

М. Г. Князева

НОВЫЙ ПРИМЕР ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ВИРТУАЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье построены новый пример гиперболического виртуального многогранника с четырьмя рогами и его гладкий аналог – гиперболический ёж.

Теория гиперболических виртуальных многогранников выросла из исследований истинности так называемой “гипотезы А. Д. Александрова” (см. гипотезу 1.3). История ее такова. В статье [1] А. Д. Александров сформулировал и доказал следующую теорему.

Теорема 1.1 [1]. *Пусть функция z определена на всем пространстве \mathbb{R}^3 , аналитическая и положительно однородная первой степени. Пусть ее второй дифференциал ни в одной точке не имеет определенного знака. Тогда z – линейная функция.*

Эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.2 [1]. *Пусть H_1 и H_2 – выпуклые тела с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы Дюпена для H_1 и H_2 ни в одной паре точек с параллельными нормальными не помещаются (строго) одна в другую при совмещении этих точек параллельным переносом, то тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.*

С течением времени стала популярной следующая гипотеза о справедливости обобщения теоремы 1.2 на неаналитический случай.

Гипотеза 1.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – гладкое выпуклое тело. Если для некоторой константы C в каждой точке границы ∂K имеем $k_1 \leq C \leq k_2$, то K – шар. (Здесь k_1 и k_2 – главные кривизны границы ∂K .)*

Долгое время гипотеза 1.3 считалась справедливой, но безнадежной для доказательства. Однако в 2001 году она неожиданно получила опровержение: французский математик Ив Мартине-Мор нашел к ней контрпример.

Ключевые слова : гипотеза Александрова, гиперболический ёж, рог.

Контрпримеры к гипотезе 1.3 тесно связаны с так называемыми *гиперболическими ежами* (*hyperbolic hérissons*), см. [2]: разность Минковского контрпримера и шара радиуса $1/C$ (см. гипотезу 1.3) представляет собой гиперболический ёж. И наоборот, сумма Минковского гиперболического ежа и шара достаточно большого радиуса дает контрпример к гипотезе 1.3.

Гиперболический ёж, предложенный Мартине-Мором [2] (см. рис. 1), — это поверхность, строго седловая и гладкая всюду, кроме четырех точек, которые называются “рогами”. Заслуга Мартине-Мора состоит в том, что ему удалось угадать пространственную форму поверхности, дающей контрпример к гипотезе 1.3, после чего он нашел явную формулу, задающую такую поверхность.

Дискретный аналог этой поверхности был построен им же в статье [3]. Это так называемый *гиперболический виртуальный многогранник*.

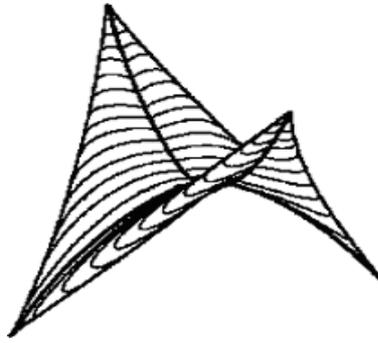


Рис. 1. Ёж Мартине-Мора.

Виртуальные многогранники представляют собой геометрические реализации разностей Минковского выпуклых многогранников (см. [4]). *Гиперболическими* называются те виртуальные многогранники, у которых график опорной функции — седловая поверхность (см. [5]). Далее для краткости гиперболические виртуальные многогранники будем называть просто *гиперболическими многогранниками*.

Гиперболический многогранник при некоторых условиях можно сгладить с сохранением свойства гиперболичности, получив гипербо-

лический ёж (см. [6]). Поэтому каждый сглаживаемый гиперболический многогранник порождает контрпример к гипотезе 1.3: сначала его нужно сгладить, а затем сложить по Минковскому с шаром большого радиуса.

Гиперболические многогранники (как и гиперболические ежи) можно разбить на классы по числу рогов. Однако есть и более тонкая классификация: каждому гиперболическому многограннику (и гиперболическому ежу) соответствует некоторая конфигурация непесекающихся больших полукругов на единичной сфере. Каждый рог многогранника дает полукруг конфигурации (см. [7]).

На сфере существуют две неизотопные конфигурации четырех больших полукругов: I и II (см. рис. 9 и [7]).¹ Первой из них соответствует ёж Мартине-Мора. До сих пор был неизвестен гиперболический ёж, соответствующий второй конфигурации. Он построен в данной статье.

До недавнего времени наибольшую сложность в предъявлении новых контрпримеров составляло нахождение новых гиперболических многогранников, так как эти объекты очень “неустойчивы”: малейшее шевеление вершин уничтожает важные свойства объекта. Положение осложнялось тем, что не существовало способа построения таких объектов. Ситуация изменилась с появлением работ Г. Ю. Паниной. Она разработала технику построения гиперболических виртуальных многогранников с любым числом рогов, не меньшим четырех (см. [6]).

В [7] доказано, что существует гиперболический многогранник с четырьмя рогами, порождающий конфигурацию II. Однако построение такого объекта описано на двойственном языке. А именно, построен график его опорной функции. Поэтому внешний вид соответствующего гиперболического многогранника, как кусочно-линейной поверхности в \mathbb{R}^3 , оставался неизвестным. В данной статье построен гиперболический многогранник с четырьмя рогами, порождающий конфигурацию II. Наш подход отличается от подхода, использованного в работе [7].

План построения нового гиперболического многогранника (и гиперболического ежа) включает следующие шаги.

¹Под изотопией конфигураций здесь и далее понимается *жесткая* изотопия (т.е. изотопия в классе конфигураций непесекающихся больших полукругов).

- (1) Сначала (в §3) мы строим кусочно-линейную поверхность и ассоциированный с ней сферический веер. Согласно теореме 2.4 эта пара задает некоторый виртуальный многогранник N_2 .
- (2) Веер Σ_2 виртуального многогранника N_2 является невыпуклым, а следовательно (по лемме 2.9) виртуальный многогранник N_2 является гиперболическим.
- (3) Затем (§4) мы преобразуем N_2 с помощью *H-операций* (см. [5]) и получаем сглаживаемый гиперболический многогранник N_3 .
- (4) Наконец, мы применяем к N_3 операцию сглаживания (см. [6]) и получаем пример гиперболического ежа \tilde{N} с четырьмя рогами, порождающего конфигурацию II.

Неизотопность конфигураций I и II обуславливает неизотопность двух гиперболических ежей: ежа Мартине-Мора и нового ежа, построенного в настоящей статье.

2. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Определение 2.1. *Выпуклым многогранником в \mathbb{R}^3 называется выпуклая оболочка конечного множества точек.*

Таким образом, точка также считается выпуклым многогранником.

Множество \mathcal{P} всех выпуклых многогранников с операцией сложения по Минковскому образует полугруппу с единичным элементом (его роль играет одноточечный многогранник – начало координат O).

Определение 2.2 [5]. *Группой виртуальных многогранников \mathcal{P}^* называется группа Гротендика полугруппы выпуклых многогранников \mathcal{P} , т.е. группа формальных выражений вида $K \otimes L^{-1}$, где K, L – выпуклые многогранники, а \otimes – сложение по Минковскому.*

Определение 2.3 [5]. *Опорной функцией выпуклого многогранника K называется функция $h_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая формулой*

$$h_K(\mathbf{x}) = \max_{y \in K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где (\mathbf{x}, \mathbf{y}) – скалярное произведение.

Известно, что опорная функция выпуклого многогранника является непрерывной, выпуклой и кусочно-линейной.

Соответствие “ $K \mapsto h_K$ ” распространяется по линейности на всю группу виртуальных многогранников. Поэтому для виртуальных многогранников корректно определено понятие опорной функции. Следует отметить, что для них свойство выпуклости опорной функции пропадает: это непрерывная функция, кусочно-линейная относительно некоторого разбиения пространства на конусы. Это разбиение называется *веером* виртуального многогранника. Удобно рассматривать пересечение веера с единичной сферой с центром в начале координат – это *сферический веер*. Далее под веером виртуального многогранника мы будем понимать именно сферический веер.

Как и в случае выпуклых многогранников, виртуальный многогранник и его веер комбинаторно двойственны: вершинам многогранника соответствуют двумерные области веера (двумерные клетки, будем называть их просто *клетками*), ребрам многогранника – ребра веера, граням многогранника – вершины веера.

Следующая теорема дает возможность задать виртуальный многогранник парой объектов – поверхностью и двойственным веером.

Теорема 2.4 [5]. Пусть C – замкнутая кусочно-линейная поверхность² в \mathbb{R}^3 (возможно, невыпуклая, с самопересечениями и самоналожениями). Предположим, что существует набор единичных нормалей ξ_i граней T_i поверхности C и сферический веер Σ с вершинами в точках ξ_i такой, что выполнены два условия:

1. Веер Σ комбинаторно двойственен поверхности C . В частности это означает, что точки ξ_i и ξ_j соединены ребром Σ тогда и только тогда, когда T_i и T_j имеют общее ребро в C .
2. (Дополнительное условие для случая, когда на поверхности имеются параллельные соседние грани.) Если две соседние грани T_i и T_j параллельны (и, следовательно, их нормали противоположны), то точки ξ_i и ξ_j соединены ребром (или ребрами) веера Σ , которое ортогонально общему ребру (соответственно, общим ребрам, если таковых несколько) граней T_i и T_j .

В таком случае паре (C, Σ) можно канонически поставить в соответствие виртуальный многогранник K . При этом Σ служит его веером.

²Задаваемая кусочно-линейным отображением абстрактной триангулированной поверхности в \mathbb{R}^3 .

Определение 2.5. Пусть F – поверхность в \mathbb{R}^3 , $x \in F$. Точка x называется седловой, если любая плоскость, проходящая через x , локально пересекает F более, чем в одной точке. Поверхность называется седловой, если все ее точки являются седловыми.

Определение 2.6. Неседловые точки замкнутой поверхности будем называть ее рогами.

Пусть K – виртуальный многогранник, h – его опорная функция. Рассмотрим плоскость e в \mathbb{R}^3 и сужение на нее функции h . Обозначим через $\Gamma_e(h)$ график этого сужения. Это некоторая поверхность в трехмерном пространстве. Известно, что K – выпуклый многогранник (т.е. $K \in \mathcal{P}$) тогда и только тогда, когда функция h – выпуклая, т.е. поверхность $\Gamma_e(h)$ выпукла вниз для любой плоскости e .

Определение 2.7 [5]. Виртуальный многогранник K называется гиперболическим, если поверхность $\Gamma_e(h)$ – седловая для любой плоскости e .

Пример 2.8. Примером гиперболического многогранника является гиперболический тетраэдр. Он задается парой, состоящей из поверхности выпуклого тетраэдра с внешними ориентациями граней и векера, показанного на рис. 3 (см. теорему 2.4).

Этот виртуальный многогранник гиперболичесен в силу следующей леммы.

Лемма 2.9 [6].

- (1) Пусть сферический веер виртуального многогранника K таков, что для каждой его вершины один из прилегающих углов больше π . (Такие вееры будем называть невыпуклыми.) Тогда K – гиперболический многогранник.
- (2) Симплициальные гиперболические многогранники имеют невыпуклые вееры.

Веер симплициального гиперболического многогранника допускает так называемую правильную раскраску (см. [5]): каждое ребро веера можно окрасить в один из двух цветов (черный или серый) так, что для трех ребер, исходящих из одной вершины, среднее ребро будет одного цвета, а два крайних – другого (см., например, рис. 6). Правильная раскраска веера гиперболического многогранника кодирует свойства выпуклости: черный (соответственно, серый) цвет ре-

бра веера означает, что график опорной функции вдоль этого ребра выпуклый вверх (соответственно, выпуклый вниз).

Теорема 2.10 [8]. Пусть K – гиперболический виртуальный многогранник, заданный замкнутой кусочно-линейной поверхностью. Пусть вершина H – его рог, Σ_K – его веер и α – клетка веера Σ_K , соответствующая H . Тогда

- α – сферический многоугольник, у которого имеется ровно два угла, меньших π ;
- α ограничена двумя ломаными линиями, обращенными выпуклостями внутрь клетки;
- α содержит большой полукруг (см. рис. 2).

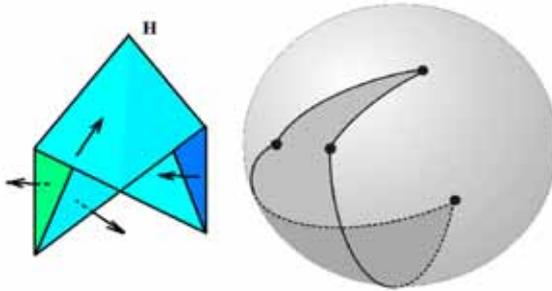


Рис. 2. Часть многогранной поверхности с рогом и соответствующая клетка веера.

Пусть дан гиперболический многогранник, у которого каждое ребро веера не превосходит π . Для каждого его рога в соответствующей клетке веера выберем большой полукруг, лежащий в этой клетке (это возможно по теореме 2.10). В результате получаем некоторую конфигурацию больших непересекающихся полукругов на сфере. Эти конфигурации служат для классификации таких гиперболических многогранников.

Ежи определены в [8] как геометрические реализации разностей Минковского гладких выпуклых тел. Как и для виртуальных многогранников, для ежа определена опорная функция.

Определение 2.11 [5]. *Гладким ежом* называется ёж с гладкой опорной функцией.

Определение 2.12 [5]. *Ёж называется гиперболическим, если график его опорной функции – седловая поверхность.*

3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК N_2

Построим задающие N_2 кусочно-линейную поверхность и ассоциированный с ней веер. Эти объекты будем строить параллельно, добиваясь нужных свойств.

За основу возьмем гиперболический тетраэдр N_1 (см. пример 2.8 и рис. 3), заданный поверхностью C_1 и веером Σ_1 .

Занумеруем грани (и их нормальные векторы), как показано на рис. 3.

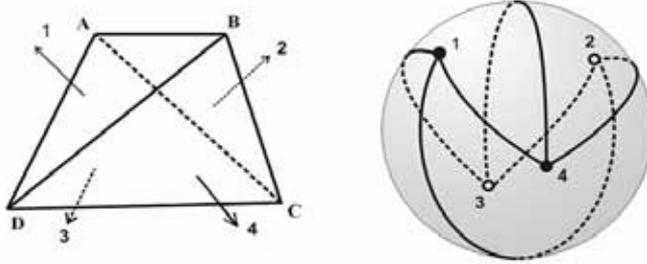


Рис. 3. Поверхность C_1 и соответствующий веер Σ_1 .

К ребрам AB и CD поверхности C_1 приклеим по четыре длинные узкие треугольные грани (см. рис. 4) так, чтобы все вершины полученной поверхности C_2 (кроме вершин R_1, R_2, R_3 и R_4) были седловыми. Вершины R_1, R_2, R_3 и R_4 – рога будущего гиперболического многогранника, их точное положение мы определим позже.

Каждый новый треугольник – дважды покрыт, т.е. образован двумя одинаковыми, но противоположно ориентированными гранями.

Ориентации граней выбираем согласно рис. 4.

Опишем структуру новой кусочно-линейной поверхности C_2 , указав, какие грани являются соседними.

Как и для поверхности C_1 , грани 1 и 3, 1 и 4, 2 и 3, 2 и 4 являются для поверхности C_2 попарно соседними, в то время как грани 1 и 2, 3 и 4 соседними не являются из-за появления новых граней.

Инцидентности в верхней части поверхности таковы:

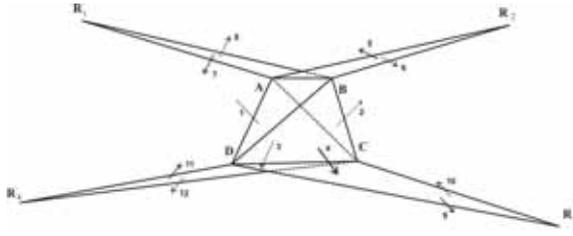


Рис. 4. Поверхность C_2 .

- грани 1 и 5 граничат по ребру AB ;
- грани 5 и 6 граничат по ребрам AR_2 и BR_2 ;
- грани 6 и 7 граничат по ребру AB ;
- грани 7 и 8 граничат по ребрам AR_1 и BR_1 ;
- грани 8 и 2 граничат по ребру AB .

Нижняя часть поверхности устроена аналогично:

- грани 4 и 9 граничат по ребру CD ;
- грани 9 и 10 граничат по ребрам CR_3 и DR_3 ;
- грани 10 и 11 граничат по ребру CD ;
- грани 11 и 12 граничат по ребрам CR_4 и DR_4 ;
- грани 12 и 3 граничат по ребру CD .

Для построения виртуального многогранника необходимо, чтобы полученная кусочно-линейная поверхность C_2 имела ассоциированный веер. Рассмотрим, как меняется веер при переходе от поверхности C_1 к поверхности C_2 .

Заметим, что у веера Σ_1 вершины 1–4 попарно соединены ребрами, так как соответствующие грани являются соседними на поверхности C_1 . Однако на поверхности C_2 некоторые пары этих граней перестают быть соседними (в результате вклейки новых граней). Поэтому у нового веера Σ_2 отрезков, соединяющих вершины 1 и 2, 3 и 4, уже нет. Кроме того, на веере Σ_2 появляются новые вершины 5–12, соответствующие новым граням поверхности C_2 .

Рассмотрим нижнюю часть поверхности C_2 и соответствующую ей верхнюю часть веера Σ_2 .

Так как грани 9, 10, 11, 12, 3 и 4 содержат ребро CD , то по комбинаторной двойственности вершины веера 9, 10, 11, 12, 3 и 4 лежат на бывшем ребре 3–4.

По комбинаторной двойственности имеем следующее:

вершины 4 и 9 соединены ребром;
 вершины 9 и 10 соединены двумя ребрами;
 вершины 10 и 11 соединены ребром;
 вершины 11 и 12 соединены двумя ребрами;
 Вершины 12 и 3 соединены ребром.

Верхняя часть поверхности C_2 и соответствующая ей нижняя часть веера Σ_2 имеют аналогичное строение.

Заметим, что вершины веера 5 и 6 (аналогично, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12) соединены двумя ребрами, так как на кусочно-линейной поверхности C_2 соответствующие грани имеют два общих ребра. Кроме того, пары этих точек диаметрально противоположны, поскольку соответствующие грани поверхности имеют противоположные нормали.

Полученный веер Σ_2 изображен на рис. 5. Узкие длинные клетки, выделенные темным цветом, соответствуют вершинам R_1, R_2, R_3, R_4 . Это *двуугольники*, стороны которых имеют длину π .

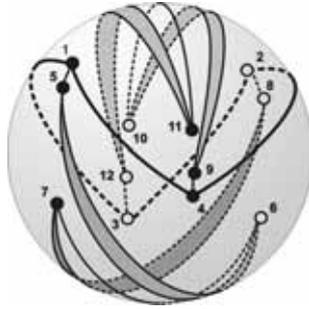


Рис. 5. Веер Σ_2 .

Задание точек R_1, R_2, R_3 и R_4 диктует расположение соответствующих двуугольников на веере Σ_2 . Поэтому, варьируя положение этих точек, можно сконструировать поверхность C_2 так, чтобы существовал ассоциированный с ней веер (т.е. чтобы граф на сфере с вершинами в концах нормалей не имел самопересечений).

Например, для того, чтобы двуугольники 9–10 и 11–12 на веере Σ_2 не “задевали” вершин 1 и 2 и выходящих из них ребер, нужно, чтобы прямые $(R_4C), (R_4D), (R_3C)$ и (R_3D) были близки к прямой (CD) . Чем ближе эти новые прямые к прямой (CD) , тем двуугольники 9–10 и 11–12 на веере ближе к бывшему ребру 3–4.

По теореме 2.4 построенная поверхность C_2 с веером Σ_2 задает некоторый виртуальный многогранник N_2 . Веер Σ_2 – невыпуклый, а следовательно (по лемме 2.9), виртуальный многогранник N_2 является гиперболическим.

Таким образом, построен гиперболический многогранник N_2 с четырьмя рогами. Соответствующая ему конфигурация больших полуэллипсов на сфере совпадает с конфигурацией Π (см. рис. 9) с точностью до изотопии. В этом легко убедиться проанализировав расположение двуугольников на веере Σ_2 (см. рис. 5).

4. ПЕРЕСТРОЙКА И СГЛАЖИВАНИЕ МНОГОГРАННИКА N_2

В [6] описана техника сглаживания, которая позволяет перейти от гиперболического многогранника к его гладкому аналогу – гиперболическому ежу: в результате применения этой техники получается ёж с гладкой опорной функцией. Однако эта техника применима лишь к виртуальным многогранникам, удовлетворяющим двум следующим условиям:

- (1) многогранник должен быть симплицальным (т.е. каждая вершина веера должна быть трехвалентной);
- (2) все ребра веера должны иметь длину, меньшую π .

Для гиперболического многогранника N_2 условие (1) выполнено, а условие (2) – нет: рёбра двуугольников имеют длину, равную π .

Применение так называемых *H-операций* (см. [5]) приводит к сглаживаемому гиперболическому многограннику N_3 .

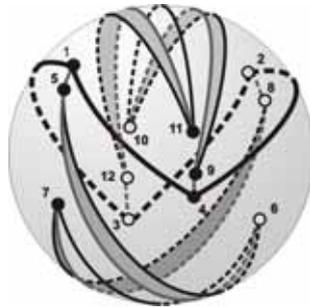


Рис. 6. Веер Σ_2 с правильной раскраской.

Кратко, суть H -операции состоит в следующем. Пусть симплициальный гиперболический многогранник K имеет веер Σ_K . Следовательно, Σ_K – невыпуклый и допускает правильную раскраску. Рассмотрим у веера Σ_K два каких-нибудь черных ребра. Предположим, что две внутренние точки этих ребер могут быть соединены геодезическим отрезком, не пересекающим других ребер веера (см. рис. 7). Тогда, “переламывая” определенным образом эти черные ребра, окрашивая новый отрезок в серый цвет и добавляя его к вееру Σ_K , получим новый веер Σ' .

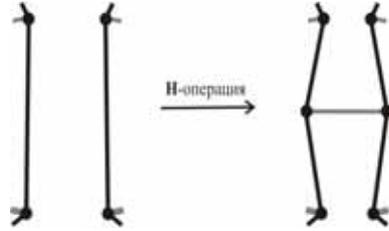


Рис. 7. H -операция.

(Аналогично, внутренние точки серых ребер соединяются черным отрезком.) При этом существует гиперболический многогранник M , для которого $\Sigma_M = \Sigma'$. Заметим, что число граней у M больше, чем у K . При этом H -операции не меняют число рогов и тип порожденной конфигурации больших полукругов (см. [5]).

Далее нам потребуется веер Σ_2 с правильной раскраской (см. рис. 6). Для удобства разобьем Σ_2 на две части и изобразим одну из них на плоскости (см. рис. 8; так как она помещается в полусфере, некоторые ребра веера изображены дугами). На рис. 8 изображено последовательное применение к этой части H -операций, укорачивающих ребра. Другая часть веера преобразуется аналогично.

После перестроек получаем веер Σ_3 . Ему соответствует некоторый симплициальный гиперболический многогранник N_3 . Заметим, что он удовлетворяет обоим условиям (1) и (2). Применяя к N_3 технику сглаживания, мы получим новый гиперболический ёж \tilde{N} с четырьмя рогами.

5. НОВЫЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ЁЖ \tilde{N} И ЁЖ МАРТИНЕ-МОРА

В конце §2 было описано построение конфигурации больших полукругов на сфере для гиперболического многогранника. Как отме-

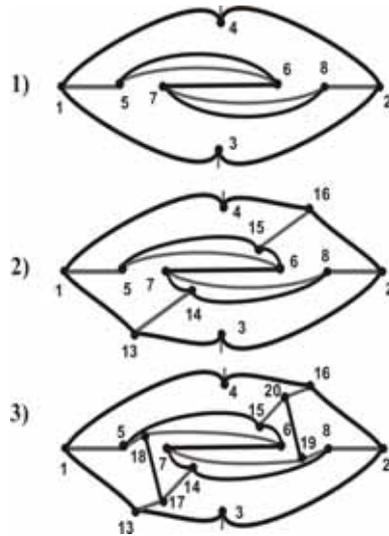


Рис. 8. Перестройка веера с помощью H -операций.

чено в конце §3, построенному гиперболическому многограннику N_3 с точностью до изотопии соответствует конфигурация II (см. рис. 9). Гиперболическому многограннику Мартине-Мора соответствует конфигурация I. В [7] показано, что конфигурации I и II неизотопны. Поэтому гиперболический многогранник N_3 существенно отличается от многогранника Мартине-Мора.

Теперь сравним построенный гиперболический ёж \tilde{N} и ёж Мартине-Мора.

Определение 5.1. Два гладких гиперболических ежа N и M с четырьмя рогами называются *изотопными*, если существует непрерывное семейство гладких гиперболических ежей с четырьмя рогами, связывающее N и M .

Покажем, что наш ёж \tilde{N} и ёж Мартине-Мора неизотопны.

В [7] показано, что каждый гиперболический ёж порождает некоторую конфигурацию непересекающихся больших полукругов на сфере. При этом каждый рог ежа дает полукруг конфигурации. Конфигурации I соответствует ёж, построенный Мартине-Мором. Конфигурации II соответствует ёж \tilde{N} . Поскольку изотопия гиперболических ежей влечет изотопию конфигураций больших полукругов, ёж

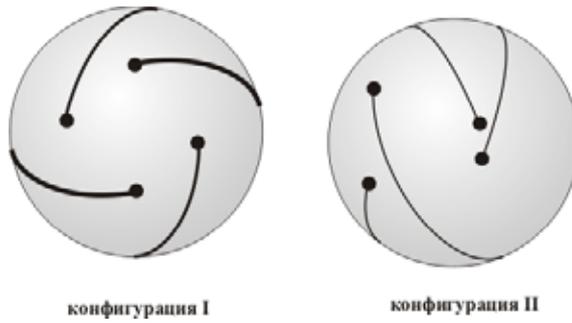


Рис. 9. Конфигурации больших полукругов на сфере: I и II.

\tilde{N} неизотопен ежу Мартине-Мора.

Автор статьи выражает благодарность Г. Ю. Паниной за постановку задачи и активное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров, *О теоремах единственности для замкнутых поверхностей*. — ДАН СССР **22**, No. 3 (1939), 99–102.
2. Y. Martinez-Maure, *Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère*. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. **332**, No. 1 (2001), 41–44.
3. Y. Martinez-Maure, *Théorie des hérissons et polytopes*. — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Math. **336**, No. 3 (2003), 241–244.
4. А. В. Пухликов, А. Г. Хованский, *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*. — Алгебра и Анализ, **4**, No. 2 (1992), 161–185.
5. G. Panina, *On hyperbolic virtual polytopes and hyperbolic fans*. — Central Europ. J. Math. **4**, No. 2 (2006), 270–293.
6. G. Panina, *New counterexamples to A. D. Alexandrov's hypothesis*. — Adv. Geometry **5**, No. 2 (2005), 301–317.
7. G. Panina, *Isotopy problems for saddle surfaces*. — Europ. J. Comb. (to appear). <http://www.esi.ac.at/preprints/ESI-Preprints.html>.
8. R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg, *Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss)*. — Banach Center Publ. **20** (1985), 245–253.
9. М. Князева, G. Panina, *An illustrated theory of hyperbolic polytopes*. — Cent. Eur. J. Math. **6** (2008), 204–217.
10. D. Koutroufiotis, *On a conjectured characterization of the sphere*. — Math. Ann. **205** (1973), 211–217.
11. H. F. Münzner, *Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie*. — Comment. Math. Helv. **41** (1966/1967), 88–104.

Кnyazeva M. G. A new example of hyperbolic virtual polytope.

A new example of hyperbolic virtual polytope with four horns is constructed. The corresponding smooth hyperbolic hedgehog is not isotopic to the familiar example by Y. Martinez-Maure since the two hedgehogs generate nonisotopic configurations of great semi-circles on the two-sphere. Certain extrinsic-geometric properties of the polytope are established.

С.-Петербургский институт
информатики и автоматизации РАН
14 линия В.О., д. 39, 199178 С.-Петербург, Россия
E-mail: marinakn@mail.ru

Поступило 18 апреля 2009 г.