Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

С. И. Калмыков

ОБ ОЦЕНКЕ МОДУЛЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

**Восьмидесятилетию со дня рождения
Игоря Петровича Митюка
посвящается**

§1. Введение. Вспомогательные сведения

Введем обозначения:

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p(z) : p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0 \right\},$$

$$\mathcal{R}_{n,m} := \left\{ r(z) : r(z) = \frac{p(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)},\ p(z) \in \mathcal{P}_m, \right.$$
$$\left. a_k \in \mathbb{C},\ |a_k| > 1,\ k = \overline{1,n} \right\},$$

$$x_+ = \max(x, 0), \quad x_- = \min(x, 0).$$

Функция

$$B(z) = z^{(m-n)_+} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \overline{a}_k z}{z - a_k} \quad \left(|a_k| > 1,\ k = \overline{1,n}\right)$$

принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}$. Положим

$$||f|| := \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Ключевые слова : рациональные функции, однолистные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант 09-I-П4-02).

Хорошо известно неравенство

$$\max_{|z|=\rho\geqslant 1}|p(z)|\leq \rho^n||p||,$$

справедливое для всех полиномов класса $\mathcal{P}_n$. Если также известно, что полином указанного класса не имеет нулей в единичном круге, то справедливо неравенство Анкени–Ривлина [1]

$$\max_{|z|=\rho\geqslant 1}|p(z)|\leq \frac{\rho^n+1}{2}||p||.$$

Для рациональных функций с полюсами, лежащими вне единичной окружности, Говил и Мохапатра доказали неравенство

$$|r(z)|\leq |B(z)|||r||,\quad |z|>1, \tag{1}$$

справедливое для $r(z)\in\mathcal{R}_{n,m}$, $m\leq n$ (см. [2]).

Целью настоящей заметки является получение точных оценок сверху и снизу для модулей полиномов и рациональных функций при некоторых ограничениях на $|z|$ и рассматриваемые функции. Полученные оценки дополняют неравенство (1). Метод, использованный при доказательствах, восходит к замечанию в работе [3, с. 59].

Нам понадобятся вспомогательные сведения из теории однолистных функций. Пусть $\mathcal{B}$ означает класс функций

$$w=f(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\alpha_3 z^3+\cdots,$$

регулярных и однолистных в единичном круге $U:=\{z:|z|<1\}$ и таких, что $|f(z)|<1$ при $z\in U$.

В силу классических результатов теории однолистных функций для функций класса $\mathcal{B}$ имеют место неравенства

$$\left(\frac{1+|f(z)|}{1+|z|}\right)^2\leq\left|\frac{f(z)}{\alpha_1 z}\right|\leq\left(\frac{1-|f(z)|}{1-|z|}\right)^2, \tag{2}$$

справедливые для любых $z\in U$(см. [4]). Равенства достигаются, в частности, для функции $f(z)=\alpha_1 z$, $|\alpha_1|=1$.

Известна также следующая теорема Ландау (см. [5]). Если функция $f(z)=az+\cdots$ регулярна в круге $|z|\leq 1$ и $|f(z)|\leq M$ в этом круге, то $f(z)$ однолистна в круге с центром в нуле и радиуса, равного $M/|a|-\sqrt{(M/|a|)^2-1}$.

§2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть рациональная функция $r(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}$ и $||r|| = 1$. Тогда для любого*

$$\rho > R = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|}{|c_m|} + \sqrt{\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2}{|c_m|^2} - 1} \geqslant 1$$

и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ выполняются неравенства

$$t_0 \rho^{1+(m-n)_-} |B(z)| \leq |r(z)| \leq t_1 \rho^{1+(m-n)_-} |B(z)|, \tag{3}$$

где t_0, t_1, $0 < t_0$, $t_1 \leq 1$, – корни уравнений

$$|c_m|(1+t)^2 \rho = (\rho + R)^2 t \prod_{k=1}^{n} |a_k|, \tag{4}$$

$$|c_m|(1-t)^2 \rho = (\rho - R)^2 t \prod_{k=1}^{n} |a_k|, \tag{5}$$

соответсвенно.

При $m \geq n$ равенства в (3) для любого $\rho > 1$ и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ достигаются для функции $r(z) = B(z)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(\zeta) = \zeta^{1+(m-n)_-} \overline{r\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)} B(\zeta) = \frac{\overline{c_m}}{(-1)^n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k} \zeta + \cdots,$$

регулярную в замкнутом единичном круге $\overline{U}$ и ограниченную в нем по модулю единицей, согласно условию теоремы. Из теоремы Ландау следует, что функция $f(\zeta)$ однолистна в круге с центром в нуле и радиуса

$$R_1 = \prod_{k=1}^{n} |a_k|/|c_m| - \sqrt{\prod_{k=1}^{n} |a_k|^2/|c_m|^2 - 1}, \quad R_1 \leq 1.$$

Функция $f(R_1\zeta)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$ и поэтому для нее имеет место неравенство (2). Из правой части этого неравенства следует, что

$$\frac{|f(R_1\zeta)|}{(1+|f(R_1\zeta)|)^2} \geq \frac{R_1|c_m||\zeta|}{(1+|\zeta|)^2\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}, \quad |\zeta|<1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{|f(1/\overline{z})|}{(1+|f(1/\overline{z})|)^2} \geq \frac{|c_m|\rho}{(R+\rho)^2\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}, \quad |z|>R\geq 1,$$

где $R=1/R_1$.

Функция $\dfrac{z}{(1+z)^2}$ строго возрастает на промежутке $[0,1]$, поэтому последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$|f(1/\overline{z})| \geq t_0,$$

где t_0, $0<t_0\leq 1$, – корень уравнения (4).

Выписывая выражение для функции f, приходим к левому неравенству в (3).

Докажем теперь второе неравенство в (3). Для этого применим правое неравенство в (2) к функции $f(R_1\zeta)$:

$$\frac{|f(R_1\zeta)|}{(1-|f(R_1\zeta)|)^2} \leq \frac{R_1|c_m||\zeta|}{(1-|\zeta|)^2\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}, \quad |\zeta|<1.$$

Переходя к переменной z, получаем

$$\frac{|f(1/\overline{z})|}{(1-|f(1/\overline{z})|)^2} \leq \frac{|c_m|\rho}{(\rho-R)^2\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}, \quad |z|>R\geq 1. \tag{6}$$

Так как функция $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ строго возрастает на промежутке $[0,1)$, то имеет место неравенство

$$|f(1/\overline{z})| \leq t_1,$$

где t_1, $0 < t_1 \leq 1$, – корень уравнения (5), отсюда получаем оценку сверху в (3). Случаи равенства проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Доказанная теорема дополняет неравенство (1) при указанном ограничении на ρ. Сравнивая выражение в правой части неравенства (6) с дробью $\rho/(1-\rho)^2$, получаем, что при

$$\rho > \frac{R - \lambda + (R-1)\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}, \quad \lambda = |c_m| / \prod_{k=1}^{n} |a_k|,$$

доказанное нами неравенство улучшает оценку (1).

В качестве следствия теоремы 1 приведем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть полином $P(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n$ и $||P|| = 1$. Тогда для любого*

$$\rho > R = \frac{1}{|c_n|} + \sqrt{\frac{1}{|c_n|^2} - 1} \geqslant 1$$

и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ выполняются неравенства

$$t_0 \rho^{n+1} \leq |P(z)| \leq t_1 \rho^{n+1},$$

где t_0, t_1, $0 < t_0$, $t_1 \leq 1$, – корни уравнений

$$|c_n|(1+t)^2 \rho = (\rho + R)^2 t,$$

$$|c_n|(1-t)^2 \rho = (\rho - R)^2 t,$$

соответственно.

Равенства для любого $\rho > 1$ и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ достигаются для полинома $P(z) = c_n z^n$, $|c_n| = 1$.

Теорема 2. *Если все нули полинома $P(z)$ класса $\mathcal{P}_n$ с ненулевым свободным членом лежат в круге $|z| \leq 1$, то для любого*

$$\rho > R = \left|\frac{c_n}{c_0}\right| + \sqrt{\left|\frac{c_n}{c_0}\right|^2 - 1} \geqslant 1$$

и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ выполняются неравенства

$$t_0\rho^{1-n} \le |P(1/\overline{z})/P(z)| \le t_1\rho^{1-n}, \tag{7}$$

где t_0, t_1, $0 < t_0$, $t_1 \le 1$, – корни уравнений

$$|c_0|(1+t)^2\rho = |c_n|(\rho+R)^2 t, \tag{8}$$

$$|c_0|(1-t)^2\rho = |c_n|(\rho-R)^2 t, \tag{9}$$

соответственно.

Равенства для любого $\rho > 1$ и любой точки z на окружности $|z| = \rho$ достигаются для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(\zeta) = \zeta^{1-n}P(\zeta)/\overline{P(1/\overline{\zeta})} = \frac{c_0}{\overline{c_n}}\zeta + \cdots,$$

регулярную в единичном круге $\overline{U}$ и ограниченную в нем по модулю единицей. По теореме Ландау, функция $f(\zeta)$ однолистна в круге с центром в нуле и радиуса

$$R_1 = \left|\frac{c_n}{c_0}\right| - \sqrt{\left|\frac{c_n}{c_0}\right|^2 - 1}, \quad R_1 \le 1.$$

Функция $f(R_1\zeta)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$ и потому для нее имеют место неравенство (2). Из правой части этого неравенства следует, что

$$\frac{|f(R_1\zeta)|}{(1+|f(R_1\zeta)|)^2} \ge \frac{R_1|c_0||\zeta|}{|c_n|(1+|\zeta|)^2}, \quad |\zeta| < 1.$$

Значит,

$$\frac{|f(1/\overline{z})|}{(1+|f(1/\overline{z})|)^2} \ge \frac{|c_0|\rho}{|c_n|(R+\rho)^2}, \quad |z| > R \ge 1,$$

где $R = 1/R_1$. Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$|f(1/\overline{z})| \ge t_0,$$

где t_0, $0 < t_0 \le 1$, – корень уравнения (8). Выписывая в явном виде функцию f, приходим к левому неравенству в (7).

Для доказательства второго неравенства в (7) применим правое неравенство в (2) к функции $f(R_1\zeta)$:

$$\frac{|f(R_1\zeta)|}{(1-|f(R_1\zeta)|)^2} \le \frac{R_1|c_0||\zeta|}{|c_n|(1-|\zeta|)^2}, \quad |\zeta|<1.$$

Переходя к переменной z, получаем

$$\frac{|f(1/\overline{z})|}{(1-|f(1/\overline{z})|)^2} \le \frac{|c_0|\rho}{|c_n|(\rho-R)^2}, \quad |z|>R\ge 1.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$|f(1/\overline{z})| \le t_1,$$

где t_1, $0<t_1\le 1$, – корень уравнения (9), откуда получаем оценку сверху в (7). Случаи равенства проверяются непосредственно. Теорема доказана.

Проводя аналогичные рассуждения для функции

$$f(\zeta)=\zeta^{1+n}\overline{P(1/\overline{\zeta})}/P(\zeta),$$

приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Если все нули полинома $P(z)$ класса $\mathcal{P}_n$ лежат вне круга $|z|<1$, то для любого*

$$\rho>R=\left|\frac{c_0}{c_n}\right|+\sqrt{\left|\frac{c_0}{c_n}\right|^2-1} \ \geqslant 1$$

и любой точки z на окружности $|z|=\rho$ выполняются неравенства

$$t_0\rho^{1+n}\le |P(z)/P(1/\overline{z})|\le t_1\rho^{1+n},$$

где t_0, t_1, $0<t_0$, $t_1\le 1$, – корни уравнений

$$|c_n|(1+t)^2r=|c_0|(\rho+R)^2t,$$
$$|c_n|(1-t)^2r=|c_0|(\rho-R)^2t,$$

соответственно.

Равенства для любого $\rho>1$ и любой точки z на окружности $|z|=\rho$ достигаются для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z|=1$.

Теоремы 2 и 3 дополняют соответственно теоремы 3.5 и 3.6 работы [6].

Автор благодарит Н. К. Говила за информацию о статье [2].

Литература

1. N. C. Ankeny, T. J. Rivlin, *On a theorem of S. Bernstein.* — Pacific J. Math. No. 5 (1955), 849–852.
2. N. K. Govil, R. N. Mohapatra, *Inequalities for maximum modulus of ratioanl functions with prescribed poles.* — Approximation Theory, 255–263, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **212**, Dekker, New York, 1998.
3. В. Н. Дубинин, *Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения.* — Мат. сб. **196**, No. 11 (2005), 53–74.
4. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге* — Вестн. Ленингр. ун-та, No. 11, сер. мат., физ., хим., вып. 4 (1955), 3–21.
5. Ж. Валирон, *Аналитические функции.* М., 1957.
6. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов.* — Алгебра и анализ **13**, No. 5 (2001), 16–43.

Kalmykov S. I. On modulus estimate of rational function.

The paper presents sharp inequalities for the modules of rational functions under certain restrictions on the module of the independent variable. These inequalities supplement some results of Govil, Mohapatra, and Dubinin.

Институт прикладной математики
ДВО РАН,
ул. Радио 7, 690041 Владивосток,
Россия

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 20 сентября 2009 г.