Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

Г. В. Кузьмина

О СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ. III

**Восьмидесятилетию со дня рождения
Игоря Петровича Митюка
посвящается**

1. Введение

Данная работа продолжает исследования в [1, 2] задач об экстремальном разбиении, в которых среди функций от областей присутствуют приведенные модули двуугольников относительно их вершин.

В п. 1 рассматриваются системы двуугольников, стороны которых образуют ненулевые внутренние углы в вершинах этих двуугольников. Здесь устанавливается результат симметризационного характера в семействе систем двуугольников указанного типа со свободными вершинами на некоторой окружности. Выявляются случаи, когда задача об экстремальном разбиении в семействах систем двуугольников сводится к известной задаче о максимуме линейной комбинации приведенных модулей односвязных областей относительно их отмеченных внутренних точек.

В п. 2 исследуются задачи об экстремальном разбиении в семействах систем двуугольников следующего вида: стороны этих двуугольников в окрестностях их вершин асимптотически подобны дугам логарифмических спиралей заданного наклона. На семейства таких систем областей распространяются некоторые из результатов, установленных в п. 1 настоящей работы.

В дальнейшем используются следующие обозначения.

C – окружность $|z| = 1$, U – круг $|z| < 1$, $U(b, \epsilon) = \{z : |z - b| < \epsilon\}$.

Пусть $n \geq 3$. Пусть $\mathbf{a}= \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – система различных точек окружности $|z| = 1$,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi.$$

Ключевые слова : экстремальное разбиение, двуугольник, приведенный модуль двуугольника, квадратичный дифференциал.

Пусть

$$\arg\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2\pi\lambda_k, \quad 0 < \lambda_k < 1, \quad k = 1, \dots, n$$

$$(a_{n+1} = a_1 + 2\pi), \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Пусть $\mathbf{a}^* = \{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ – система равноотстоящих точек на окружности C :

$$a_k^* = e^{2i\pi(k-1)/n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

1. О разбиении на двуугольники с ненулевыми внутренними углами в их вершинах

1.1. Пусть $\mathcal{P}_n(\mathbf{a})$ – семейство систем неналегающих двуугольников P_k, $k = 1, \dots, n$, на z-сфере, где P_k имеет своими вершинами точки a_k, a_{k+1}. Предполагается, что двуугольник P_k, $k = 1, \dots, n$, ассоциирован с классом дуг, гомотопных на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ дуге $\gamma_k = \{z : |z| = 1, \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}$, и имеет в вершинах a_k, a_{k+1} внутренние углы, равные π. Пусть $M(P_k, a_k, a_{k+1})$ – приведенный модуль двуугольника P_k относительно класса дуг, соединяющих его стороны. Через $\mathcal{D}_n(\mathbf{a})$ обозначаем семейство систем неналегающих односвязных областей D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$, на $\overline{\mathbb{C}}$, через $M(D_k, a_k)$ – приведенный модуль области D_k относительно точки a_k.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$. В семействе $\mathcal{P}_n(\mathbf{a})$ справедливо равенство*

$$\max_{\mathbf{a}} \min_{\mathcal{P}_n(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1})\} = \frac{2n}{\pi} \log\frac{4}{n}. \tag{1}$$

Указанный максимин достигается с точностью до преобразования поворота только для системы равноотстоящих точек: $a_k = a_k^*$ и для системы областей $P_k = P_k^* = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}$, $k = 1, \dots, n$. Двуугольники P_k^* являются полосообразными областями квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = \frac{z^{n-2}}{(z^n - 1)^2} dz^2.$$

Доказательство. Из теореме о связи двух задач об экстремальном разбиении [3] (см. также [4]) следует, что для произвольной системы

точек $\mathbf{a}$ и любых систем областей $\{P_k\} \in \mathcal{P}(\mathbf{a})$ и $\{D_k\} \in \mathcal{D}(\mathbf{a})$ справедливо неравенство

$$\min_{\mathcal{P}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \geq \max_{\mathcal{D}(\mathbf{a})} 4 \sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k).$$

Нам потребуется следующее простое соображение. Пусть $\widehat{P}_k$, $k = 1, \ldots, n$, – углы, образованные лучами,выходящими из начала координат и проходящими соответственно через точки a_k, a_{k+1}. Система углов $\{\widehat{P}_k\}$ принадлежит семейству $\mathcal{P}(\mathbf{a})$. Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) &\geq \min_{\mathcal{P}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \\ &\geqslant \max_{\mathcal{D}(\mathbf{a})} 4 \sum M(D_k, a_k). \end{aligned} \tag{2}$$

Так как $M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{2}{\pi} \log 4\lambda_k$, то при $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) &< \sum_{k=1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k^*, a_{k+1}^*) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{n} M(D_k^*, a_k^*) = \frac{2n}{\pi} \log \frac{4}{n}, \end{aligned}$$

и потому

$$\min_{\mathcal{P}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) < \frac{2n}{\pi} \log 4/n.$$

Далее, при $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} M(P_k^*, a_k^*, a_{k\neq 1}^*) \geqslant \min_{\mathcal{P}(\mathbf{a}^*)} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k^*, a_{k+1}^*) \geqslant 4 \sum_{k=1}^{n} M(D_k^*, a_k^*).$$

Следовательно, имеет место равенство (1). Ясно также, что искомый максимум реализуется только в случае, указанным в теореме.

Теорема 1 дополняет известный симметризационный результат В. Н. Дубинина [5].

Равенство (1) можно записать также в виде

$$\min_{\mathcal{P}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \le \frac{2}{\pi} \log \frac{4}{n}. \tag{3}$$

Отметим характерное свойство рассматриваемых задач.

Замечание 1. В отличие от других функций от областей, при расширении области приведенные модули двуугольников убывают. Поэтому, как показывают общие результаты теории задач об экстремальном разбиении (см., например, [6, 7]), структура траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала определяет минимум взвешенной суммы приведенных модулей двуугольников. По этой причине формулировки некоторых результатов в [1, 2] требуют очевидного исправления.

1.2. Обратимся к задаче о точном значении экстремума линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) \tag{4}$$

в семействе $\mathcal{P}_n(\mathbf{a})$.

Покажем, что в случае $n = 3$ минимум суммы (4) в семействе $\mathcal{P}_3(\mathbf{a})$ достигается при любых значениях h_1, h_2, h_3. Указанный минимум весьма просто выражается через максимум взвешенной суммы приведенных модулей односвязных областей в семействе $\mathcal{D}_3(\mathbf{a})$.

Учитывая известное свойство дробно-линейных отображений, можно считать, что

$$a_k = \omega^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\omega = e^{2\pi/3}).$$

Следующая лемма представляет собой результат Л. И. Колбиной, переформулированный для рассматриваемого случая.

Лемма (Л. И. Колбина [8]). *Пусть α, β, γ – любые положительные числа, $a_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$ ($\omega = e^{2i\pi/3}$). Для максимума $\mathcal{M}(1, \omega, \omega^2; \alpha, \beta, \gamma)$ суммы*

$$\alpha^2 M(D_1, 1) + \beta^2 M(D_2, \omega) + \gamma^2 M(D_3, \omega^2)$$

в семействе $\mathcal{D}_3(\mathbf{a})$ имеет место выражение

$$\mathcal{M}(1, \omega, \omega^2; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \big\{ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \log 4\sqrt{3}$$

$$-2\alpha\beta\log|\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\gamma^2|-2\alpha\gamma\log|\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma-\beta^2|$$
$$-2\beta\gamma\log|\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma|-1/2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma$$
$$-2\beta\gamma)\log|(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\gamma^2-4\beta^2\gamma^2|\}.$$

Замечание 2. Доказательство в [8] получено применением вариационного метода Г. М. Голузина. С другой стороны, утверждение леммы легко следует из известных фактов метода экстремальной метрики. Экстремальная система областей данной задачи определяется структурой траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2=-\frac{C}{4\pi^2}\frac{(z-b)(1-\overline{b}z)dz^2}{(z^3-1)^2}, \tag{6}$$

постоянная C и нули b, $1/\overline{b}$ ($b=re^{i\beta}$, $0<r\le 1$) этого дифференциала находятся из системы равенств

$$C|\omega^{k-1}-b|^2=9\alpha_k^2, \quad k=1,2,3 \tag{7}$$

(здесь $\alpha_1=\alpha,\alpha_2=\beta,\alpha_3=\gamma$, $\omega=e^{2i\pi/3}$).

Значения конформных радиусов $R(D_k,\omega^{k-1})$ находятся интегрированием системы уравнений

$$2\pi\sqrt{-Q(z)}dz=\alpha_k d\log g_k(z), \quad k=1,2,3,$$

где $\zeta=g_k(z)$ – конформное отображение области D_k на круг $|\zeta|<R_k$, $\zeta(\omega^{k-1})=0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $n=3$, h_1, h_2, h_3 – любые положительные числа, $a_k=\omega^{k-1}$, $k=1,2,3$ ($\omega=e^{2i\pi/3}$). Для минимума суммы*

$$h_1^2M(P_1,1,\omega)+h_2^2M(P_2,\omega,\omega^2)+h_3^2M(P_3,\omega^2,1)$$

в семействе $\mathcal{P}_3(\mathbf{a})$ справедливо равенство

$$\min_{\mathcal{P}_3(\mathbf{a})}\left\{h_1^2M(P_1,1,\omega)+h_2^2M(P_2,\omega,\omega^2)+h_3^2M(P_3,\omega^2,1)\right\}$$
$$=\mathcal{M}(1,\omega,\omega^2;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \tag{8}$$

где

$$\alpha_1 = h_1 + h_3, \quad \alpha_2 = h_1 + h_2, \quad \alpha_3 = h_2 + h_3. \tag{9}$$

Доказательство. Остановимся подробнее на доказательстве этой теоремы, так как рассуждения этого доказательства потребуются ниже.

Пусть P_1, P_2, P_3 – экстремальная система областей теоремы 2. В силу общей теории, эта конфигурация определяется структурой траекторий квадратичного дифференциала

$$\widetilde{Q}(z)dz^2 = \frac{C(z-b)(1-\overline{b}z)dz^2}{4\pi^2(z^3-1)^2}, \tag{10}$$

где в окрестностях точек 1, ω, ω^2 справедливы разложения

$$\widetilde{Q}(z) = \frac{\alpha_k^2}{4\pi^2(z-\omega^{k-1})^2} + \cdots, \quad k = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Отсюда следует, что постоянная $C > 0$ и нули b, $1/\overline{b}$, где $|b| = r$, $o \leqslant r \leqslant 1$, дифференциала (6) удовлетворяют условию

$$C|\omega^{k-1} - b_1|^2 = 9\alpha_k^2, \quad k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Равенства (12) показывают, что дифференциалы (10) и (6) отличаются лишь знаком:

$$\widetilde{Q}(z)dz^2 = -Q(z)dz^2.$$

Поэтому справедливо равенство (8). Заметим также, что экстремальные системы областей P_k и D_k удовлетворяют условиям согласования теоремы в [3] о связи двух задач об экстремальном разбиении, откуда вновь вытекает равенство (8).

Остается показать, что двуугольники P_k ассоциированы с классами дуг, гомотопных соответствующим дугам окружности $|z| = 1$. Для этого достаточно убедиться, что нули b, $1/\overline{b}$ дифференциала (10), т.е. нули полинома

$$-\overline{b}z^2 + (1+r^2)z - b, \tag{13}$$

не лежат на окружности $|z| = 1$.

Из системы (12) находим

$$\begin{aligned} -Cb &= \frac{3}{2}\{(2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2) + i\sqrt{3}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)\}, \\ C(1+r^2) &= 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Поэтому нули полинома (13) совпадают с нулями полинома

$$Az^2 + 2Bz + \overline{A},$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - i\sqrt{3}(\alpha_2^2 - \alpha_3^2), \\ B &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \end{aligned}$$

Покажем, что $B^2 > |A|^2$. Действительно, простые вычисления приводят к равенству

$$B^2 - |A|^2 = 3[(\alpha_2 + \alpha_3)^2 - \alpha^2][\alpha_1^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)^2].$$

Принимая во внимание условия (9), получаем требуемое неравенство:

$$B^2 - |A|^2 = 3[(h_1 + 2h_2 + h_3)^2 - (h_1 + h_3)^2][(h_1 + h_3)^2 - (h_1 - h_3)^2] > 0.$$

1.3. Итак, минимум суммы (4) в семействе $\mathcal{P}_3(\mathbf{a})$ при любых положительных значениях h_1, h_2, h_3 выражается через максимум суммы

$$\sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 M(D_k, a_k)$$

в семействе $\mathcal{D}_3(\mathbf{a})$.

При $n \geq 4$ ситуация оказывается иной благодаря возможности наличия двусвязной области в структуре траекторий сопряженного квадратичного дифференциала. Этот факт прослеживается уже в случае $n = 4$.

Любая четверка точек на окружности $|z| = 1$ при надлежащем дробно-линейном отображении переходит в четверку точек a_1, a_2, a_3, a_4, где

$$a_1 = e^{-i\pi\beta}, \quad a_2 = e^{i\pi\beta}, \quad a_3 = -a_1, a_4 = -a_2, \quad 0 < \beta \leq 1/4.$$

Семейство четверок областей из $\mathcal{P}_4(\mathbf{a})$ в этом случае будем обозначать через $\mathcal{P}_4(\beta)$, семейство четверок областей из $\mathcal{D}_4(\mathbf{a})$ – через $\mathcal{D}_4(\beta)$.

Рассмотрим задачу о минимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{4} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) \tag{15}$$

в семействе $\mathcal{P}_4(\beta)$ при условии

$$h_1 = h_3 > 0, \quad h_2 = h_4 > 0, \quad h_1 + h_2 = 1. \tag{16}$$

При $\beta = 1/4$

$$\min_{\mathcal{P}_4(\beta)} \sum_{k=1}^{4} M(P_k, a_k, a_{k+1}) = \max_{\mathcal{D}_4(\beta)} 4 \sum_{k=1}^{4} M(D_k, a_k, a_{k+1} = 0.$$

Указанный минимум реализуется только в случае симметричной четверки точек $\{a_k\} = \{a_k^*\}$ и областей, являющихся углами $P_k = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}$.

Следующая теорема дополняет лемму 3 в [2].

Теорема 3. *Пусть* $0 < \beta < 1/4$. *Минимум суммы* (15) *в семействе* $\mathcal{P}_4(\beta)$ *при условии* (16) *удовлетворяет неравенству*

$$\min_{\mathcal{P}_4(\beta)} \sum_{k=1}^{4} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) \geqslant \frac{16}{2\pi} \log \sin 2\pi\beta,$$

и равенство достигается только при $h_1 = h_3 = 1 - \beta$, $h_2 = h_4 = 1 - \beta$. *Экстремальной системой областей в этом случае является система полосообразных областей квадратичного дифференциала*

$$\frac{z^2 dz^2}{(z^2 - e^{2i\beta\pi})^2 (z^2 - e^{-2i\beta\pi})^2}.$$

Доказательство. В силу общих результатов теории задач об экстремальном разбиении и симметрии в условиях задачи минимум

суммы (15) в семействе $\mathcal{P}_4(\beta)$ реализуется только системой полосообразных областей квадратичного дифференциала вида

$$Q(z)dz^2 = \frac{C}{4\pi^2}\frac{(z^2-b^2)(1-\overline{b}^2z^2)dz^2}{(z^2-e^{2i\beta\pi})^2(z^2-e^{-2i\beta\pi})^2} \tag{17}$$

где $b=0$ или $b=re^{i\phi}\pi$, $0<r\leqslant 1$, $\phi=0$ или $\phi=1/2$, и при $b=0$ и $b\neq 0$ соответственно имеем

$$C = 64(\sin 2\beta\pi)^2 \quad \text{и} \quad C = \frac{64(\sin 2\beta\pi)^2}{1+r^4-2r^2\cos(2\beta\pi-2\phi\pi)}.$$

Из теоремы о связи двух задач об экстремальном разбиении [3] следует, что при всех рассматриваемых значениях h_k

$$\sum_{k=1}^{4} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) \geqslant 4\sum_{k=1}^{4} M(D_k^*, a_k) = \frac{16}{2\pi}\log\sin 2\pi\beta.$$

Найдем значения h_k, при которых

$$\sum_{k=1}^{4} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{16}{2\pi}\log\sin 2\pi\beta.$$

Ясно, что необходимым условием являются $b=0$ и равенства

$$h_1 = 2\,\mathrm{length}_{Q_0}[0,1], h_2 = 2\,\mathrm{length}_{Q_0}[0,i], \tag{18}$$

где через $Q_0(z)dz^2$ обозначается дифференциал (17) при $b=0$. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{Q_0}\,(z)dz^2 &= \frac{8\sin 2\beta\pi}{2\pi}\,\frac{zdz}{(z^2-e^{2i\beta\pi})(z^2-e^{-2i\beta\pi})}\\ &= -\frac{2i}{2\pi}\,\mathrm{dlog}\left\{\left[z^2-e^{2i\beta\pi}\right]/\left[z^2-e^{-2i\beta\pi}\right]\right\}\end{aligned}$$

и условия (18) приводят к равенствам

$$h_1 = 1-2\beta, \quad h_2 = 2\beta.$$

При всех остальных значениях h_k экстремальная система областей рассматриваемой задачи является системой полосообразных областей квадратичного дифференциала (17) при $b\neq 0$. Очевидно, что последнее условие означает наличие двусвязной области в структуре траекторий сопряженного квадратичного дифференциала и потому для системы круговых областей этого дифференциала имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{4} M(D_k, a_k) < \frac{16}{2\pi}\log\sin 2\pi\beta.$$

1.4. Обратимся теперь к задачам об экстремальном разбиении римановой сферы с исключенными отмеченными точками в семействах систем областей различных типов. К простейшим вопросам в указанном круге задач относится следующий.

Пусть $\mathcal{P}^{(1,n)}(D,P)$ – семейство систем областей, состоящих из одной односвязной области D, $0 \in D$, и двуугольников P_k, $k = 1, \dots, n$, где P_k имеет вершины в точках a_k, a_{k+1} на окружности $|z| = 1$ и ассоциирован с классом дуг, гомотопных дуге окружности $|z| = 1$, соединяющих точки a_k, a_{k+1} и не содержащих других из точек $a_1, \dots, a_n$. Пусть α и h_k, $k = 1, \dots, n$, – положительные числа. Требуется исследовать зависимость величины линейной комбинации

$$\alpha^2 M(D,0) - \sum_{k=1}^{n} h_k^2 M(P_k, a_k, a_{k+1})$$

в семействе $\mathcal{P}^{(1,n)}(D,P)$ от расположения точек a_k.

Исследование этой задачи связано со следующей теоремой.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e^{-i\beta}, e^{i\beta}\}$, $0 < \beta < \pi$. Пусть $\mathcal{P}(D,P)$ – семейство пар неналегающих областей D, P на $\overline{\mathbb{C}}'$, где D – односвязная область, $0 \in D$, P – двуугольник, имеющий своими вершинами точки $e^{-i\beta}$, $e^{i\beta}$ и ассоциированный с классом дуг, выходящих из одной из точек $e^{-i\beta}$, $e^{i\beta}$ и оканчивающихся во второй из этих точек. Пусть α и h – произвольные положительные числа. Найти максимум суммы

$$F = \alpha^2 M(D,0) - h^2 M(P, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$$

в семействе $\mathcal{D}(D,P)$.

Теорема 4. *В семействе $\mathcal{P}(D,P)$ справедливо точное неравенство*

$$\alpha^2 M(D,0) - h^2 M(P, e^{-i\beta}, e^{i\beta}) \leqslant F(\alpha, \beta, h),$$

где

$$F(\alpha,\beta,h) = \frac{\alpha^2}{2\pi} \log \frac{2\alpha}{\sin\beta\sqrt{16h^2+\alpha^2}} - \frac{4h^2}{\pi} \log \frac{32h^2 \sin\beta}{16h^2+\alpha^2}.$$

Доказательство. В силу общей теории, экстремальная пара областей D, P данной задачи состоит из круговой и полосообразной областей квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{C(z-b)(z-\overline{b})dz^2}{4\pi^2 z^2[(z-e^{-i\beta})(z-e^{i\beta})]^2}.$$

Для функции $Q(z)$ имеем следующие главные члены разложений в окрестностях точек 0, $e^{-i\beta}$ и $e^{i\beta}$:

$$Q(z) = \frac{\alpha^2}{4\pi^2 z^2} + \cdots,$$
$$Q(z) = \frac{4h^2}{4\pi^2 (z - e^{-i\beta})^2} + \cdots,$$
$$Q(z) = \frac{4h^2}{4\pi^2 (z - e^{i\beta})^2} + \cdots.$$

Отсюда находим постоянную C и нуль $b = re^{i\phi}$ квадратичного дифференциала:

$$C = \alpha^2/r^2, \quad \cos\phi = r\cos\beta, \quad r^2 = \frac{\alpha^2}{16h^2\sin^2\beta + \alpha^2}.$$

Из единственности экстремальной конфигурации рассматриваемой задачи и соображений симметрии следует, что точки 0, b, $e^{i\beta}$, $\overline{b}$, $e^{-i\beta}$ лежат на одной и той же окружности $\Gamma = \{z : |z - 1/2\cos\phi| = 1/2\cos\phi\}$. При отображении

$$v = \frac{iz}{1 - z\cos\beta}$$

окружность Γ переходит в вещественную ось, указанные выше точки – в точки $-v_1$, $-v_2$, 0, v_2, v_1, где

$$v_1 = r/\sin\phi, \quad v_2 = 1/\sin\beta,$$

а области D, P – в области D^v, P^v, представляющие собой экстремальную пару областей соответствующей задачи о разбиении v-сферы. Для приведенных модулей указанных областей справедливы соотношения

$$\begin{gathered} M(D,0) = M(D^v,0), \\ M(P,e^{-i\beta)},e^{i\beta}) = M(P^v,-1/\sin\beta,1/\sin\beta) + \frac{2}{\pi}\log\sin\beta. \end{gathered} \tag{19}$$

Ассоциированным квадратичным дифференциалом задачи об экстремальном разбиении v-сферы является дифференциал $Q_1(v)dv^2$,

$$Q(z)dz^2 = Q_1(v)dv^2 = \frac{C\sin^2\phi(v^2 - r^2/\sin^2\phi)dv^2}{4\pi^2\sin^4\beta[(v(v^2 - 1/\sin^2\phi)]^2}.$$

Для отображений $\zeta_j(v)$, $j=1,2$ области D^v на круг и области P^v на полосу имеют место известные дифференциальные уравнения. При преобразовании

$$w^2 = v^2 - \frac{r^2}{\sin^2\phi}$$

дифференциалу $Q_1(v)dv^2$ соответствует полный квадрат:

$$Q_1(v)dv^2 = Q_2(w)dw^2 = \frac{C\sin^2\phi}{4\pi^2\sin^4\beta}$$

$$\frac{w^4dw^2}{[(w^2+r^2\sin^2\phi)(w^2-(\sin^2\phi-r^2\sin^2\beta)/\sin^2\beta\sin^2\phi)]^2}. \tag{20}$$

Интегрируя функцию $\sqrt{Q_1}\,(v)$ по отрезкам (ϵ, v_1) и $(v_2+\epsilon)$, а функции $\zeta_1(v)$ и $\zeta_2(v)$ – по образам этих отрезков, учитывая при этом выражение (20), и пользуясь определениями приведенных модулей, находим значения $M(D^v,0)$ и $M(P^v,-1/\sin\beta,1/\sin\beta)$. Используя равенства (19), находим значения $M(D,0)$ и $M(P,e^{-i\beta},\,e^{i\beta})$ и приходим к утверждению теоремы.

Остановимся коротко на сформулированной выше задаче в семействе $\mathcal{P}^{(1,n)}(D,P)$.

Пусть S_k, $k=1,\dots,n$, – углы с вершинами в начале координат, стороны которых проходят через середины дуг, соединяющих точки a_{k-1},a_k и точки a_k,a_{k+1}; $a_k\in S_k$. Пусть P_k^-, P_k^+, D_k – пересечения областей P_{k-1}, P_k, D и угла S_k (можно считать, что указанные пересечения являются связными множествами). Используя лемму Грётша и простые экстремально-метрические соображения, приходим к неравенствам

$$M(P_k,a_k,a_{k+1}) \ge M(P_k^+,a_k) + M(P_{k+1}^-,a_{k+1}), \tag{21}$$

$$M(D,0) \le \sum_{k=1}^{n}\mu_k^2 M(D_k,0), \quad \mu_k = (\lambda_{k-1}+\lambda_k)/2), \tag{22}$$

где через $M(P,a)$ обозначается приведенный модуль треугольника P относительно его вершины a. Из (21) и (22) вытекает неравенство

$$\alpha^2 M(D,0) - \sum_{k=1}^{n} h^2 M(P_k,a_k,a_{k+1})$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}\left\{\alpha^2\mu_k^2 M(D_k,0) - h^2[M(P_k^-,a_k)+M(P_k^+,a_k)]\right\}. \tag{23}$$

Рассмотрим отображение угла S_k на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w_k > 0$:

$$w_k = f_k(z) = \left\{ \frac{z}{a_k} e^{i\pi\lambda_{k-1}} \right\}^{1/(2\mu_k)},$$

$$f_k(a_k) = e^{i\beta_k}, \quad \beta_k = \pi\lambda_{k-1}/2\mu_k.$$

Обозначим образы областей ${P_k}^-$, ${P_k}^+$, D_k при этом отображении через Π_k^-, Π_k^+, Δ_k. Имеем равенства

$$\begin{aligned} M(\Pi_k^-) &= M(P_k^-) - \frac{1}{\pi}\log(2\mu_k), \\ M(\Pi_k^+) &= M(P_k^+) - \frac{1}{\pi}\log(2\mu_k), \\ M(\Delta_k) &= M(D_k). \end{aligned}$$

Следовательно, обозначая через Σ сумму в правой части равенства (23), находим

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \alpha^2 \mu_k^2 M(\Delta_k, 0) - h^2 \big[M(\Pi_k^-, e^{i\beta_k}) + M(\Pi_k^+, e^{i\beta_k}) + \frac{2}{\pi}\log(2\mu_k) \big] \Big\}. \quad (24)$$

Принимая за конфигурацию на w_k-сфере экстремальную конфигурацию теоремы 4, имеем

$$\alpha^2 \mu_k^2 M(\Delta_k, 0) - h^2 [M(\Pi_k^-, e^{i\beta_k}) + M(\Pi_k^+, e^{i\beta_k})] = \frac{1}{2}\big\{ \alpha_k^2 M(D_k^*, 0) - h^2 M(P_k^*, e^{i\beta_k}) \big\},$$

где $\{D_k^*, P_k^*\}$ – экстремальная пара областей теоремы 4 при замене параметров α и β этой теоремы на $\alpha_k = \alpha\mu_k$ и $\beta_k = \pi\lambda_{k-1}/(2\mu_k)$. Отсюда и из (23), (24) получаем требуемое неравенство и приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *В семействе $\mathcal{P}^{(1,n)}(D, P)$ справедливо неравенство*

$$\alpha^2 M(D, 0) - \sum_{k=1}^{n} h^2 M(P_k, a_k, a_{k+1}) \leqslant F(\alpha, h, \mathbf{a}),$$

где

$$F(\alpha, h, \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{F(\alpha_k, \beta_k, h) - \frac{4}{\pi}h^2\log(2\mu_k)\right\},$$

$F(\alpha_k, \beta_k, h_k)$ *– функция теоремы* 4, α_k, β_k, μ_k *определены выше.*

При $\alpha = 0$ из теоремы 5 вытекает

Следствие. *В семействе* $\mathcal{P}_n(\mathbf{a})$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\big(\log\sin\beta_k + \log\mu_k + \log 4\big). \qquad (25)$$

Равенство в (25) *достигается только при* $\lambda_k = 1/n$, $k = 1, \dots, n$. *В этом случае правая часть в* (25) *равна* $\frac{2n}{\pi}\log\frac{4}{\pi}$.

2. О разбиении на двуугольники спирального типа

2.1. Напомним определение приведенного модуля двуугольника спирального типа относительно его отмеченных граничных элементов [6]. Пусть P – односвязная область на гиперболического типа с отмеченными граничными элементами $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$ с носителями в точках b_1, b_2. Для определенности считаем, что b_1, $b_2 \in \mathbb{C}$. В дальнейшем ϵ_1, ϵ_2 – достаточно малые положительные числа. Будем предполагать, что область P удовлетворяет следующему условию $(*)$. Пусть $\zeta = g(z)$ – конформный гомеоморфизм области P на полосу $\Pi = \{\zeta : -1/2 < \operatorname{Im}\zeta < 1/2\}$, для которого $\operatorname{Re} g(\widetilde{b}_1) = -\infty$, $\operatorname{Re} g(\widetilde{b}_2) = +\infty$. Тогда в компоненте связности $\Delta_k(\epsilon_k)$ множества $D \cap U(b_k, \epsilon_k)$, имеющей своим граничным элементом $\widetilde{b}_k$, справедливо равенство

$$g(z) = (-1)^{k-1}\{A_k e^{-i\beta_k}\log(z - b_k) + \widetilde{g}_k(z)\}, \quad k = 1, 2,$$

где $A_k > 0$, $\beta_k \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\widetilde{g}_k(z)$ – регулярная функция.

Стороны двуугольника P, удовлетворяюшего условию $(*)$, в окрестности отмеченного граничного элемента $\widetilde{b}_k$ асимптотически подобны траекториям квадратичного дифференциала

$$Q_k(z)dz^2 = \frac{e^{-2i\beta_k}dz^2}{(z - b_k)^2}. \qquad (26)$$

При $0 < |\beta_k| < \pi/2$ указанные траектории являются логарифмическими спиралями наклона β_k. Очевидно, в конкретных случаях роль

дифференциала (26) играет ассоциированный квадратичный дифференциал рассматриваемой задачи.

Построим четырехугольники $P(\epsilon_1, \epsilon_2)$, получаемые удалением из области P соответствующих окрестностей ее граничных элементов $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$. Противоположные стороны четырехугольника $P(\epsilon_1, \epsilon_2)$, принадлежащие границам удаляемых окрестностей, обозначаем через $S(\epsilon_k)$, $k = 1, 2$.

Пусть $z_k^{(0)}$ и $z_k^{(1)}$ – точки пересечения сторон двуугольника P_k с окружностью $C_k(\epsilon_k) = \{z : |z - b_k| = \epsilon_k\}$. За сторону $S_k(\epsilon_k)$, $k = 1, 2$, принимаем дугу ортогональной траектории дифференциала (25), принадлежащую кругу $U(b_k, \epsilon_k)$ и имеющую своим концом соответствующую из точек $z_k^{(0)}$, $z_k^{(1)}$.

Пусть Γ – класс локально спрямляемых кривых в P, соединяющих стороны P, и пусть $\Gamma(\epsilon_1, \epsilon_2)$ – класс локально спрямляемых кривых в четырехугольнике $P(\epsilon_1, \epsilon_2)$, разделяющих стороны $S(\epsilon_1)$ и $S(\epsilon_2)$. Пусть $M(P(\epsilon_1, \epsilon_2))$ – модуль четырехугольника $P(\epsilon_1, \epsilon_2)$ для класса $\Gamma(\epsilon_1, \epsilon_)$. Предел

$$M(P, \widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2) = \lim_{\epsilon_k \to 0, k=1,2} \left\{ M(P(\epsilon_1, \epsilon_2)) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\psi_k} \log \epsilon_k \right\},$$

где $\psi_k = \varphi_k \cos^2 \beta_k$ – внутренняя угловая характеристика области P в граничном элементе $\widetilde{b}_k$, называем приведенным модулем области P относительно граничных элементов $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$ (и класса Γ).

Ниже для граничных элементов области и их носителей будем использовать одинаковые обозначения.

2.2. В общем случае приведенные модули двуугольников спирального типа определяются с точностью до систем поворотов относительно их вершин. Однако в рассматриваемых ниже случаях эти модули определяются однозначно.

Пусть $0 < |\beta| < \pi/2$, $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – система точек на окружности $|z| = 1$ (см. Введение). Через $\mathcal{P}_n(\mathbf{a}, \beta)$ обозначаем семейство систем двуугольников P_k, $k = 1, \ldots, n$, имеющих в точках a_k, a_{k+1} вершины со спиральными углами наклона β. Предполагаем, что двуугольник P_k ассоциирован с классом дуг, гомотопных дуге окружности $|z| = 1$, соединяющей точки a_k, a_{k+1} и не содержащей других из точек системы $\mathbf{a}$.

Теорема 6. *Пусть* $n = 2$, $\mathbf{a} = \{-1, 1\}$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. *Имеем равенство*

$$\min_{\mathcal{P}_2(\mathbf{a},\beta)} \quad \big\{MP_1(-1,1;\beta) + MP_2(-1,1;\beta)\big\} = \frac{4}{\pi\cos^2\beta}\log 2 + 2\operatorname{tg}\beta.$$

Указанный минимум реализуется только в том случае, когда двуугольники P_1, P_2 *не имеют внешних точек и ограничены траекториями квадратичного дифференциала* $e^{-2i\beta}(z^2-1)^{-2}dz^2$.

Доказательство. В силу общей теории [6] и симметрии в условиях задачи экстремальную пару областей образуют двуугольники P_1, P_2 ($i \in P_1, -i \in P_2$), симметричные друг с другом относительно начала координат и ограниченные дугами траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = \frac{C}{4\pi^2}\,\frac{e^{-2i\beta}dz^2}{(z^2-1)^2}.$$

В окрестности точки $z = 1$ имеем разложение

$$Q(z) = \frac{4h^2}{4\pi^2}\,\frac{e^{-2i\beta}}{\cos^2\beta(z-1)^2} + \cdots,$$

откуда

$$C = \frac{4h^2}{\cos^2\beta}.$$

Функция $\zeta = \int\sqrt{Q(z)}\,dz$ реализует отображение двуугольника P_1 на полосу,

$$\zeta = \frac{h}{\pi\cos\beta}e^{-i\beta}\log\frac{z-1}{z+1}.$$

Пусть ϵ_1 и ϵ_2 – малые положительные числа и пусть $z_1 = 1 + \epsilon_1 e^{i\gamma_1}$ и $z_2 = -1 - \epsilon_2 e^{i\gamma_2}$ – точки пересечения общих граничных дуг двуугольников P_1 и P_2 с окружностями $|z-1| = \epsilon_1$ и $|z+1| = \epsilon_2$. Имеем равенства

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\zeta(z_2) - \zeta(z_1)) \\ = \frac{h}{\pi\cos\beta}\big\{\cos\beta(\log 4 - \log(\epsilon_1\epsilon_2)) - \sin\beta(\gamma_1+\gamma_2)\big\},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\zeta(z_2) - \zeta(z_1)) \\ = \frac{h}{\pi\cos\pi}\big\{-\sin\beta(\log 4 - \log(\epsilon_1\epsilon_2)) - \cos\beta(\gamma_1+\gamma_2)\big\} = h.\end{aligned} \tag{28}$$

Из (28) получаем

$$-(\gamma_1+\gamma_2)=\pi+\operatorname{tg}\beta\big[\log 4-\log(\epsilon_1\epsilon_2)\big].$$

Теперь из (27) находим

$$\frac{1}{h}\operatorname{Re}(\zeta(z_2)-\zeta(z_1))=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\cos^2\beta}(\log 4-\log(\epsilon_1\epsilon_2))+\pi\operatorname{tg}\beta\right].$$

Отсюда и из определения приведенного модуля двуугольника получаем равенство

$$MP_1(-1,1;\beta)=\frac{\log 4}{\pi\cos^2\beta}+\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно, справедливо равенство, приведенное в теореме. Ясно также, что установленный минимум достигается только в указанном случае.

Теорему 6 дополняет следующее простое утверждение.

Теорема 6′. *Пусть $n\geq 3$, $\mathbf{a}^*$ – симметричная система точек окружности $|z|=1$: $\mathbf{a}^*=\{e^{2i\pi(k-1)/3}\}_{k=1}^3$. В семействе $\mathcal{P}_3(\mathbf{a}^*,\beta)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{3}MP_k(a_k^*,a_{k+1}^*;\beta)\geq\frac{2n}{\pi\cos^2\beta}\log\frac{4}{n}+n\operatorname{tg}\beta.$$

Равенство имеет место только в том случае, когда $\{P_k\}$ – система полосообразных областей квадратичного дифференциала

$$\frac{e^{-2i\beta}z^{n-2}dz^2}{(z^n-1)^2}. \tag{29}$$

Доказательство основывается на том факте, что экстремальная система областей определяется структурой траекторий дифференциала (29) и аналогично предыдущему.

С теоремой 2 настоящей работы непосредственно связана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* $n = 3$, $\mathbf{a}^* = \{1, \omega, \omega^2\}$, *где* $\omega = e^{2i\pi/3}$. *Пусть* h_1, h_2, h_3 *– положительные числа. В семействе* $\mathcal{P}_3(\mathbf{a}^*, \beta)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{3} h_k^2 MP_k\left(\omega^{k-1}, \omega^k; \beta\right) \geqslant \frac{1}{\cos^2\beta}\mathcal{M}(1, \omega, \omega^3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)\operatorname{tg}\beta, \quad (30)$$

где $\mathcal{M}(1, \omega, \omega^3; \alpha, \beta, \gamma)$ *– функция теоремы 2,*

$$\alpha_1 = h_1 + h_2, \quad \alpha_2 = h_2 + h_3, \quad \alpha_3 = h_3 + h_1.$$

Доказательство. По теореме в [7] искомый минимум определяется структурой траекторий квадратичного дифференциала

$$Q^{(\beta)}(z)dz^2 = \frac{Ce^{-2i\beta}(z - b_1)(1 - \overline{b}_2 z)}{4\pi^2(z^3 - 1)^2}, \quad (31)$$

здесь $C > 0$ и в окрестностях отмеченных точек имеем разложения

$$Q^{(\beta)}(z) = \frac{\alpha_k^2\, e^{-2i\beta}}{4\pi^2\cos^2\beta(z - \omega^{k-1})^2} + \cdots, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда получаем равенства

$$\begin{aligned} C(1 - b_1)(1 - \overline{b}_2) &= 9\alpha_1^2/\cos^2\beta. \\ C(\omega - b_1)(\omega^2 - \overline{b}_2) &= 9\alpha_2^2/\cos^2\beta, \\ C(\omega^2 - b_1)(\omega - \overline{b}_2) &= 9\alpha_3^2/\cos^2\beta. \end{aligned} \quad (32)$$

Из условий (32) следует, что $b_1 = b_2$ и приходим к равенству

$$Q^{(\beta)}(z)dz^2 = \frac{e^{-2i\beta}}{\cos^2\beta}Q_1(z)dz^2. \quad (33)$$

Пусть ϵ_k, $k = 1, 2, 3,$ – малые положительные числа и пусть

$$\overline{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\epsilon}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \cup_{k=1}^{3} U(\omega^{k-1}, \epsilon_k).$$

Из предыдущего следует, что

$$\operatorname{area}_{Q^{(\beta)}}\overline{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{\cos^2\beta}\operatorname{area}_{Q_1}\overline{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\epsilon}). \tag{34}$$

Воспользуемся теперь определением приведенного модуля двуугольника (см. 4.1). Прибавим к обеим частям равенства (34) сумму

$$\frac{1}{\cos^2\beta}\sum_{k=1}^{3} h_k^2\left(\frac{1}{\phi_k^{(1)}}\log\epsilon_k + \frac{1}{\phi_k^{(2)}}\log\epsilon_{k+1}\right),$$

где

$$\phi_k^{(1)} = \frac{2\pi h_k}{h_{k-1}+h_k}, \quad \phi_k^{(2)} = \frac{2\pi h_k}{h_k+h_{k+1}},$$

и перейдем в обеих частях полученного равенства к пределу при $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \to 0$.

Принимая во внимание, что в определении приведенного модуля двуугольника спирального типа рассматриваются четырехугольники, имеющие своими противоположными сторонами дуги ортогональных траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала, принадлежащие ϵ-окрестностям вершин данного двуугольника, и используя теорему 2, приходим к утверждению теоремы.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении. I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 160–172.
2. Г. В. Кузьмина, *О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении. II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 158–179.
3. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **160** (1987), 91–98.
4. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **185** (1990), 72–95.
5. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
6. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
7. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
8. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении.* — Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.

Kuz'mina G. V. On symmetric configurations in some problems on extremal decomposition. III.

Some problems on extremal decomposition in families of nonoverlapping domains containing systems of biangles with free vertices are considered. In particular, a symmetrization result for systems of biangles with vertices on the unit circle is established. Cases where the problems considered reduce to some known problems on extremal decomposition are revealed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка, 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2009 г.