

М. В. Зенкина, В. О. Мантуров

## ИНВАРИАНТ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В книге Л. Х. Кауфмана [3] был приведен подход к построению полинома Александра посредством формальной теории узлов. Стандартное копредставление Виртингера группы узла сопоставляет дугам образующие, а перекресткам – соотношения; копредставление Дена сопоставляет областям плоскости проекции образующие, а перекресткам – соотношения. Эти два копредставления фундаментальной группы приводят к двум вариантам определения полинома Александра. Приведенное в [3] комбинаторное определение, связанное с копредставлением Дена, было ключевым для описания простой связи между полиномом Александра и его категорификацией — гомологиями Ожвата–Сабо–Расмуссена, см. [8, 10].

Важным обобщением теории классических узлов является теория виртуальных узлов, изобретенная Кауфманом [4]. Виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных двумерных поверхностях, рассматриваемых с точностью до стабилизации/дестабилизации. На теорию виртуальных узлов были обобщены многие инварианты классических узлов, см., например, [6], в том числе гомологии Хованова [5], а также различные модификации полинома Александра, связанные с представлением Виртингера, см. [7]. В настоящей работе делается первый шаг к обобщению формальной теории узлов Кауфмана на виртуальные узлы – строится обобщение полинома Александра для узлов в утолщенном торе.

Отметим, что узлы в утолщенном торе стали привлекать внимание специалистов как “двойко-периодические узлы” или “текстильные структуры”, см. [1, 2].

---

*Ключевые слова* : полином Александра, соотношения типа Конвея, текстильные структуры.

Второй автор частично поддержан грантом РФФИ 07-01-00648.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Мы рассматриваем ориентированные зацепления  $L$  в утолщенном торе  $T^2 \times I$ . Каждое такое зацепление естественным образом задается своей проекцией на тор  $T^2$ , которая в общем положении представляет собой (ориентированный) четырехвалентный граф с проходами и переходами. При этом два графа задают изотопные зацепления тогда и только тогда, когда один из них получается из другого стандартными перестройками Рейдемейстера (см., например, [6]). Фиксируем на  $T^2$  стандартную ориентацию.

Назовем диаграмму зацепления на  $T^2$  *правильной*, если соответствующий граф (называемый *тенью* диаграммы) разбивает  $T^2$  на двумерные клеточки. Очевидно, что каждое зацепление имеет правильного представителя. Кроме того, для каждых двух правильных диаграмм  $D_1$  и  $D_2$ , представляющих одно и то же зацепление, найдется последовательность движений Рейдемейстера, переводящая  $D_1$  в  $D_2$ , для которой все промежуточные диаграммы являются правильными.

Далее мы предполагаем все диаграммы правильными без дополнительных оговорок.

Как легко видеть, правильная диаграмма с  $n$  перекрестками разбивает тор на  $n$  областей.

Выделим на торе параллель и меридиан. Без ограничения общности будем считать, что области (точнее, их границы) пересекают параллель и меридиан трансверсально по конечному числу сегментов. Таким образом, сегменты разбивают области на подобласти.

Построим *разметку* подобластей следующим образом. (Каждой подобласти мы сопоставим пару целых чисел.) В каждой области выберем произвольным образом одну подобласть и сопоставим ей пару  $(0, 0)$ . После этого будем действовать по следующему правилу. Если подобласти одной области граничат по меридиану, то они будут иметь одинаковый второй индекс, а первый индекс будет отличаться на 1, причем он будет больше у той подобласти, которая расположена справа. Аналогично, если две подобласти граничат по параллели, то они имеют одинаковый первый индекс, а второй индекс будет больше (на 1) у той подобласти, которая расположена выше.

Пример диаграммы и соответствующего разбиения на подобласти изображен на рис. 1.

На рис. 1 имеются две области, разделенные на подобласти: область  $A$  разбивается на 4 подобласти, а область  $B$  – на 2.

Построим матрицу  $M_L$  размера  $n \times n$  следующим образом. Ка-

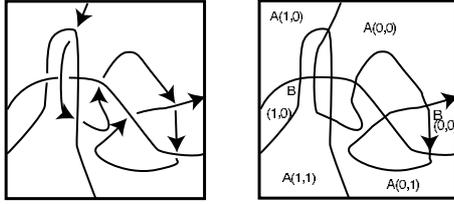


Рис. 1. Разметка областей.

ждому перекрестку мы сопоставим строку матрицы, а каждой области – столбец. Элемент  $M_{ij}$  выражает инцидентность  $i$ -го перекрестка и  $j$ -й области.

Если область инцидентна перекрестку с одной стороны, то правило построения инцидентности следующее. Пусть  $i$ -му перекрестку инцидентна подобласть  $j$ -й области, имеющая отметки  $(a, b)$ . Тогда элемент  $M_{ij}$  будет равен моному  $x^a y^b$ , умноженному на один из мономов  $1, t, -1, -t$ , определяемый следующим образом. В  $i$ -м перекрестке выберем дугу, образующую проход (проходящую снизу) и рассмотрим конец этой дуги. Сопоставим подобластям *локальные метки* согласно следующему правилу. Области, находящейся справа от конца ребра, образующего проход, мы сопоставим локальную метку  $+1$ , после чего трем остальным подобластям мы сопоставим локальные метки  $-1, t, -t$  в порядке по часовой стрелке. Отметим, что для задания локальных меток нам неважно, в каком направлении ориентирована дуга, проходящая через  $i$ -й перекресток и образующая в нем переход, см. рис. 2.

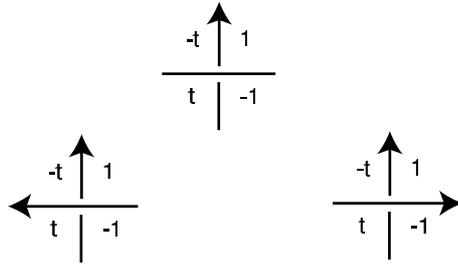


Рис. 2. Правило построения перекрестка.

Теперь элемент  $M_{ij}$  полагаем равным моному  $x^a y^b$ , умноженному на локальную метку (в случае, если лишь одна подобласть  $j$ -й области

инцидентна  $i$ -му перекрестку); если таких подобластей несколько, то соответствующий элемент матрицы будет равен сумме таких произведений мономов по всем инцидентным подобластям.

Мы получили матрицу  $M$ , зависящую от диаграммы  $L$ . Положим  $z(L) = \det(M)$ . Здесь  $z$  представляет собой полином Лорана от трех переменных  $t, x, y$  (в дальнейшем просто “полином”).

**Теорема 1.** *Полином  $z$  является инвариантом зацеплений с точностью до обратимых элементов кольца  $\mathbb{Z}[t, x, y]$ , т.е. если две диаграммы  $L$  и  $L'$  эквивалентны, то  $z(L) = \pm z(L') \cdot t^\alpha x^\beta y^\gamma$  для некоторых целых чисел  $\alpha, \beta, \gamma$ .*

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Заметим сначала, что изменение нумерации перекрестков и областей, а также выбор другой “начальной” подобласти в каждой области приводит к умножению определителя на  $\pm x^\alpha y^\beta$  для некоторых целых  $\alpha, \beta$ . Таким образом, мы можем нумеровать перекрестки и области и отмечать начальные подобласти произвольным образом.

Так как на торе выделены меридиан и параллель, то, помимо движений Рейдемейстера, нужно “проверить на инвариантность” также движения, при которых один из перекрестков проходит через меридиан (параллель). Для этого достаточно заметить, что при согласованной разметке подобластей строка, соответствующая перекрестку (а вместе с ней и определитель), умножается при таком движении на  $x^{\pm 1}$  (соотв.,  $y^{\pm 1}$ ), см. рис. 3.

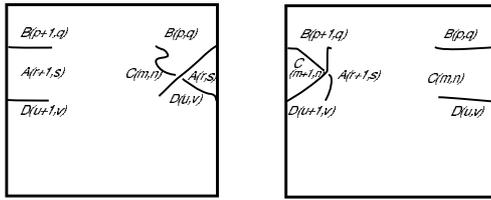


Рис. 3. Изменение разметки при проходе через перекресток.

(Как показывает рис. 3, все разметки подобластей, не инцидентных перекрестку, совпадают.)

Осталось рассмотреть движения Рейдемейстера. Как уже отмечалось, мы будем работать только с правильными диаграммами.

Как известно (см., напр., [9]), для установления эквивалентности двух диаграмм достаточно использовать лишь одну версию третьего движения Рейдемейстера, а также все версии первого и второго движений Рейдемейстера.

Инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера практически очевидна. Действительно пусть диаграмма  $L'$  получается из диаграммы  $L$  добавлением завитка, см. рис. 4.

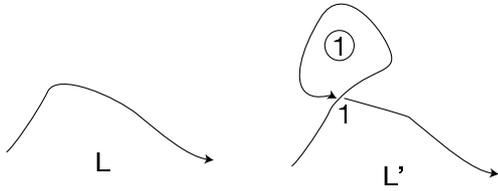


Рис. 4. Первое движение Рейдемейстера.

Перенумеруем перекрестки диаграммы  $L'$  следующим образом: в качестве первого перекрестка возьмем перекресток, получаемый добавлением завитка, а перекрестку с номером  $k$  диаграммы  $L$  присвоим номер  $k+1$  на диаграмме  $L'$ . Аналогично поступим с областями: новая область, инцидентная лишь перекрестку с номером 1, получит номер 1, а область диаграммы  $L$  с номером  $k$  получит на диаграмме  $L'$  номер  $k+1$ . После этого матрица  $M_{L'}$  приобретает “блочно-верхнедиагональный” вид: один ее диагональный блок – единичный (на месте (1,1) стоит либо  $\pm 1$ , либо  $\pm t$ ), а другой – совпадает с матрицей  $M_L$ . Тем самым определители этих матриц равны с точностью до смены знака и умножения на  $t$ .

Имеется четыре типа вторых движений Рейдемейстера — два “сонаправленных” и два “противонаправленных”.

Отметим, что все элементы соответствующих матриц зависят только от ориентации дуг, образующих проходы, и не зависят от ориентации дуг, образующих переходы.

Рассмотрим сначала “сонаправленное” движение Рейдемейстера. Пусть диаграмма  $L'$  получается из диаграммы  $L$  добавлением двух перекрестков так, как указано на рис. 5.

На диаграмме  $L$  мы видим три области, обозначенные 1, 2 и 3. Вообще говоря, на *правильной* диаграмме области 1 и 3 могут глобально совпадать, но этого случая можно избежать, “измельчая” диаграммы посредством дополнительных движений Рейдемейстера.

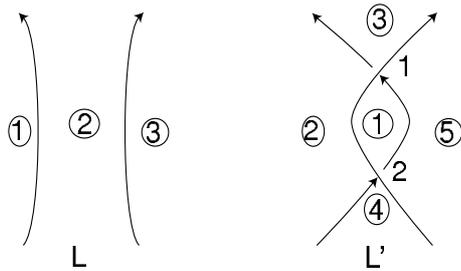


Рис. 5. Второе движение Рейдемейстера: первый случай.

На диаграмме  $L'$  имеются два новых перекрестка, которые мы обозначаем через 1 (верхний) и 2 (нижний), одна новая (малая) область, которой мы присвоим номер 1, область 2, которая соответствует области 1 на диаграмме  $L$ , области 3 и 4, которые соответствуют области 2 на диаграмме  $L$ , и область 5, которая соответствует области 3 на диаграмме  $L$ . Все остальные области и перекрестки диаграмм  $L$  и  $L'$  находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом. Сопоставим областям и перекресткам диаграммы  $L'$  номера, на 2 бóльшие соответствующих номеров диаграммы  $L$ .

Разметим подобласти таким образом, чтобы все подобласти, изображенные на рис. 5, имели разметку  $(0, 0)$ .

После этого матрица  $M(L')$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} t & -t & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -t & t & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & u & v & * & & * & \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Первый столбец этой матрицы не имеет ненулевых элементов, кроме первых двух. Третий и четвертый столбцы этой матрицы соответствуют второму столбцу матрицы  $M(L)$ . Прибавляя ко второй строке матрицы  $M(L')$  первую строку, получаем

$$\begin{pmatrix} t & -t & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & u & v & * & & * & \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Раскладывая полученную матрицу по второй строке, мы видим, что ее определитель равен определителю матрицы  $M(L)$ , умноженному на  $\pm t$ .

Тем самым инвариантность относительно одного вида “сонаправленного” движения Рейдемейстера доказана. В случае, когда правая ветвь диаграммы  $L$  направлена вниз, доказательство повторяется дословно.

Аналогично рассматривается случай второго движения Рейдемейстера, при котором ветвь, образующая два прохода, ориентирована вниз. Занумеруем области и перекрестки диаграмм  $L$  и  $L'$  так, как указано на рис. 6, и сделаем разметку всех “локальных” областей (изображенных на рисунке) нулевой. (Как и выше, мы считаем, что изображенные на рис. 6 фрагменты относятся к разным областям. То же замечание относится к рис. 7.)

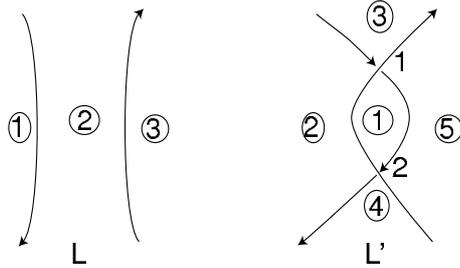


Рис. 6. Второе движение Рейдемейстера: второй случай.

После этого матрица  $M(L')$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & t & 0 & -t & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & t & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & u & v & * & & * & \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Прибавляя ко второй строке матрицы первую и разлагая по второй строке, мы видим, что определители матриц  $M(L)$  и  $M(L')$  совпадают с точностью до умножения на  $\pm t$ . В случае, когда правая ветвь диаграммы  $L$  направлена вниз, доказательство повторяется дословно.

Рассмотрим теперь третье движение Рейдемейстера, изображенное на рис. 7.

На диаграммах  $L$  и  $L'$  мы видим 3 перекрестка и 7 фрагментов областей. Будем считать, что все видимые на рис. 7 подобласти имеют метки  $(0, 0)$ . Мы обозначаем перекрестки цифрами 1–3, а области – цифрами 1–7, обведенными в кружок. Получаем следующие

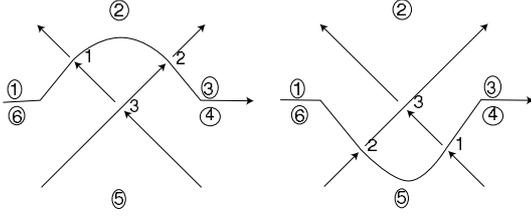


Рис. 7. Третье движение Рейдемейстера.

матрицы:

$$\begin{aligned}
 M(L) &= \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & 0 & t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 1 & -1 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t & -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & * & & * \end{pmatrix}, \\
 M(L') &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & t & 0 & -t & 0 & \dots & 0 \\ -t & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -t & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & * & & * \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

За исключением первых трех строк, эти матрицы устроены одинаково, причем у обеих матриц в седьмом столбце стоят нули.

Проведем с матрицами  $M(L)$  и  $M(L')$  следующие операции, каждая из которых либо не меняет определитель, либо умножает его на  $-1$ .

В первой матрице прибавим ко второму столбцу седьмой столбец, а затем заменим знак в седьмом столбце.

Во второй матрице прибавим к пятому столбцу седьмой столбец. В итоге получим две матрицы:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & t & -t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & * & & * \end{pmatrix}, \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -t & 0 & \dots & 0 \\ -t & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -t & 1 & -1 & 0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & * & & * \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Мы видим, что первая строка первой матрицы совпадает со второй строкой второй матрицы; вторая строка первой матрицы совпадает

с первой строкой второй матрицы. Кроме того, разность третьих строк этих двух матриц равна разности второй и первой строк первой матрицы. Таким образом, определители матриц  $M(L)$  и  $M(L')$  совпадают с точностью до знака. Теорема 1 доказана.  $\square$

#### 4. СВОЙСТВА ИНВАРИАНТА $z$

Инвариант  $z$  выделяет классические узлы. Действительно, имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть узел  $K$  в утолщенном торе стягивается на область, гомеоморфную  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $z(K) = 0$ .

**Доказательство.** Действительно, рассмотрим *правильную* диаграмму узла  $K$ , полученную добавлением четырех перекрестков, см. рис. 8.

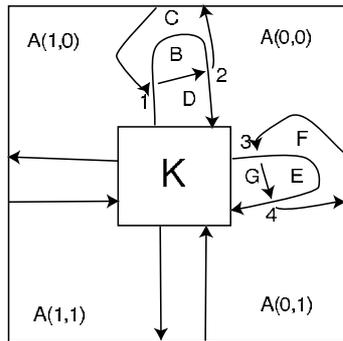


Рис. 8. Диаграмма узла, стягиваемого в  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим четыре строки, соответствующие перекресткам 1–4, и упорядочим соответствующие столбцы по алфавиту (в соответствии с буквенными обозначениями областей). Получим следующую подматрицу матрицы  $M(K)$ :

$$\begin{pmatrix} -x & -t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & t & -t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -t & t & 1 & 0 \dots 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & t & -t & -1 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Прибавляя ко второй строке первую, а к четвертой — третью, мы

получим

$$\begin{pmatrix} -x & -t & t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -t & t & 1 & 0 \dots 0 \\ y-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, мы получаем две строки (вторую и четвертую), в которой ненулевые элементы стоят только в первом столбце. Раскладывая определитель по первому столбцу, мы видим, что он равен нулю.  $\square$

**Теорема 3.** При подстановке  $x = 1$ ,  $y = 1$  полином  $z$  обращается в нуль.

**Доказательство.** Действительно, в этом случае сумма элементов в каждой строке соответствующей матрицы равна нулю.  $\square$

Напомним (см., например, [6]), что *тройкой Конвея* называется тройка диаграмм  $L^+$ ,  $L^-$  и  $L^0$  ориентированных узлов (зацеплений), совпадающих везде, за исключением некоторого маленького круга, и выглядящих внутри него так, как показано на рис. 9.

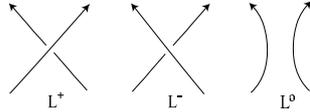


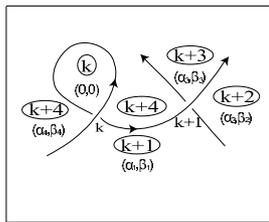
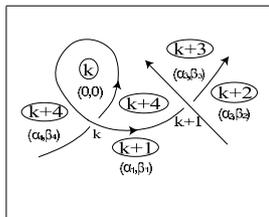
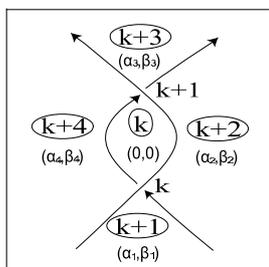
Рис. 9. Тройка Конвея.

**Теорема 4.** Полином  $z$  удовлетворяет соотношению типа Конвея:

$$t^{-1/2}z(L^+) - t^{-1/2}z(L^-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})z(L^0) \quad (8)$$

с точностью до умножения каждого из слагаемых в левой части на один из мономов вида  $\pm t^k$ , где  $k$  – целое число.

**Доказательство.** Рассмотрим диаграммы узлов (зацеплений) на торе, которые соответствуют  $L^+$ ,  $L^-$  и  $L^0$ . Применим к диаграммам  $L^+$  и  $L^-$  первое движение Рейдемейстера, как показано на рис. 10 и 11 соответственно, а к  $L^0$  – второе движение Рейдемейстера (рис. 12).

Рис. 10. Диаграмма, соответствующая  $L^+$ .Рис. 11. Диаграмма, соответствующая  $L^-$ .Рис. 12. Диаграмма, соответствующая  $L^0$ .

Запишем матрицы, соответствующие данным диаграммам. Они будут совпадать везде, кроме  $k$ -й и  $(k+1)$ -й строк:

$$M(L^+) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & t & x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & 0 & (-1-t)x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & tx^{\alpha_1} y^{\beta_1} & -x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & x^{\alpha_3} y^{\beta_3} & -tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M(L^-) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & -t & -x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & 0 & (1+t)x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & -x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & -tx^{\alpha_3} y^{\beta_3} & tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$M(L^0) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & 1 & tx^{\alpha_1} y^{\beta_1} & -x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & 0 & -tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & -1 & 0 & x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & -tx^{\alpha_3} y^{\beta_3} & tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  принимают значения 0 или 1,  $i = \overline{1, 4}$ . Умножим  $k$ -ю строку матрицы (10) на  $-1$ . Получим:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & t & x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & 0 & (-1-t)x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & -x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & -tx^{\alpha_3} y^{\beta_3} & tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В матрице  $M(L^0)$   $k$ -ю строку прибавим к  $(k+1)$ -й:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & 1 & tx^{\alpha_1} y^{\beta_1} & -x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & 0 & -tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & tx^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & -tx^{\alpha_3} y^{\beta_3} & 0 & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Умножим  $k$ -ю строку матриц (9) и (12) на  $t^{-1/2}$ :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & t^{1/2} & t^{-1/2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & 0 & (-t^{1/2} - t^{-1/2})x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & tx^{\alpha_1} y^{\beta_1} & -x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & x^{\alpha_3} y^{\beta_3} & -tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & t^{1/2} & t^{-1/2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & 0 & (-t^{1/2} - t^{-1/2})x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & -x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & -tx^{\alpha_3} y^{\beta_3} & tx^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Умножим  $k$ -ю строку матрицы (13) на  $t^{1/2}$ , а  $(k+1)$ -ю – на  $t^{-1/2}$ :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 \dots 0 & t^{1/2} & t^{3/2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & -t^{1/2} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} & 0 & -t^{c3/2} x^{\alpha_4} y^{\beta_4} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 & t^{1/2} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} & 0 & -t^{1/2} x^{\alpha_3} y^{\beta_3} & 0 & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Так как  $k$ -я область инцидентна только перекресткам с номерами  $k$  и  $k+1$ , то в  $k$ -м столбце у рассматриваемых матриц только элементы  $M_{kk}$  и  $M_{k+1,k}$  будут ненулевыми. Значит, мы можем прибавлять этот столбец, умноженный на различные мономы, к другим столбцам, при этом будут меняться только строки  $k$  и  $k+1$ . Таким образом, матрица (16) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0\dots 0 & t^{1/2} & t^{-1/2}x^{\alpha_1}y^{\beta_1} & 0 & 0 & (-t^{1/2}-t^{-1/2})x^{\alpha_4}y^{\beta_4} & 0\dots 0 \\ 0\dots 0 & 0 & t^{1/2}x^{\alpha_1}y^{\beta_1} & 0 & -t^{1/2}x^{\alpha_3}y^{\beta_3} & 0 & 0\dots 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Получили три матрицы (14), (15) и (17), у которых все строки, кроме  $(k+1)$ -й, совпадают. Рассмотрим теперь  $(k+1)$ -е строки всех трех матриц:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (0, tx^{\alpha_1}y^{\beta_1}, -x^{\alpha_2}y^{\beta_2}, x^{\alpha_3}y^{\beta_3}, -tx^{\alpha_4}y^{\beta_4}), \\ \vec{b} &= (0, -x^{\alpha_1}y^{\beta_1}, x^{\alpha_2}y^{\beta_2}, -tx^{\alpha_3}y^{\beta_3}, tx^{\alpha_4}y^{\beta_4}), \\ \vec{c} &= (0, t^{1/2}x^{\alpha_1}y^{\beta_1}, 0, -t^{1/2}x^{\alpha_3}y^{\beta_3}, 0). \end{aligned}$$

Имеем

$$\vec{a} + \vec{b} = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \vec{c}.$$

Вспомогая, что матрицу  $M(L^+)$  мы умножили на  $t^{-1/2}$ , а матрицу  $M(L^-)$  – на  $-1$ , а затем на  $t^{-1/2}$ , получаем:

$$t^{-1/2}z(L^+) - t^{-1/2}z(L^-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})z(L^0).$$

□

**Замечание 1.** Рассмотрим полином  $z'(L) = t^{-w/2}z(L)$ , где  $w$  – количество перекрестков, участвующих в конвеевском (8). Тогда формула (8) примет вид:

$$z'(L^+) - z'(L^-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})z'(L^0). \quad (18)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Grishanov, V. R. Meshkov, V. A. Vassiliev, *Recognizing textile structures by finite type knot invariants*. — J. Knot Theory Ramif. **18** (2009), 209–245.
2. S. A. Grishanov, V. A. Vassiliev, *Invariants of links in 3-manifolds and splitting problem of textile structures*. — J. Knot Theory Ramif. (to appear).
3. L. H. Kauffman, *Formal Knot Theory*. (Math. Notes **30**), Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1983.
4. L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*. — Eur. J. Comb. **20**, No. 7 (1999), 662–690.
5. В. О. Мантуров, *Гомологии Хованова с произвольными коэффициентами для виртуальных узлов*. — Изв. РАН No. 5 (2007), 311–348.
6. В. О. Мантуров, *Теория узлов*. РХД, М.–Ижевск, 2005.
7. В. О. Мантуров, *О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений*. — Труды Моск. Мат. Общ. **65(1)** (2004), 175–200.
8. P. Ozsváth, Z. Szabó, *Heegaard diagrams and Floer homology*. — In: *Int. Congress Math.*, Vol. II, Europ. Math. Soc. Zürich, 2006, pp. 1083–1099.
9. T. Ohtsuki, *Quantum Invariants*. World Sci., Singapore, 2002.
10. J. A. Rasmussen, *Floer homology and knot complements*. PhD Thesis, Harvard Univ. Cambridge, 2003. math.GT/0306378.

Zenkina M. V., Manturov V. O. An invariant of links in a thickened torus.

For links in a thickened torus, we construct a polynomial invariant depending on three variables. The construction involves Kauffman’s formal theory based on Dehn’s presentation of the group of a knot. Certain properties of the invariant are established, and a theorem about a Conway type relation is proved.

Московский государственный  
 областной университет,  
 физико-математический факультет  
 ул. Радио, д. 10а, 105005 Москва, Россия  
*E-mail*: zenkina-m@mail.ru  
 vomanturov@yandex.ru

Поступило 7 ноября 2009 г.