Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

А. Ю. Солынин

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ЕМКОСТИ ШОКЕ

Восьмидесятилетию со дня рождения Игоря Петровича Митюка посвящается

Пусть Ω обозначает область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ограниченную конечным числом гладких поверхностей $C_1, \dots, C_k$, $k \geqslant 1$; то есть $\partial\Omega = \cup_{j=1}^k C_j$. Для каждого борелевского множества E на $\partial\Omega$ и каждой точки $z \in \Omega$ гармоническая мера $\omega(z, E, \Omega)$ определяется как решение Перрона следующей задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= \chi_E \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где через Δ обозначается оператор Лапласа, а через χ_E обозначается характеристическая функция множества E; см, например, [1, §3.6].

Важность гармоческой меры в теории потенциала базируется на классическом результате, согласно которому при каждом фиксированном $z \in \Omega$ отображение $E \to \omega(z, E, \Omega)$ определяет борелевскую вероятностную меру на $\partial\Omega$ такую, что для каждой непрерывной на $\partial\Omega$ функции h функция

$$H(z) = \int\limits_{\partial\Omega} h(\zeta)\, d\omega(z, \cdot, \Omega), \quad z \in \Omega,$$

является гармонической функцией на Ω, которая принимает граничные значения $h(\zeta)$ на $\partial\Omega$; см. [1, теорема 3.10].

Как хорошо известно, это свойство двойственности гармоноческой меры (с одной стороны служить решением задачи Дирихле (1), а с

Ключевые слова : ёмкость Шоке, эллиптические дифференциальные уравнения, теоремы сравнения.

другой стороны задавать вероятностную меру на $\partial\Omega$) является уникальным свойством оператора Лапласа, которое не распространяется на решения более общих дифференциальных уравнений в частных производных. Тем не менее, в этой заметке мы покажем, что более слабое обобщение отмеченного выше свойства двойственности удается распространить и на решения многих эллиптических уранений в частных производных. Другими словами, мы покажем, что решения некоторых таких уравнений определяют *емкости Шоке*. Более точно, мы докажем, что используя решение такого уравнения, можно определить неотрицательную функцию множества, которая будет удовлетворять свойствам **(i)**, **(ii)** и **(iii)**, приведенным ниже.

Пусть Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$, описанной выше. Через $\mathcal{B}(\Omega)$ и $\mathcal{K}(\Omega)$ будем обозначать семейство всех борелевских подмножеств множества Ω и семейство всех компактных подмножеств Ω, соответственно. Очевидно, что $\mathcal{K}(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

Будем говорить, что неотрицательная функция множества $C : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, определяет емкость Шоке на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) Если E_1 и E_2 являются компактными подмножествами Ω такими, что $E_1 \subset E_2$, то $C(E_1) \leqslant C(E_2)$.

(ii) Для каждого непустого компактного множества $E \subset \Omega$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G такое, что $E \subset G \subset \Omega$ и $C(K) \leqslant C(E) + \varepsilon$ для всех компактных множеств K, таких что $E \subset K \subset G$.

(iii) Для каждой пары компактных множеств E_1 и E_2 на Ω выполняется следующее так называемое *неравенство Шоке*:

$$C(E_1 \cup E_2) + C(E_1 \cap E_2) \leqslant C(E_1) + C(E_2). \tag{2}$$

Аксиоматическая теория емкостей бала развита Г. Шоке в середине прошлого века; см. [2]. Для целей настоящей заметки требуются только несколько базовых фактов о ёмкостях Шоке, которые читатель может найти в монографиях [1, глава 5] и [3, глава 9]. В частности, один из нужных нам результатов заключается в том, что каждая функция множества $C : \mathcal{K}(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая свойствам **(i)**, **(ii)** и **(iii)**, может быть продолжена с соблюдением всех свойств ёмкости Шоке на множество $\mathcal{B}(\Omega)$; см. [1, §5.8.2].

Неравенство Шоке (2) было обобщено Игорем Петровичем Митюком в работе [4] на случай произвольной конечной системы плоских

областей. В данном случае неравенство выписывается для соответствующих произведений внутренних радиусов. В работе [5] И. П. Митюк доказал аналогичный результат для суммы ёмкостей системы плоских конденсаторов. Несколько иной подход, использованный в совместной работе И. П. Митюка и автора [6], позволил распространить результаты работы [5] на случай систем пространственных конденсаторов.

Рассмотрим эллиптический оператор L вида

$$L = \Delta - \mu(\cdot) - f,$$

где $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ является вогнутой, неотрицательной и неубывающей функцией, а $f : \Omega \to \mathbb{R}+$ является непрерывной неотрицательной функцией на Ω.

Если E является компактным подмножеством Ω, то вместо обозначения $\Omega \backslash E$ будем использовать более короткое обозначение Ω_E. Здесь необходимо отметить, что Ω_E является открытым множеством, которое может быть и несвязным. Если, в дополнение к предыдущему, $x \in \Omega$, то вместо обозначения $\Omega_{\{x\}}$ будем использовать более короткое обозначение Ω_x. Для заданного компактного множества $E \in \mathcal{K}(\Omega)$ через u_E будем обозначать решение Перрона следующей задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{в } \Omega_E, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_E. \end{aligned} \tag{3}$$

Если Ω_E является несвязным множеством, то u_E будет рассматриваться как решение задачи (3), определенное отдельно для каждой из связных компонент множества Ω_E. Как хорошо известно, при выполнении условий, наложенных выше на функции μ и f, решение Перрона u_E существует для каждого множества $E \in \mathcal{K}(\Omega)$ и при этом $u_E \in C^2(\Omega_E)$; см. [7, §6.3].

Для каждой точки $x \in \Omega$ мы определим функцию $C_{L,x} : \mathcal{K}(\Omega_x) \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$C_{L,x}(E) = u_\varnothing(x) - u_E(x),$$

где через $\varnothing$ обозначено пустое множество. Наш основной результат заключается в следующем.

Теорема 1. *При каждом фиксированном $x \in \Omega$ функция множества $C_{L,x} : \mathcal{K}(\Omega_x) \to \mathbb{R}$ обладает свойствами* **(i)**, **(ii)** *и* **(iii)** *и, следовательно, она определяет емкость Шоке на Ω_x.*

Доказательство. Во-первых мы отметим, что для каждого компакта $E \in \mathcal{K}(\Omega)$ функция u_E является субгармонической функцией на множестве Ω_E, которая принимает нулевые граничные значения во всех тех точках множества $\partial\Omega_E$, которые регулярны для задачи Дирихле на Ω_E. Следовательно, согласно принципу максимума для субгармонических функций, $u_E(x) > 0$ для всех $x \in \Omega_E$ за исключением того случая, когда $u_E \equiv 0$ на Ω_E. Пусть $v_E(x) = u_\varnothing(x) - u_E(x)$. Так как $u_\varnothing(x) \geqslant 0$ и $u_E(x) = 0$ для всех точек $x \in \partial\Omega_E$, регулярных для задачи Дирихле для множества Ω_E,то из принципа сравнения для решений эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных (см. §9.2 в [7]) вытекает, что $v_E(x) > 0$ для всех $x \in \Omega_E$, за исключением того случая, когда $v_E \equiv 0$ на Ω_E. Таким образом, $C_{L,x}(E) \geqslant 0$ для всех $E \in \mathcal{K}(\Omega_x)$.

Далее мы покажем, что $C_{L,x}$ обладает свойствами **(i)**, **(ii)** и **(iii)**.

(i) Пусть $E_1, E_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$ такие, что $E_1 \subset E_2$. Тогда для $x \in \Omega_{E_2}$ мы имеем $C_{L,x}(E_2) - C_{L,x}(E_1) = v_{1,2}(x)$, где $v_{1,2}(x) = u_{E_2}(x) - u_{E_1}(x)$. Применяя принцип сравнения для решений эллиптических дифференциальных уравнений, как это было сделано выше, мы заключаем, что $v_{1,2}(x) > 0$ в Ω_{E_1}, за исключением того случая, когда $v_{1,2} \equiv 0$ на Ω_{E_2}. Следовательно, $C_{L,x}(E_2) - C_{L,x}(E_1) \geqslant 0$, откуда следует свойство **(i)**.

(ii) Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и пусть $x \in \Omega_E$. Пусть $\{\Omega_E^s\}_{s=1}^\infty$ является последовательностью открытых множеств $\Omega_E^s \subset \Omega_E$ таких, что $\Omega_E^s \subset \Omega_E^{s+1}$ для всех $s \geqslant 1$, и пусть $\cup_{s=1}^\infty \Omega_E^s = \Omega_E$. В дополнение будем считать, что при каждом s граница $\partial\Omega_E^s$ состоит из конечного числа гладких компонент и что $\partial\Omega \subset \partial\Omega_E^s$ для всех $s \geqslant 1$.

Так как граница $\partial\Omega_E^s$ является гладкой, задача Дирихле (3), где Ω_E заменена на открытое множество Ω_E^s, имеет классическое решение u_s. По теореме сходимости для решений эллиптических дифференциальных уравнений в изменяющихся областях (см. [8]) последовательность функций u_s сходится к функции u_E равномерно на компактных подмножствах множества Ω_E. Таким образом, существует s_0, зависящее от $\varepsilon > 0$ и такое, что $0 \leqslant u_E(x) - u_{s_0}(x) < \varepsilon$, где первое неравенство следует из свойства монотонности, установленного в пункте **(i)**. Последнее неравенство, с учетом все того же свойства монотонности,

влечет следующие соотношения:

$$C_{L,x}(K) - C_{L,x}(E) \leqslant C_{L,x}(\Omega \setminus \Omega_E^{s_0}) - C_{L,x}(E) = u_E(x) - u_{s_0}(x) < \varepsilon$$

для всех компактных множеств K таких, что $E \subset K \subset \Omega \setminus \Omega_E^{s_0}$. Это доказывает, что функция $C_{L,x}$ удовлетворяет свойству **(ii)**.

(iii) Пусть E_1 и E_2 – два компактных множества в $\mathcal{K}(\Omega)$ и пусть $F_1 = E_1 \cap E_2$, $F_2 = E_2 \cup E_2$. Тогда $F_1, F_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$. Через u_1, u_2, v_1 и v_2 будем обозначать решения Перрона в задаче (3) для открытых множеств Ω_{E_1}, Ω_{E_2}, Ω_{F_1} и Ω_{F_2}, соответственно.

Рассмотрим функцию

$$\omega = (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2)$$

определенную на Ω_{F_2}. Мы утверждаем, что $\omega \leqslant 0$ на Ω_{F_2}. Проводя доказательство от противного, предположим, что ω достигает положительного максимума, пусть $a > 0$, в некоторой точке $x_0 \in \Omega_{F_2}$, то есть

$$\sup_{x \in \Omega_{F_2}} \omega(x) = \omega(x_0) = a > 0.$$

Тогда $\omega > 0$ для всех x в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ точки x_0. Так как u_1, u_2, v_1, и v_2 являются решениями первого уравнения задачи (3), мы имеем

$$\Delta\omega = (\mu(u_1) + \mu(u_2)) - (\mu(v_1) + \mu(v_2)). \tag{4}$$

Так как $u_1 + u_2 > v_1 + v_2$ и $v_1 \leqslant u_1, u_2 \leqslant v_2$ в $\mathcal{U}$, из свойства вогнутости функции μ вытекает неравенство $\mu(u_1) + \mu(u_2) \geqslant \mu(v_1) + \mu(v_2)$. Это неравенство вместе с (4) показывает, что $\Delta\omega \geqslant 0$ на $\mathcal{U}$. Таким образом, ω является субгармонической функцией на $\mathcal{U}$, которая достигает своего максимума в точке $x_0 \in \mathcal{U}$. Следовательно, $\omega \equiv a$ на $\mathcal{U}$ по принципу максимума для субгармонических функций. Отсюда в свою очередь следует, что $\omega \equiv a > 0$ на всей связной компоненте $\Omega'(x_0)$ открытого множества Ω_{F_2}, которая содержит точку x_0.

Для $k = 1, 2$ пусть $\partial_k\Omega'(x_0) = \partial\Omega'(x_0) \cap \partial E_k$. Тогда $\partial\Omega'(x_0) = \partial_1\Omega'(x_0) \cup \partial_2\Omega'(x_0)$. Как известно, объединение двух полярных (то есть не регулярных для задачи Дирихле) множеств также является полярным множеством. Точные определения и необходимые свойства полярных множеств могут быть найдены в [1, §5.6]. Последнее влечет, что хотя бы одно из множеств $\partial_1\Omega'(x_0)$ или $\partial_2\Omega'(x_0)$ имеет точку x_1,

которая регулярна для задачи Дирихле (3) для множества Ω_{E_1} или для множества Ω_{E_2}. Это в свою очередь влечет следующее соотношение:

$$\lim_{\Omega'(x_0)\ni x\to x_1} \min\{u_1(x), u_2(x)\} = 0.$$

Из полученного уравнения вытекает следующее предельное соотношение:

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega'(x_0)\ni x\to x_1} \omega(x) &= \lim_{\Omega'(x_0)\ni x\to \partial x_1} [(u_1(x)+u_2(x)) - (v_1(x)+v_2(x))] \\ &= \lim_{\Omega'(x_0)\ni x\to x_1} [\max\{u_1(x), u_2(x)\} - v_1(x)] \leqslant 0, \qquad (5)\end{aligned}$$

последнее неравенство которого вытекает из части **(i)** настоящего доказательства. Так как $\omega \equiv a$ на $\Omega'(x_0)$, то уравнение (5) противоречит нашему предположению, что $a > 0$. Это доказывает наше утверждение о том, что $\omega \leqslant 0$ на Ω_{F_2}. Следовательно,

$$\begin{aligned}&(C_{L,x}(F_1) + C_{L,x}(F_2)) - (C_{L,x}(E_1) + C_{L,x}(E_2)) \\ &\qquad = (u_1(x)+u_2(x)) - (v_1(x)+v_2(x)) \leqslant 0,\end{aligned}$$

что доказывает неравенство Шоке (2). Доказательство теоремы 1 завершено. □

Обратим внимание читателей на то обстоятельство, что доказательство теоремы 1 базируется только на двух основных утверждениях о решениях задачи (3), каковыми являются: (a) принцип максимума и (b) принцип сравнения. Так как решения многих других дифференциальных уравнений в частных производных также обладают этими свойствами, то было бы интересно найти наибольший класс дифференциальных уравнений и соответствующий класс граничных значений, для которых заключение теоремы 1 все еще выполняется.

Одним из примеров возможного обобщения для задач с “бесконечными граничными значениями” является так называемая гиперболическая метрика, называемая также метрикой Пуанкаре. Этот пример был упомянут в работе [9]. Пусть Ω является областью на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую мы будем отождествлять с плоскостью $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy$. Если $\partial\Omega$ содержит не менее двух точек, то Ω несет гиперболическую метрику $\lambda_\Omega(z)\,|dz|$. Как хорошо известно, функция $u(z) = \log\lambda_\Omega(z)$ является максимальным решением уравнения Лиувилля:

$$\Delta u(z) = 4e^{2u(z)}, \quad z \in \Omega.$$

Необходимые свойства гиперболической метрики, а также ее многочисленные приложения содержатся, например, в работе [10].

Теорема 2. *Для фиксированного* $z_0 \in \Omega$ *через* $K_{\Omega,z_0} : \mathcal{K}(\Omega_{z_0}) \to \mathbb{R}^+$ *будем обозначать функцию множества, определенную уравнением* $K_{\Omega,z_0}(E) = \log \lambda_{\Omega_E}(z_0) - \log \lambda_\Omega(z_0)$. *Определенная таким образом функция* K_{Ω,z_0} *обладает свойствами* **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, *сформулированными выше, следовательно, она определяет емкость Шоке на множестве* Ω_{z_0}.

Доказательство этого результата повторяет основные шаги доказательства теоремы 1. Неравенство Шоке для K_{Ω,z_0}, которое является основным утверждением теоремы 2, следует также из теоремы 2 нашей работы [9].

Два "крайних" случая теоремы 2, когда граница $\partial\Omega$ является наиболее массивной и когда она наименее массивна, представляют особый интерес в комплексном анализе. В первом из этих случаев Ω является односвязной областью на $\mathbb{C}$, граница которой содержит более одной точки. Так как каждая такая область конформно эквивалентна единичному кругу, мы можем считать, что $\Omega = \mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ в рассматриваемом случае. Тогда $\lambda_{\mathbb{D}}(z) = 1/(1 - |z|^2)$; см., например, [10].

Во втором случае Ω является сферой проколотой в трех точках. В этом случае, в силу конформной инвариантности, мы можем считать, что $\Omega = \mathbb{C}'$, где $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Тогда гиперболическая метрика множества $\mathbb{C}'$ задается уравнением

$$\lambda_{\mathbb{C}'}(z) = \frac{\pi}{8|z(z-1)| \operatorname{Re}\{\mathbf{K}(z)\mathbf{K}(1-\bar{z})\}},$$

где через $\mathbf{K}(z)$ обозначен полный эллиптический интеграл первого рода; см. [11].

Следствие 1. (1) *Для каждой точки* $z_0 \in \mathbb{D}$ *через* $C_{\mathbb{D},z_0} : \mathcal{K}(\mathbb{D}_{z_0}) \to \mathbb{R}$ *обозначаем функцию множества, определенную уравнением*

$$C_{\mathbb{D},z_0}(E) = \log \lambda_{\mathbb{D}_E}(z_0) + \log(1 - |z_0|^2).$$

Тогда $C_{,z_0}$ *определяет емкость Шоке на* $\mathbb{D}_{z_0}$.

(2) *Для каждой точки* $z_0 \in \mathbb{C}'$ *через* $C_{\mathbb{C}',z_0} : \mathcal{K}(\mathbb{C}'_{z_0}) \to \mathbb{R}$ *обозначаем функцию множества, определенную уравнением*

$$C_{\mathbb{C}',z_0}(E) = \log \lambda_{\mathbb{C}'_E}(z_0) - \log \frac{\pi}{8|z(z-1)| \operatorname{Re}\{\mathbf{K}(z)\mathbf{K}(1-\bar{z})\}}.$$

Тогда $C_{\mathbb{C}',z_0}$ *определяет емкость Шоке на* $\mathbb{C}'_{z_0}$.

Литература

1. W. K. Hayman and P. B. Kennedy, *Subharmonic functions. Vol.* I. London Mathematical Society Monographs, No. 9. Academic Press, London–New York, 1976.
2. G. Choquet, *Theory of capacities.* — Annales Inst. Fourier, Grenoble **5** (1953–1954), (1955), 131–295.
3. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Л., (1985).
4. И. П. Митюк, *Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия.* — Изв. вузов. Математика **8** (1987), 39–47.
5. И. П. Митюк, *Оценка снизу суммы емкостей конденсаторов.* — Укр. мат. ж. **42**, No. 3 (1990), 390–393.
6. И. П. Митюк, А. Ю. Солынин, A. Yu, *Упорядочивание систем областей и конденсаторов в пространстве.* — Изв. вузов. Математика **8** (1991), 54–59.
7. D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin 2001.
8. A. Henrot, *Continuity with respect to the domain for the Laplacian: a survey.* — Shape design and optimization. Control Cybernet. **23**, No. 3 (1994), 427–443.
9. А. Ю. Солынин, *Упорядочивание множеств, гиперболическая метрика и гармоническая мера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 129–147.
10. A. F. Beardon, D. Minda, *The hyperbolic metric and geometric function theory.* — Quasiconformal Mappings and their Applications, 10–56. Narosa Publishing House, New Dehi, India (2007).
11. S.Agard, *Distortion theorems for quasiconformal mappings.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. A I Math. **413** (1968), 1–12.

Solynin A. Yu. Elliptic operators and Choquet's capacities.

In the paper, the Choquet capacities generated by solutions of some elliptic partial differential equations are discussed.

Department of Mathematics and Statistics
Texas Tech. University
Lubbock, TX 79409, U.S.A.

E-mail: alex.solynin@ttu.edu

Поступило 30 сентября 2009 г.