Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

О. М. Фоменко

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭПШТЕЙНА. II

В настоящей работе обозреваются свойства дзета-функции Эпштейна $\zeta_3(s)$, ассоциированной с суммой трех квадратов: поведение в критической полосе, теоремы о средних значениях, распределение нулей, функциональное уравнение специального вида. Выдвигается несколько гипотез.

§1 Введение. Порядок функции $\zeta_3(s)$ в критической полосе

Рассмотрим дзета-функцию Эпштейна $\zeta_k(s)$, ассоциированную с суммой $k \geqslant 3$ квадратов

$$\zeta_k(s) := \sum \left(n_1^2 + \cdots + n_k\right)^{-s} \quad \left(\sigma > \frac{k}{2}\right),$$

где $s = \sigma + it$; $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ пробегает по всем точкам решетки $\mathbf{Z}^k$ в k-мерном пространстве, исключая точку $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Функция $\zeta_k(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с единственной особенностью – простым полюсом с вычетом $\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ в точке $s = 1$. Имеет место функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_k(s) = \pi^{-(\frac{k}{2}-s)}\,\Gamma\Big(\frac{k}{2} - s\Big)\,\zeta_k\big(\frac{k}{2} - s\Big).$$

Ниже мы рассматриваем лишь случай $k = 3$, хотя многие приведенные здесь результаты справедливы для $\zeta_k(s)$, $k \geqslant 3$, и даже для $\zeta(s; Q)$, дзета-функции Эпштейна, ассоциированной с положительной квадратичной формой $Q(x_1, \dots, x_k)$ от $k \geqslant 3$ переменных. Легко видеть, что

$$\zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{n^s} \quad \left(\sigma > \frac{3}{2}\right),$$

Ключевые слова : дзета-функция Эпштейна, функциональное уравнение, нули дзета-функции Эпштейна.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233) .

где $r_3(n)$ – количество представлений натурального n суммой трех квадратов целых чисел. Известно, что $r_3(n) \ll n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ для сколь угодно малого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Для каждого σ определим число $\mu_3(\sigma)$ как нижнюю грань чисел ξ таких, что

$$\zeta_3(\sigma + it) \ll |t|^{\xi}.$$

Из общей теории рядов Дирихле следует, что $y = \mu_3(\sigma)$ – непрерывная, невозрастающая и выпуклая вниз функция. Функция $\zeta_3(s)$ ограничена в полуплоскости $\sigma \geqslant 3/2+\delta$ для любого фиксированного $\delta > 0$. Отсюда имеем $\mu_3(\sigma) = 0$ $(\sigma > 3/2)$, и из функционального уравнения следует, что $\mu_3(\sigma) = 3/2-2\sigma$ $(\sigma < 0)$. По непрерывности, $\mu_3(0) = 3/2$, $\mu_3(3/2) = 0$. Очевидно, всегда $\mu_3(\sigma) \geqslant 0$.

Рассмотрим поведение функции $y = \mu_3(\sigma)$ в критической полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 3/2$.

Теорема 1. *График функции* $y = \mu_3(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 3/2)$ *расположен под ломаной с вершинами в точках* $(0, 3/2)$, $(1/2, 3/4)$, $(1, 1/4)$ *и* $(3/2, 0)$.

Теорема 1 доказывается известным способом [1] с помощью оценки $\mu_3(1) \leqslant \frac{1}{4}$, полученной в части I [2] настоящей работы.

Аналог гипотезы Линделёфа для $\zeta_3(s)$ формулируется следующим образом:

$$\mu_3(1) = 0.$$

Этот аналог эквивалентен утверждению, что график функции $y = \mu_3(\sigma)$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 3/2)$ есть ломаная с вершинами в точках $(0, 3/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(1, 0)$ и $(3/2, 0)$.

Ниже ε означает сколь угодно малое фиксированное положительное число; c_1, c_2, C – положительные корнстанты; $\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел.

§2. Теоремы о средних значениях

Приведенные ниже результаты показывают, в частности, что в среднем аналог гипотезы Линделёфа для $\zeta_3(s)$ справедлив.

Теорема 2. *Для* $\sigma > 1$ *имеем*

$$\int_1^T |\zeta_3(\sigma + it)|^2 dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\big(T^{2-\sigma+\varepsilon}\big).$$

Доказательство. Нам потребуется следующий частный случай приближенного функционального уравнения для ряда Дирихле общего вида с функциональным уравнением, доказанного в [3].

Лемма 1. *Для* $\frac{1}{4} \leqslant \sigma \leqslant H$ *с любой константой* $H \geqslant 1/4$, $|t| > t_0 > 0$ *и* x, y *с условиями* $c_1 < \frac{x}{y} < c_2$, $xy = |t|^2$ *имеем*

$$\zeta_3(s) = \sum_{n \leqslant x/\pi} \frac{r_3(n)}{n^s} + \pi^{2s-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{\Gamma(s)} \sum_{n \leqslant y/\pi} \frac{r_3(n)}{n^{3/2-s}} + O\big(x^{1-\sigma} \log x\big). \quad (1)$$

Для $\psi(s) := \pi^{2s-\frac{3}{2}}\Gamma(3/2-s)/\Gamma(s)$ имеем

$$|\psi(s)| \asymp |t|^{\frac{3}{2}-2\sigma}.$$

В (1) положим $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, $t \in [\frac{1}{2}T, T]$, $x = T$, $y = t^2/T$. Имеем

$$\zeta_3(s) = \sum_{n \leqslant T/\pi} \frac{r_3(n)}{n^s} + \psi(s) \sum_{n \leqslant t^2/(\pi T)} \frac{r_3(n)}{n^{3/2-s}} + O\big(T^{1-\sigma} \log T\big) =: Z_1 + Z_2 + O\big(T^{1-\sigma} \log T\big).$$

В силу неравенства Коши, достаточно оценить интегралы от $|Z_1|^2$ и $|Z_2|^2$.

Имеем

$$|Z_1|^2 = \sum \frac{r_3(m)}{m^{\sigma+it}} \sum \frac{r_3(n)}{n^{\sigma-it}} = \sum \frac{r_3(m) r_3(n)}{(mn)^\sigma} \Big(\frac{n}{m}\Big)^{it},$$

где m и n пробегают целые числа отрезка $[1, T/\pi]$. Следовательно

$$\begin{aligned}
\int_{T/2}^{T} |Z_1|^2 dt &= \int_{T/2}^{T} \sum_{m,n \leqslant T/\pi} \frac{r_3(m) r_3(n)}{(mn)^\sigma} \Big(\frac{n}{m}\Big)^{it} dt \\
&= \sum_{m,n \leqslant T/\pi} \frac{r_3(m) r_3(n)}{(mn)^\sigma} \int_{T/2}^{T} \Big(\frac{n}{m}\Big)^{it} dt \\
&= \sum_{m=n} \frac{(T - T/2) r_3(m) r_3(n)}{(mn)^\sigma} \\
&+ \sum_{m \neq n} O\bigg(\frac{r_3(m) r_3(n)}{(mn)^\sigma} \cdot \Big|\log\Big(\frac{n}{m}\Big)\Big|^{-1}\bigg). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ниже используется оценка $r_3(n) \ll n^{1/2+\varepsilon}$. Имеем

$$\frac{T}{2}\sum_{n\leqslant T/\pi}\frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}} = \frac{T}{2}\Bigl\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}} - \sum_{n>T/\pi}\frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}}\Bigr\}$$
$$= \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\bigl(T^{1+2(1-\sigma)+\varepsilon}\bigr).$$

Для оценки остаточного члена (2) необходима следующая лемма (см. [1, §7.2]).

Лемма 2.

$$\sum_{0<m<n\leqslant T/\pi}\frac{1}{(mn)^{\sigma}\log(n/m)} \ll T^{2-2\sigma}\log T$$

для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma<1$; *оценка равномерна для* $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant\sigma_0<1$.

По этой лемме, остаточный член (2)

$$\ll T^{\varepsilon}\sum_{0<m<n\leqslant T/\pi}\frac{1}{(mn)^{\sigma-1/2}\log(n/m)} \ll T^{\varepsilon}T^{2-2(\sigma-1/2)}\log T$$
$$\ll T^{1+2(1-\sigma)+2\varepsilon}.$$

Рассмотрим интеграл от $|Z_2|^2$:

$$\int\limits_{T/2}^{T}|Z_2|^2\,dt \ll T^{3-4\sigma}\Bigl\{T\sum_{n\leqslant T/\pi}\frac{\tau_3^2(n)}{n^{3-2\sigma}} + \sum_{m\neq n}\frac{r_3(m)r_3(n)}{(mn)^{3/2-\sigma}}\cdot\frac{1}{|\log\frac{n}{m}|}\Bigr\}$$
$$=: T^{3-4\sigma}\{S_1+S_2\}.$$

Имеем

$$S_1 \ll T^{1+\varepsilon}\sum_{n\leqslant T/\pi}n^{2\sigma-2} \ll T^{2\sigma+\varepsilon},$$
$$T^{3-4\sigma}S_1 \ll T^{1+2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Далее,

$$S_2 \ll T^{\varepsilon}\sum_{0<m<n\leqslant T/\pi}\frac{1}{(mn)^{1-\sigma}}\cdot\frac{1}{\log(n/m)} = T^{\varepsilon}\Bigl\{\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\Bigr\},$$

где в $\sum_1$ берутся члены с $m < \frac{1}{2}n$, а в $\sum_2$ члены с $m \geqslant \frac{1}{2}n$. Имеем

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{0<m<n\leqslant T/\pi} (mn)^{\sigma-1} \ll T^{2\sigma}.$$

Поскольку в $\sum_2$ $m \geqslant \frac{1}{2}n$, положим $m = n - r$, $1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$; тогда $\log(n/m) > r/n$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\ll \sum_{n\leqslant T/\pi} \sum_{r\leqslant \frac{1}{2}n} \frac{(n-r)^{\sigma-1}n^{\sigma-1}}{r/n} \\ &\ll \sum_{n\leqslant T/\pi} n^{2\sigma-1} \sum_{r\leqslant \frac{1}{2}n} \frac{1}{r} \ll T^{2\sigma}\log T.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{T/2}^{T} |Z_2|^2\,dt \ll T^{1+2(1-\sigma)+\varepsilon}.$$

Используя полученные оценки и неравенство Коши, доказываем асимптотику

$$\int_{T/2}^{T} \bigl|\zeta_3(\sigma+it)\bigr|^2\,dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3^2(n)}{n^{2\sigma}} + O\bigl(T^{1+(1-\sigma)+\varepsilon}\bigr).$$

Заменяя T на $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{4}T, \dots$ и складывая, доказываем теорему.

Теорема 3.

$$\int_{1}^{T} \bigl|\zeta_3(1+it)\bigr|^2\,dt = CT\log T + O(T).$$

Теорема 3 является следствием общего результата Мюллера [4] о средних квадратичных оценках рядов Дирихле, ассоциированных с голоморфными и неголоморными формами.

Здесь мы даем набросок доказательства теоремы 3, непосредственно следуя работе Рамачандры [5]. В этой работе Рамачандра предложил новое и сравнительно простое доказательство известного результата Ингама [6] о четвертом моменте дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, которое использует, в частности, следующую теорему.

Теорема A (Монтгомери и Вон [7]). *Если $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел такая, что $\sum|a_n|^2$ и $\sum n|a_n|^2$ сходятся, то*

$$\int_0^T \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-it}\Big|^2 dt = T\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + O\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\Big),$$

где O-константа абсолютная.

Основой доказательства Рамачандры является следующий общий результат, к изложению которого мы переходим.

Пусть $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ $(s=\sigma+it)$ – ряд Дирихле, сходящийся в полуплоскости $\sigma>1$ и после аналитического продолжения представляющий мероморфную функцию на комплексной плоскости c, самое бóльшее, полюсом в точке $s=1$; $F(s)$ удовлетворяют функциональному уравнению $F(s)=\psi_1(s)F(1-s)$. Пусть $F(s)$ имеет конечный порядок и пусть $\psi_1(s)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Re} s|\leqslant 49/50$, причем там $\psi_1(s)\ll |s|^{A_1}+1$, где A_1 – константа.

Теорема B (Рамачандра [5]). *Пусть $s=\sigma+it$, $|\sigma-\frac{1}{2}|\leqslant 1/100$, $T\leqslant t\leqslant 2T$ и $2\leqslant X\leqslant T^A$, где A – абсолютная константа. Тогда с $w=u+iv$ имеем*

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-n/X}\, n^{-s} + \psi_1(s)\sum_{n\leqslant X} b_n n^{s-1} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{u=-\frac{3}{4}} \psi_1(s+w)\Big(\sum_{n>X} b_n n^{w+s-1}\Big)\Gamma(w)X^w\, dw \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{u=\frac{1}{4}} \psi_1(s+w)\Big(\sum_{n\leqslant X} b_n n^{w+s-1}\Big)\Gamma(w)X^w\, dw + O\big(T^{-10}\big). \end{aligned}$$

Для $\zeta_3(s)$ доказывается следующий аналог теоремы B: пусть $X=T$, $T\geqslant 2$, $s=\sigma+it$, $|\sigma-1|\leqslant 1/100$, $T/2\leqslant t\leqslant T$ и $w=u+iv$, тогда

$$\begin{aligned} \zeta_3(s) &= \sum_{n\leqslant X} r_3(n)\, n^{-s} + \psi(s)\sum_{n\leqslant X} r_3(n) n^{s-3/2} \\ &\quad + \sum_{n\leqslant X} r_3(n)\, n^{-s}\Big(e^{-n/X}-1\Big) + \sum_{n>X} r_3(n)\, n^{-s}\, e^{-n/X} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u=-\frac{3}{4}}\psi(s+w)\Bigl(\sum_{n>X} r_3(n)\,n^{w+s-3/2}\Bigr)\Gamma(w)X^w\,dw$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u=\frac{1}{4}}\psi(s+w)\Bigl(\sum_{n\leqslant X} r_3(n)n^{w+s-3/2}\Bigr)\Gamma(w)X^w\,dw+O\bigl(T^{-c}\bigr)$$

для любого фиксированного $c>0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\zeta_3(1+it)&=\sum_{n\leqslant T} r_3(n)n^{-1-it}+\psi(1+it)\sum_{n\leqslant T} r_3(n)n^{it-\frac{1}{2}}\\&+\sum_{n\leqslant T} r_3(n)n^{-1-it}\bigl(e^{-n/T}-1\bigr)+\sum_{n>T} r_3(n)n^{-1-it}\,e^{-n/T}\\&-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{u=-\frac{3}{4},\\|v|\leqslant\log^2 T}}\psi(1+it+w)\Bigl(\sum_{n>T} r_3(n)\,n^{w+it-\frac{1}{2}}\Bigr)\Gamma(w)T^w\,dw\\&-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{u=-\frac{3}{4},\\|v|\leqslant\log^2 T}}\psi(1+it+w)\Bigl(\sum_{n>T} r_3(n)\,n^{w+it-\frac{1}{2}}\Bigr)\Gamma(w)T^w\,dw\\&+O(T^{-c})=:\sum_{k=1}^{6}J_k+O(T^{-c}).\end{aligned}\tag{3}$$

Пользуясь (3), имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T}\bigl|\zeta_3(1+it)\bigr|^2\,dt=\sum_{k=1}^{6}\int\limits_{T/2}^{T}|J_k|^2\,dt+\sum_{k\neq j}\int\limits_{T/2}^{T}J_k\overline{J}_j\,dt+O(1).\tag{4}$$

Для дальнейшего необходима асимптотика [4, 8]

$$\sum_{n\leqslant x} r_3^2(n)=Bx^2+O\bigl(x^{14/9}\bigr),\tag{5}$$

где B – положительная константа (остаток в этой асимптотике можно довести до $O\bigl(x^{3/2+\varepsilon}\bigr)$ (см. [8])).

Используя теорему A и (5), легко показать, что

$$\int\limits_{T/2}^{T} |J_1|^2\,dt = \frac{C}{2}T\log T + O(T).$$

Аналогичным образом можно получить оценки

$$\int\limits_{T/2}^{T} |J_k|^2\,dt \ll T \quad (2 \leqslant k \leqslant 6).$$

Неравенство Коши позволяет теперь доказать, что

$$\int\limits_{T/2}^{T} J_k\,\overline{J}_j\,dt \ll T \quad (2 \leqslant k,\ j \leqslant 6,\ k \neq j).$$

Оценивая интеграл

$$\int\limits_{T/2}^{T} J_1\,\overline{J}_2\,dt,$$

мы используем теорему Коши (при замене пути интегрирования), теорему A и (5). Получаем

$$\int\limits_{T/2}^{T} J_1\,\overline{J}_2\,dt \ll T.$$

Сходно доказываются такие же оценки для интегралов от $J_1\overline{J}_k$ $(3 \leqslant k \leqslant 6)$. Подставляя все полученные оценки в (4), имеем

$$\int\limits_{T/2}^{T} \bigl|\zeta_3(1+it)\bigr|^2 dt = \frac{C}{2}T\log T + O(T),$$

откуда следует справедливость теоремы 3.

Теорема C (Рамачандра и Санкаранарайанан [9]). *Пусть $\delta > 0$ – любая фиксированная константа такая, что $1/2 + \varepsilon \leqslant 1 - \delta \leqslant 1 - \varepsilon$. Тогда*

1) *для $T \geqslant 10$ имеем*

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T}^{2T} \left|\zeta_3(1-\delta+it)\right| dt \gg T^{\delta};$$

1) *для $T \geqslant 100$ имеем*

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T}^{2T} \left|\zeta_3(1-\delta+it)\right|^2 dt \ll T^{2\delta}.$$

§3. Распределение нулей

Теоремы о средних значениях функции $\zeta_3(s)$ позволяют получить нетривиальную информацию о нулях этой функции.

Отметим два момента: 1) функция $\zeta_3(s)$ не разлагается в эйлеровское произведение; 2) ее комплексные нули расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и симметрично относительно центральной прямой $\sigma = 3/4$ критической полосы.

Легко видеть, что существует правая полуплоскость комплексной плоскости, в которой $\zeta_3(s)$ не имеет нулей. Следовательно, существует левая полуплоскость, в которой $\zeta_3(s)$ не имеет нулей, исключая тривиальные нули (тривиальные нули $\zeta_3(s)$ расположены в точках $s = -1, -2, -3, \cdots$).

Пусть $N(T)$ – число нулей $\beta + i\gamma$ функции $\zeta_3(s)$ с $0 < \gamma \leqslant T$. Известно [10], что

$$N(T) = \frac{1}{\pi} T \log T + O(T).$$

Воспользовавшись соображениями работы [11], можно этот результат уточнить:

$$N(T) = \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{1}{\pi}(1 + \log \pi) T + O(\log T).$$

Пусть $N(\sigma, T)$ означает число нулей $\beta + i\gamma$ функции $\zeta_3(s)$ таких, что $\beta > \sigma$, $0 < \gamma \leqslant T$. Из теоремы Литтлвуда [12, 9.623] можно вывести оценку $N(\sigma, T) = O(T)$ для любого фиксированного $\sigma > 1$. Действительно, функция $|\zeta_3(\sigma + it)|^2$ для любого фиксированного $\sigma > 1$ имеет среднее значение (см., например, теорему 2). Выполнены и другие условия теоремы Литтлвуда.

Оценки для $N(T)$ и $N(\sigma, T)$ показывают, что все нули функции $\zeta_3(s)$, кроме бесконечно малой пропорции, лежат в полосе $1/2 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, где $\delta > 0$ – любое фиксированное число.

В [9] с помощью теоремы C доказан также следующий факт: $\zeta_3(s)$ имеет $\gg T \log T$ нулей в $(|\sigma - 1| \leqslant \delta, T \leqslant t \leqslant 2T)$, где $\delta > 0$ – любое фиксированное число. Отсюда следует аналогичный факт для $(|\sigma - 1/2| \leqslant \delta, T \leqslant t \leqslant 2T)$. Сходные результаты получены в [9] и для $\zeta_k(s)$, $k > 3$.

Можно предположить, что интервал $0 < t \leqslant T$ содержит $\gg T \log T$ нулей функции $\zeta_3(1 + it)$ (и тот же факт, естественно, предполагается для $\zeta_3(1/2 + it)$). Но даже более простая задача о бесконечности множества таких нулей на интервале $0 < t < \infty$ не решена.

К настоящему времени лишь центральная прямая $\sigma = 3/4$ критической полосы функции $\zeta_3(s)$ исследована на наличие нулей. Ландау [13] и Гекке [14] доказали, что функция $\zeta_3(3/4+it)$ имеет бесконечное множество нулей на интервале $0 < t < \infty$. На самом деле, они получили более общий факт: функция $\zeta_k(k/4 + it)$, $k \geqslant 3$, имеет бесконечное множество нулей на интервале $0 < t < \infty$.

Для $k \geqslant 12$ Зигель [10] доказал следующий очень точный результат: все нули функцмм $\zeta_k(s)$ в полосе $2 \leqslant \sigma \leqslant k/2 - 2$ простые и лежат на прямой $\sigma = k/4$ *с*, самое бóльшее, конечным числом исключений; интервал $0 < t < T$ содержит в точности

$$\frac{T}{\pi} \log 2 + O(1)$$

нулей функции $\zeta_k\ (k/4 + it)$. Как заметил Зигель, в случаях $k = 4, 8$ нули $\zeta_k(s)$ на $\sigma = k/4$ полностью определяются, поскольку

$$\zeta_4(s) = 8\big(1 - 2^{2-2s}\big)\zeta(s)\,\zeta(s-1),$$
$$\zeta_8(s) = 16\big(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s}\big)\zeta(s)\,\zeta(s-3).$$

Далее Зигель пишет [10, p. 363]: “... возможно трактовать также оставшиеся случаи из $3 < k < 12$, что требует некоторых численных

подсчетов, и эти случаи мы опускаем. Для функции $\zeta_3(s)$, однако, наш метод не дает никаких результатов".

Для $k = 3$ теперь существует количественный результат, принадлежащий В. Г. Журавлеву [15]: интервал $0 < t \leqslant T$ содержит $\gg T^{1/2-\Delta}$ нулей функции $\zeta_3(3/4 + it)$ с любым фиксированным $\Delta > 0$.

§4. Функциональное уравнение

Мы докажем функциональное уравнение для $\zeta_3(s)$, относящееся к классу функцмональных уравнений, рассмотренных А. Ф. Лавриком [16, 17]. Метод, которым мы действуем, принадлежит Р. М. Кауфман [18]. Выведенное нами функциональное уравнение может быть применено к вычислению нулей функции $\zeta_3(s)$ (ср. [19, 20]).

Теорема 4. *Пусть* $s \in \mathbf{C}$, $\eta \in \mathbf{C}$ *и* $\operatorname{Re}\eta > 0$. *Имеем*

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_3(s) = \frac{\eta^{s-3/2}}{s-3/2} - \frac{\eta^s}{s} + \pi^{-s}\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n) n^{-s}\Gamma(s, \pi n\eta)$$
$$+ \pi^{-(3/2-s)}\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n) n^{-(3/2-s)}\Gamma\Big(\frac{3}{2} - s, \pi n\eta^{-1}\Big).$$

Замечание 1. Для неполной гамма-функции $\Gamma(a, N)$ известно соотношение

$$\Gamma(a, N) \sim e^{-N}\, N^{a-1} \ \Big(|N| \to \infty,\ |\arg N| < \frac{3}{2}\pi\Big).$$

Доказательство. Пусть $z = u + iv$, $v > 0$. Рассмотрим тета-ряд

$$\theta(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\, e^{\pi i n z};$$

в частности,

$$\theta(iv) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\, e^{-\pi n v}.$$

Достаточно доказать теорему при $\operatorname{Re} s > 3/2$, тогда, используя преобразование Меллина, имеем

$$\Psi(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_3(s) = \int_0^{\infty} \big(\theta(iv) - 1\big)\, v^{s-1}\, dv. \tag{6}$$

Как функция комплексного переменного v, $\theta(iv)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} v > 0$. Заменим путь интегрирования по вещественной положительной полуоси в (6) на другой путь: мы интегрируем по отрезку вещественной оси от 0 до некоторой точки $\varepsilon > 0$, затем по некоторой кривой от ε до точки η, затем по некоторой кривой от η до некоторой точки $\varepsilon' > \varepsilon$ на вещественной оси и, наконец, вдоль вещественной оси от точки ε' к ∞. При этом кривые от ε до η и от η до ε' должны оставаться в полуплоскости $\operatorname{Re} v > 0$.

В соответствии с разбиением пути интегрирования имеем

$$\begin{aligned}\Psi(s) &= \int\limits_{\eta}^{\infty} \big(\theta(iv) - 1\big) v^{s-1}\, dv + \int\limits_{0}^{\eta} \big(\theta(iv) - 1\big) v^{s-1}\, dv \\ &=: X_\eta(s) + Y_\eta(s).\end{aligned}$$

Почленное интегрирование дает

$$\begin{aligned}X_\eta(s) &= \int\limits_{\eta}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\, e^{-\pi n v} \Big) v^{s-1}\, dv \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{(\pi n)^s} \int\limits_{\pi n \eta}^{\infty} e^{-Y} Y^{s-1}\, dY = \pi^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{n^s} \Gamma(s, \pi n \eta).\end{aligned}$$

По теории модулярных форм,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\, e^{-\pi n v} = \frac{1}{v^{3/2}} \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\, e^{-\pi n / v} \Big).$$

Ниже при замене $v_0 = \frac{1}{v}$ путь интегрирования от 0 до η переходит в путь, лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} v_0 > 0$ и проходящий от точки

η^{-1} к вещественной оси и далее вдоль вещественной оси к ∞. Имеем

$$\begin{aligned}
Y_\eta(s) &= \int\limits_0^\eta \Big(\sum_{n=1}^\infty r_3(n)\, e^{-\pi n v}\Big) v^{s-1}\, dv \\
&= \int\limits_0^\eta \Big\{ v^{-3/2}\Big(\sum_{n=1}^\infty r_3(n)\, e^{-\pi n/v} + 1\Big) - 1\Big\} v^{s-1}\, dv \\
&= \int\limits_{\eta^{-1}}^\infty \Big\{ v_0^{3/2}\Big(\sum_{n=1}^\infty r_3(n)\, e^{-\pi n v_0} + 1\Big) - 1\Big\} v_0^{-1-s}\, dv_0 \\
&= \int\limits_{\eta^{-1}}^\infty v_0^{1/2-s}\Big(\sum_{n=1}^\infty r_3(n)\, e^{-\pi n v_0}\Big) dv_0 \\
&+ \int\limits_{\eta^{-1}}^\infty \Big(v_0^{1/2-s} - v_0^{-1-s}\Big) dv_0 =: S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=1}^\infty \frac{r_3(n)}{(\pi n)^{3/2-s}} \Gamma\Big(\frac{3}{2} - s, \pi n \eta^{-1}\Big), \\
S_2 &= \frac{\eta^{s-3/2}}{s - 3/2} - \frac{\eta^s}{s}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

1. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
2. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 169–178.
3. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* — Math. Ann. **152** (1963), 30–64.
4. W. Müller, *The mean square of Dirichlet series associated with automorphic forms.* — Monatsh. Math. **113** (1992), 121–159.
5. K. Ramachandra, *Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the zeta-function.* — J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), 482–486.

6. A. E. Ingham, *Mean value theorems in the theory of the Riemann zeta-function.* — Proc. London. Math. Soc. **27** (1928), 273–300.
7. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 73–82.
8. О. М. Фоменко, *Распределение целых точек на некоторых поверхностях второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 164–195.
9. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **106**, No. 3 (1996), 217–226.
10. C. L. Siegel, *Contribution to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-function.* — Ann. Math. **44** (1943), 143–172.
11. B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$. — J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.
12. E. C. Titchmarsh, *Theory of functions.* Oxford, 1932.
13. E. Landau, *Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil* $\frac{1}{2}$. — Math. Ann. **76** (1915), 212–243.
14. E. Hecke, *Über Dirichlet–Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden.* — Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1983, 708–730.
15. В. Г. Журавлев, *Нули рядов Дирихле с функциональным уравнением на критической прямой.* — Сборник исследований по теории функций и функциональному анализу, Владимир, 1974, 52–64.
16. А. Ф. Лаврик, *Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля.* — Мат. заметки **2** (1967), 475–482.
17. А. Ф. Лаврик, *О функциональных уравнениях функциий Дирихле.* — Изв. АН СССР. Серия мат. **31** (1967), 431–442.
18. Р. М. Кауфман, *Об укороченных уравнениях А. Ф. Лаврика.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **76** (1978), 124–158.
19. Н. В. Проскурин, *О рядах Дирихле, ассоциированных с кубической тета-функцией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 212–232.
20. Н. В. Проскурин, *О нулях L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 173–186.

Fomenko O. M. On Epstein's zeta function. II.

Let $\zeta_3(s)$ be the Epstein zeta function associated with $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. We investigate the behavior as $T\to\infty$ of the mean values

$$\int_1^T \left|\zeta_3(1+it)\right|^2 dt \quad \text{and} \quad \int_1^T \left|\zeta_3(\sigma+it)\right|^2 dt,$$

$\sigma>1$. Also we discuss the hypothetical distribution of the zeros of $\zeta_3(s)$ in the strip $0\leqslant\sigma\leqslant 3/2$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 20 сентября 2009 г.