (2)$$

Напомним неравенства [5, теорема 2 и следствие 2.1] для элементов кривизны (1):

$$Q = (k_1 c + \sin \alpha)(k_2 c - \sin \beta) + \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 0, \quad (3)$$

Ключевые слова : граничный элемент кривизны, линзы, бидуга.

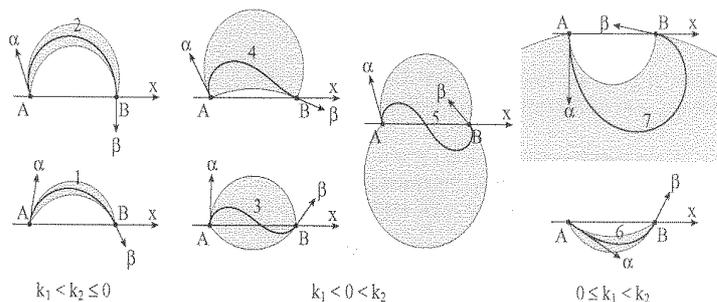


Рис. 1.

$$k_1 c \leq -\sin \alpha, \quad k_2 c \geq \sin \beta, \quad \text{если } k_1 \leq k_2. \quad (4)$$

Равенство $Q = 0$ возникает только если спираль является бидугой.

Дугу окружности, выходящую под углом φ из точки $A(-c, 0)$ и приходящую в точку $B(c, 0)$ обозначим $\mathcal{A}(\varphi)$. Дуга $\mathcal{A}(0)$ совпадает с хордой AB , а дуга $\mathcal{A}(\pm\pi)$, идущая из A в B через бесконечно удалённую точку, совпадает с дополнением хорды до бесконечной прямой. Дуга $\mathcal{A}(\varphi)$ есть линия $\varphi = \text{const}$ биполярной системы координат с полюсами в A и B [5].

Определение 3. Линза $\mathbf{L}(\gamma, \omega)$ есть область, покрываемая дугами

$$\mathcal{A}(\varphi), \quad \gamma - |\omega| < \varphi < \gamma + |\omega|.$$

Дуга $\mathcal{A}(\gamma)$ является биссектрисой линзы; ω – полуширина линзы.

Спирали с граничными углами α, β поставим в соответствие линзу $\mathbf{L}(\gamma, \omega)$, где

$$\omega = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Эта линза ограничена дугами $\mathcal{A}(\alpha)$ и $\mathcal{A}(-\beta)$ (рис. 1); первая дуга имеет с кривой AB общую касательную в точке A , вторая – в точке B . Равенство (5) свяжет знак ω с характером монотонности кривизны.

Теорема В. Фогта о граничных углах спиральной дуги – одна из наиболее известных и часто цитируемых теорем из статьи [1] (Satz 12): Пусть A и B – две последовательные точки пересечения кривой с монотонной кривизной и прямой g , α и β – углы между хордой AB и касательными лучами в точках A и B , лежащими с той

же стороны от g , что и дуга \widehat{AB} . Тогда угол α больше, меньше, или равен β , соответственно тому, возрастает ли кривизна от A до B , убывает ли, или остаётся постоянной. (Речь идёт об углах $|\alpha|$ и $|\beta|$, кривизна тоже считается положительной.)

На рис. 2 мы сделали это утверждение почти очевидным, составив для наглядности кривые ATB_1 и ATB_2 из двух круговых дуг с разрывом кривизны в точке T . В. Фогт, однако, оговаривал непрерывность кривизны. Другое его ограничение – требование выпуклости кривой – в иллюстрации соблюдено. Однако и оно не является существенным. Если от абсолютных значений углов и кривизн перейти к алгебраическим величинам (в данном примере $|\alpha| = -\alpha$, $|\beta_i| = \beta_i$, кривизны k_A и k_B положительны), то утверждения

$$\begin{aligned} ATB_1 : k_A < k_B &\implies \beta_1 > -\alpha, \\ ATB_0 : k_A = k_B &\implies \beta_0 = -\alpha, \\ ATB_2 : k_A > k_B &\implies \beta_2 < -\alpha \end{aligned}$$

и их аналоги для кривых, симметричных относительно g , впишутся в универсальную формулировку

$$\text{sign}(\alpha + \beta) = \text{sign}(k_B - k_A). \quad (5)$$

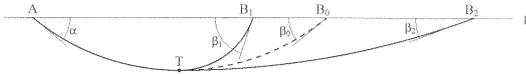


Рис. 2.

Кривые 3–5 на рис. 1 иллюстрируют модифицированную теорему для невыпуклых дуг: как и у выпуклых, сумма $\alpha + \beta$ положительна. Кривизна у всех спиралей возрастает. Симметрия относительно хорды даст примеры с убывающей кривизной.

Многочисленные доказательства оригинального утверждения в виде $|\alpha| \lesseqgtr |\beta|$ [2, 6, 7] не расширили класс охватываемых теоремой кривых. Простейшим выглядит одно из трёх доказательств в [2]):

для возрастающей кривизны (кривая ATB_1)

$$\begin{aligned} \cos \tau(0) - \cos \tau(l) &= \int_{\tau(0)}^{\tau(l)} \sin \tau \, d\tau = \int_0^l y'(s)k(s) \, ds \\ &= y(s)k(s) \Big|_0^l - \int_0^l y(s)k'(s) \, ds = - \int_0^l y(s) \, dk(s) > 0, \end{aligned}$$

откуда и следует $|\tau(0)| < |\tau(l)|$. Заметим, что выпуклость кривой используется здесь лишь в той мере, что её ордината $y(s)$ имеет постоянный знак. Поэтому доказательство применимо и к *невыпуклой* спирали 4 на рис. 1. Следующее доказательство охватывает все короткие спирали.

Теорема 1. *Граничные углы α и β короткой спирали в системе координат хорды удовлетворяют неравенствам:*

$$\text{если } k_1 < k_2 : \alpha + \beta > 0, \quad -\pi < \alpha \leq \pi, \quad -\pi < \beta \leq \pi; \quad (6)$$

$$\text{если } k_1 > k_2 : \alpha + \beta < 0, \quad -\pi \leq \alpha < \pi, \quad -\pi \leq \beta < \pi.$$

Неравенства (6) по сравнению с (5) лишь уточняют тот факт, что для убывающей кривизны непрерывность функции $\tau(s)$ требует присвоить значение $-\pi$ граничным углам, по модулю достигающим π .

Доказательство. Пусть кривизна $k(s)$ возрастает. Заменяем s новым параметром ξ ,

$$\xi(s) = \int_0^s \cos \frac{\tau(s)}{2} \, ds, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1 = \xi(S).$$

Строгое возрастание $\xi(s)$ обеспечивается неравенством (2). Определим функцию $t(\xi)$:

$$t(\xi) = \sin \frac{\tau(s(\xi))}{2},$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{d\xi} = \left[\frac{1}{2} \cos \frac{\tau(s)}{2} \frac{d\tau}{ds} \right] \cdot \left[\cos \frac{\tau(s)}{2} \right]^{-1} = \frac{1}{2} k(s(\xi)).$$

Поскольку $k(\xi)$ возрастает, $t(\xi)$ выпукла вниз и её график расположен ниже прямой $l(\xi)$, соединяющей концевые точки $t(0) = \sin(\alpha/2)$ и $t(\xi_1) = \sin(\beta/2)$ графика $t(\xi)$, то

$$t(\xi) < l(\xi) = \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\xi}{\xi_1} \sin \frac{\beta}{2}, \quad 0 < \xi < \xi_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 = y(S) - y(0) &= \int_0^S \sin \tau(s) ds = 2 \int_0^S \sin \frac{\tau(s)}{2} \underbrace{\cos \frac{\tau(s)}{2}}_{d\xi} ds \\ &= 2 \int_0^{\xi_1} t(\xi) d\xi < 2 \int_0^{\xi_1} l(\xi) d\xi \\ &= \frac{\xi_1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right) = \xi_1 \sin \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\alpha - \beta}{4}, \end{aligned}$$

т.е. $0 < \alpha + \beta \leq 2\pi$. Это исключает значения $-\pi$ для α или β . Тем самым неравенства (6) для случая возрастающей кривизны доказаны.

Если кривизна убывает, $k_2 < k_1$, рассмотрим дугу, симметричную исходной относительно оси абсцисс. Её кривизна возрастает ($k_1^* = -k_1 < -k_2 = k_2^*$), а граничные углы равны $\alpha^* = -\alpha$, $\beta^* = -\beta$. Следовательно, $\alpha^* + \beta^* > 0$, т.е. $\alpha + \beta < 0$ для исходной дуги. \square

Если исходить из определения 1, то приведённое доказательство самодостаточно в том смысле, что оно не привлекает других свойств спиралей, например, полученных в [5]. В рамках определения 2 простое доказательство следует из монотонности биполярной координаты $\varphi(s)$ ([5, следствия 6.1 и 6.3]). Так, в случае возрастающей кривизны функция $\varphi(s)$ монотонно убывает от $\varphi(0) = \alpha$ до $\varphi(S) = -\beta$: $\alpha > -\beta$, $\alpha + \beta > 0$.

Для кривой, которая однозначно проектируется на хорду $|\tau(s)| < \pi/2$, условия $\alpha + \beta \leq 0$ можно записать как $\sin \alpha + \sin \beta \leq 0$. Неравенства (4) принимают вид

$$k_1 c \leq -\sin \alpha \leq \sin \beta \leq k_2 c.$$

Рисунок 1 иллюстрирует также расположение короткой спирали внутри линзы. Частные случаи ранее получены в [3, теорема 5] и [4, теорема 3].

Теорема 2. *Короткая спираль расположена внутри линзы. За исключением начальной и конечной точек она не имеет других общих точек с границей линзы.*

Доказательство также следует из монотонности функции $\varphi(s)$ (рис. 3). Второе утверждение – следствие её *строгой* монотонности. Так, в начальной точке $\varphi(0) = \alpha$, и спираль сразу отклоняется от границы, дуги $\mathcal{A}(\alpha)$, внутрь линзы. Пересечение хорды происходит, если в интервал изменения $\varphi(s)$ от α до $-\beta$ попадает нуль: $\alpha \leq 0 \leq -\beta$.

Следствие 2.1. *Короткая спираль может пересекать хорду не более чем в одной точке. Пересечение имеет место тогда и только тогда, когда углы α, β одного знака и не равны нулю.*

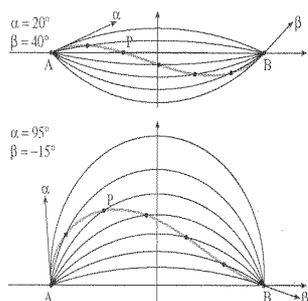


Рис. 3

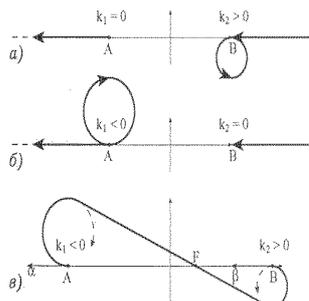


Рис. 4.

Как обращение теоремы Фогта в [2] рассматриваются условия существования выпуклой спиральной дуги с заданными параметрами на концах. Если заданы только линейные элементы, то теорема Фогта даёт необходимое и достаточное условия. Такова же ситуация с расширенным классом коротких спиралей: необходимое и достаточное условия существования короткой спирали даёт обобщённая теорема 5. Для доказательства линейные элементы можно дополнить кривизнами k_1, k_2 так, чтобы неравенство (6) выполнялось в строгой форме при $Q < 0$, и использовать следующую теорему.

Теорема 3. *Необходимые и достаточные условия существования короткой спирали с заданными элементами кривизны (1) на концах имеют вид:*

$$\begin{aligned} \text{sign}(\alpha + \beta) &= \text{sign}(k_B - k_A), \quad Q = 0, \quad |\alpha + \beta| \neq 2\pi \text{ — для бидуги;} \\ \text{sign}(\alpha + \beta) &= \text{sign}(k_B - k_A), \quad Q < 0 \text{ — для других спиралей.} \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим случай возрастающей кривизны: $2\omega = \alpha + \beta > 0$. Необходимость условий доказана (3), (5). Следует лишь уточнить, что при $\omega = \pi$, т.е. $\alpha = \beta = \pi$, спираль-бидуга не существует: условие $Q = 0$ для бидуги принимает вид $k_1 k_2 = 0$ и допускает только конфигурации, показанные на рис. 4 (а, б). Одна дуга вынуждена совершить полный оборот, сопряжение происходит через бесконечно удалённую точку. Эти построения мы исключили из определения спирали [5].

Для доказательства достаточности построим гладкую кривую из трёх дуг, первая и третья из которых совпадает с элементами кривизны (1). При $\omega = \alpha = \beta = \pi$ условие $Q = k_1 k_2 c^2 < 0$ означает, что $k_1 < 0 < k_2$; существует сопрягающая дуга нулевой кривизны, проходящая через центр подобия F граничных кругов кривизны (рис. 4, в).

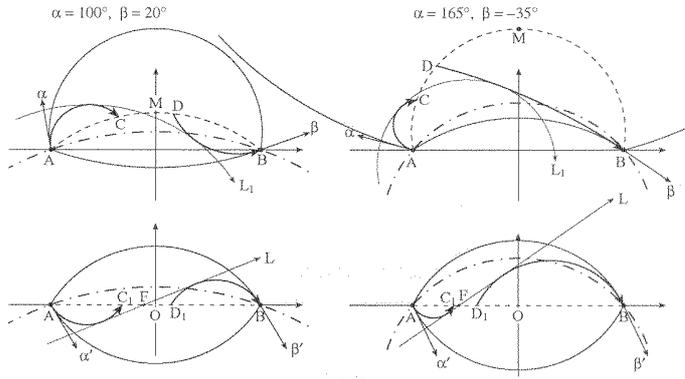


Рис. 5.

Далее полагаем $c = \frac{1}{2}AB = 1$, $\omega < \pi$, $\sin \omega > 0$. Граничные элементы кривизны показаны на рис. 5 как AC и DB (на левом фрагменте $k_1 < 0 < k_2$, на правом $-k_1 < k_2 < 0$). Применим инверсию относительно окружности

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{A}(\gamma_0) = K(-1, 0, \gamma_0, \kappa_0), \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha - \beta}{4}, \quad \kappa_0 = -\sin \gamma_0,$$

показанной штрих-пунктиром. Такая инверсия делает линзу симметричной, так как её биссектриса $AMB = \mathcal{A}(\gamma)$ становится хордой

$AOB = \mathcal{A}(0)$. Граничные углы α' , β' инвертированной кривой равны

$$\alpha' = \beta' = \omega' = -\omega.$$

Граничные кривизны κ'_1 , κ'_2 вычислим по формуле $k'_1 = 2k_0(1 - 2Q_{01}) - \kappa_1$ из [8], выражающей кривизну образа k'_1 через кривизны окружности-оригинала (k_1), окружности инверсии (k_0) и их инверсный инвариант $Q_{01} = Q(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1)$. Здесь величина $1 - 2Q$ есть просто косинус угла пересечения окружностей:

$$\begin{aligned} Q_{01} &= Q(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1), \quad 1 - 2Q_{01} = \cos(\alpha - \gamma_0), \\ \kappa'_1 &= 2\kappa_0(1 - 2Q_{01}) - \kappa_1 = -2 \sin \gamma_0 \cos(\alpha - \gamma_0) - \kappa_1 \\ &= -\kappa_1 - \sin \alpha + \sin \omega > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{02} &= Q(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_2), \quad 1 - 2Q_{02} = \cos(\gamma_0 + \beta), \\ \kappa'_2 &= 2\kappa_0(1 - 2Q_{02}) - \kappa_2 = -2 \sin \gamma_0 \cos(\gamma_0 + \beta) - \kappa_2 \\ &= -\kappa_2 + \sin \beta - \sin \omega < 0. \end{aligned}$$

Знаки выражений определены из неравенств (4), являющихся следствием неравенства $Q \leq 0$. Граничные условия, соответствовавшие возрастающей кривизне, после симметризации линзы соответствуют спирали с убывающей кривизной, принимающей на концах противоположные по знаку значения: $\kappa'_1 > 0 > \kappa'_2$. Инвертированные элементы кривизны показаны как AC_1 и D_1B . Определим координаты точек пересечения $C_1 = (x_1, 0)$ и $D_1 = (x_2, 0)$ кругов кривизны с осью абсцисс из уравнений окружностей:

$$AC_1 : \kappa'_1[(x+1)^2 + y^2] - 2(x+1) \sin \alpha' - 2y \cos \alpha' = 0,$$

$$x_1 = -\frac{\kappa'_1 + 2 \sin \alpha'}{\kappa'_1} = \frac{\sin \omega + \kappa_1 + \sin \alpha}{\sin \omega - \kappa_1 - \sin \alpha};$$

$$D_1B : \kappa'_1[(x-1)^2 + y^2] + 2(x-1) \sin \beta' - 2y \cos \beta' = 0,$$

$$x_2 = \frac{\kappa'_1 - 2 \sin \beta'}{\kappa'_1} = \frac{\kappa_2 - \sin \beta - \sin \omega}{\sin \omega + \kappa_2 - \sin \beta}.$$

Легко видеть, что $-1 < x_1 \leq x_2 < 1$; при этом внешние неравенства эквивалентны условию $\sin \omega > 0$, а внутреннее – условию $Q \leq 0$.

$Q = 0$ влечёт $x_1 = x_2$ ($C_1 = D_1$, $C = D$), и тогда два данных элемента кривизны образуют бидугу – единственное решение задачи. В случае $Q < 0$ и $x_1 < x_2$ становится очевидным существование прямой $L = K(x_0, 0, \lambda, 0)$, проходящей через центр подобия F сегментов AC_1 и D_1B и гладко сопрягающей две данные окружности. Обратная инверсия даёт искомое решение – промежуточную дугу L_1 , образ прямой L .

Убедимся, что центр инверсии $(0, y_0) = (0, -\text{ctg} \gamma_0)$ не находится внутри линзы $-y_0^2 \geq \text{tg}^2 \frac{\omega}{2}$, где $\pm \text{tg} \frac{\omega}{2}$ – границы линзы по оси ординат:

$$\text{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} - \text{tg}^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} \geq 0.$$

Следовательно, внутренние точки линзы инвертируются во внутренние точки её образа, пересечений кривой с дополнением хорды не возникнет, спираль останется короткой. \square

В одной из следующих статей мы намерены показать, что любые допустимые граничные условия для отличных от бидуги спиралей ($Q < 0$) реализуются на кривой, получаемой инверсией логарифмической спирали.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Vogt, *Über monotongekrümmte Kurven*. — J. reine angew. Math. **144** (1914), 239–248.
2. A. Ostrowski, *Über die Verbindbarkeit von Linien- und Krümmungselementen durch monoton gekrümmte Kurvebögen*. — Enseign. Math., II. Ser., **2** (1956), 277–292.
3. D. S. Meek, D. J. Walton, *Approximating smooth planar curves by arc splines*. — J. Comp. Appl. Math. **59** (1995), 221–231.
4. А. И. Курносенко, *Интерполяционные свойства плоских спиральных кривых*. — Фунд. прикл. мат. **7** (2001), 441–463.
5. А. И. Курносенко, *Общие свойства плоских спиральных кривых*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 93–115.
6. S. Katsuura, *Ein neuer Beweis des Vogtschen Satzes*. — Tohoku Math. J. **47** (1940), 94–95.
7. K. Hirano, *Simple proofs of Vogt's theorem*. — Tohoku Math. J. **47** (1940), 126–128.
8. А. И. Курносенко, *Инверсный инвариант пары окружностей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 167–186.

Kurnosenko A. I. Short spirals.

Some previous results for planar curves with monotone curvature (spirals), limited in length by one way or another, are extended by removing requirements of convexity of the arc, its one-to-one projectability onto the chord, and curvature continuity. A more general class of short spiral arcs is thus introduced. Statements include Vogt's theorem, concerning boundary angles of a convex spiral arc, the necessary and sufficient conditions for its existence, positional inequalities for such arcs.

Московский инж.-физ. институт,
Каширское шоссе 31, 115409 Москва, Россия
E-mail: alexey.kurnosenko@cern.ch

Поступило 20 декабря 2006 г.