Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ

В дальнейшем $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ – соответственно множества вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; $Q = [-\pi, \pi]$. При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем пространство вещественных измеримых 2π-периодических фукнций f, у которых

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_Q |f|^p\Big)^{1/p} < \infty;$$

$L_\infty = C$ – пространство вещественных непрерывных 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть в линейном множестве C введена полунорма P. Будем говорить, что P принадлежит классу A, если выполнены условия:

1) существует такая постоянная M, не зависящая от f, что $P(f) \leqslant M\|f\|$ для любой $f \in C$;
2) полунорма P инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой $f \in C$ и для любого $h \in \mathbb{R}$

$$P(f(\cdot + h)) = P(f).$$

Линейное множество C, в котором введена полунорма P, принадлежащая классу A, будем называть пространством CP.

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\sin kt\,dt$$

Ключевые слова : периодическая функция, ряд Фурье, суммы Фурье, суммы Фейера, суммы Валле–Пуссена, суммы Рисса, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (грант no. НШ-2409.2008.1).

– коэффициенты Фурье функции f; при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx; \quad A_0(f,x) = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Через $S_n(f)$ обозначаем суммы Фурье функции f:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x).$$

Пусть $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел,

$$\Phi_n(t)_\lambda = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos kt\right\},$$
$$\Phi(\lambda) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|\Phi_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Одновременно с рядом Фурье функции f

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(f) \tag{1}$$

будем рассматривать тригонометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A_k(f). \tag{2}$$

Обозначим через Φ множество последовательностей λ, для которых $\Phi(\lambda) < \infty$. Тогда, если $f \in L_1$, ряд (2) является рядом Фурье некоторой функции из L_1; если $f \in C$, то ряд (2) является рядом Фурье некоторой функции из C. Эту функцию будем обозначать через f_λ или через $f(\cdot)_\lambda$.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с приближением функции f_λ ее суммами Фурье в пространствах L_p, CP, C, на множествах точек. В частности, получены новые результаты, относящиеся к множителям сходимости. Оценки (сверху) величин

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p, \quad P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)), \quad \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|$$

ведутся посредством структурных характеристик (наилучших приближений и модулей непрерывности) функций f и f_λ; при этом, как правило, наиболее существенная часть отклонений оценивается с помощью структурных характеристик функции f.

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения

1. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0; символ $0 \cdot (+\infty)$ понимается как $+\infty$.

Через H_n обозначаем множество вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n. В дальнейшем вместо "тригонометрический полином" говорим просто полином.

Через $\tilde{f}$ обозначаем функцию сопряженную с f (см.[1, с. 88]), $F = f^{(-1)}$ – первообразная для функции f такая, что $\int\limits_Q F = 0$, $\widetilde{F}$ – функция, сопряженная с F.

2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in L_1$. Через $\sigma_n(f)$, $\sigma_{n,k}(f)$, $R_{n,r}(f)$ обозначаем соответственно суммы Фейера, Валле Пуссена, Рисса функции f:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)A_k(f,x),$$

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \frac{1}{k}\sum_{l=n}^{n+k-1} S_l(f,x),$$

$$R_{n,r}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right)A_k(f,x).$$

Через $D_n(t)$, $\Phi_n(t)$, $V_{n,k}(t)$ обозначаем соответственно ядра Дирихле, Фейера, Валле Пуссена:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}},$$

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

$$V_{n,k}(t) = \frac{1}{2\pi k}\frac{\sin^2\frac{(n+k)t}{2} - \sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\sigma_{n,1}(f) = S_n(f), \quad \sigma_{0,k+1}(f) = \sigma_k(f), \tag{3}$$

$$\sigma_{n,k}(f) = (1+\frac{n}{k})\sigma_{n+k-1}(f) - \frac{n}{k}\sigma_{n-1}(f), \tag{4}$$

$$\sigma_{n,k}(f) = S_n(f) + \sum_{j=n+1}^{n+k} \big(1 - \frac{j-n}{k}\big) A_j(f), \tag{5}$$

$$S_n(f,x) = \int\limits_Q f(x+t) D_n(t)dt, \tag{6}$$

$$\sigma_n(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)\Phi_n(t)dt, \tag{7}$$

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)V_{n,k}(t)dt, \tag{8}$$

$$V_{n,k}(t) = \big(1+\frac{n}{k}\big)\Phi_{n+k-1}(t) - \frac{n}{k}\Phi_{n-1}(t), \tag{9}$$

$$V_{n,k}(t) = \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{n}\cos lt + \sum_{l=n+1}^{n+k}\big(1-\frac{l-n}{k}\big)\cos lt\Big\}, \tag{10}$$

$$D_n(t) = V_{n,1}(t) = \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big\}, \tag{11}$$

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(1-\frac{k}{n+1}\big)\cos kt\Big\}. \tag{12}$$

Равенства (3) означают, что суммы Фурье и суммы Фейера являются частными случаями сумм Валле Пуссена. При $n=0$ в формуле (4) считаем $\sigma_{-1}(f)=0$, в формуле (9) считаем $\Phi_{-1}(t)=0$. Полагаем

$$\tau_n(f) = \sigma_{n,n+1}(f), \Lambda_n(t) = V_{n,n+1}(t), \varkappa_n(f) = \sigma_{2n,n+1}(f).$$

В силу (4)

$$\tau_n(f) = \big(1+\frac{n}{n+1}\big)\sigma_{2n}(f) - \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}(f),$$
$$\varkappa_n(f) = \big(1+\frac{2n}{n+1}\big)\sigma_{3n}(f) - \frac{2n}{n+1}\sigma_{2n-1}(f).$$

На основании (9) имеем

$$\Lambda_n(t) = \big(1+\frac{n}{n+1}\big)\Phi_{2n}(t) - \frac{n}{n+1}\Phi_{n-1}(t).$$

3. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. Через $E_n(f)_p$ обозначаем наилучшее приближение функции f полиномами порядка не выше n в пространстве L_p:

$$E_n(f)_p = \inf_{T \in H_n} \|f - T\|_p.$$

Полином $T_n(f)_p \in H_n$ определяется равенством:

$$\|f - T_n(f)_p\|_p = E_n(f)_p.$$

Если полином $T \in H_n$ определяется равенством

$$\|f - T\|_p = E_n(f)_p$$

неоднозначно (это может быть только при $p = 1$), то через $T_n(f)_p$ обозначается любой из них. Это соглашение в дальнейшем не приведет к недоразумениям.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда через $\Delta_t^r(f)$ будем обозначать конечную разность r-го порядка функции f с шагом t:

$$\Delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f(x + kt).$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$. Через $\omega_r(f)_p$ обозначаем модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве L_p:

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{|t| \leqslant h} \|\Delta_t^r(f)\|_p.$$

4. Пусть $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. По определению полагаем

$$D_n(t)_\lambda = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{h=1}^{n} \lambda_k \cos kt\right\},$$

$$\Phi_n(t)_\lambda = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt\right\},$$

$$V_{n,k}(t)_\lambda = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \cos lt + \sum_{l=n+1}^{n+k} \lambda_l \left(1 - \frac{l-n}{k}\right) \cos lt\right\},$$

$$\Lambda_n(t)_\lambda = V_{n,n+1}(t)_\lambda.$$

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда через $U(f)_p$ обозначаем множество последовательностей λ, для которых ряд (2) является рядом Фурье некоторой функции из L_p. Эту функцию будем обозначать через f_λ или через $f(\cdot)_\lambda$.

Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. Тогда полагаем

$$M(\lambda, n, k)_q = M(n, k)_q = \|V_{n,k}(\cdot)_\lambda - D_n(\cdot)_\lambda\|_q.$$

Совместно с рядами (1) и (2) будем рассматривать тригонометрический ряд

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kt. \tag{13}$$

Если даны два класса тригонометрических рядов Δ и Σ, то через (Δ, Σ) будем обозначать класс последовательностей λ, преобразующих Δ в Σ, т.е. таких, что если ряд (1) принадлежит классу Δ, то ряд (2) принадлежит классу Σ.

Теорема B.1 (см. [1, с.282; 2, с.104]). *Для того чтобы последовательность λ принадлежала любому из классов (в отдельности) (C, C), (L, L) необходимо и достаточно, чтобы ряд* (13) *был рядом Фурье–Стилтьеса.*

Здесь L – множество рядов Фурье, C – множество рядов Фурье функций из C.

Теорема B.2 (см. [3, с.170]. *Для того чтобы ряд* (13) *был рядом Фурье–Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\Phi(\lambda) < \infty. \tag{14}$$

Следствие B.1. *Для того чтобы последовательность λ принадлежала любому из классов (C, C), (L, L) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (14).

Обозначим через Φ множество последовательностей λ, для которых выполнено неравенство (14). Если $\lambda \in \Phi$, то для любой $f \in L_1$ ряд (2) является рядом Фурье некоторой функции из L_1, а для любой $f \in C$ ряд (2) является рядом Фурье функции из C. В соответствии со сказанным ранее эта функция обозначается через f_λ.

5. Теорема B.3 (см. [4, с.21, 22]). *Пусть функция K непрерывна на множестве $\mathbb{R}\times[a,b]$, где a, $b\in\mathbb{R}$, $a<b$; $K(x+2\pi,t)=K(x,t)$ для всех $(x,t)\in\mathbb{R}\times[a,b]$. Тогда, если полунорма $P\in A$, то*

$$P\Big(\int\limits_a^b K(\cdot,t)dt\Big)\leqslant\int\limits_a^b P(K(\cdot,t))dt.$$

Следствие B.2. *Пусть $f\in C$, K – функция непрерывная на $[a,b]$, полунорма $P\in A$. Тогда*

$$P\Big(\int\limits_a^b f(\cdot+t)K(t)dt\Big)\leqslant P(f)\int\limits_a^b|K(t)|dt.$$

Пусть $f\in CP$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Наилучшим приближением порядка n функции f в пространстве CP называется величина

$$E_n(f)=\inf_{T\in H_n}P(f-T).$$

Полином $T_n(f)\in H_n$, для которого выполняется равенство

$$P(f-T_n(f))=E_n(f),$$

называется полиномом наилучшего приближения порядка n функции f в пространстве CP.

Теорема B.4 (см. [4, с.23]). *Пусть $f\in CP$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда в H_n найдется такой полином T, что*

$$P(f-T)=E_n(f). \tag{15}$$

Если полином T определяется равенством (15) неоднозначно, то через $T_n(f)$ обозначаем любой из них.

Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $f\in CP$. Через $\omega_r(f)$ обозначаем модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве CP:

$$\omega_r(f,h)=\sup_{|t|\leqslant h}P(\Delta_t^r(f)).$$

6. Нам понадобится довольно много известных результатов различных авторов. Приводим их формулировки без каких-либо комментариев. При этом, как правило, ссылки даем не на оригинальные работы, где эти результаты содержатся, а на монографии, в которых эти утверждения можно найти.

Теорема B.5 (см. [5, с.117]). *Пусть* $f \in CP$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$P(f - \sigma_{n,k}(f)) \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1 + \frac{n}{k}\right) + 2,7\right)E_n(f).$$

Теорема B.5′(см. [5, с.117]). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\|f - \sigma_{n,k}(f)\|_p \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1 + \frac{n}{k}\right) + 2,7\right)E_n(f)_p.$$

Следствие B.3. *Пусть* $f \in CP$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $P(f - \tau_n(f)) \leqslant 3E_n(f)$.

Следствие B.3′. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. *Тогда* $\|f - \tau_n(f)\|_p \leqslant 3E_n(f)_p$.

Теорема B.6 (см. [5, с.65]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\|D_n\|_1 = \int\limits_Q |D_n| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + 1,4.$$

Теорема B.7 (см. [3, с.593]). *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда* $\|S_n\|_p = \sup\limits_{f \in L_p}\{\|S_n(f)\|_p / \|f\|_p\} < \infty$.

Теорема B.8 (см. [5, с.148]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$. *Тогда*

$$E_n(f^{(-1)}) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)}E_n(f).$$

Теорема B.9 (см. [6, с.250, 251, 242). *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$\|F - S_n(F)\|_p \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)}\|f - S_n(f)\|_p, \tag{16}$$

$$\|\widetilde{F} - S_n(\widetilde{F})\|_p \leqslant \frac{4}{\pi(n+1)}\|f - S_n(f)\|_p. \tag{17}$$

Теорема B.9′. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$. *Тогда*

$$P(F - S_n(F)) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} P(f - S_n(f)), \tag{16′}$$

$$P(\widetilde{F} - S_n(\widetilde{F})) \leqslant \frac{4}{\pi(n+1)} P(f - S_n(f)). \tag{17′}$$

Доказательство теоремы B.9′ аналогично доказательству теоремы B.9.

Теорема B.10 (см. [3, с.92, 93])**.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f)_p = 0$.

Теорема B.11 (см. [5, с.115])**.** *Пусть полунорма* $P \in A$, n, $r \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$P(T^{(r)}) \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^r P\left(\Delta^r_{\frac{\pi}{n}}(T)\right).$$

Следствие B.4. *Пусть полунорма* $P \in A$, n, $r \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$P(T^{(r)}) \leqslant n^r P(T).$$

Теорема B.12 (см. [5, с.115])**.** *Пусть полунорма* $P \in A$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$P(\widetilde{T'}) \leqslant nP(T).$$

Теорема B.13 (см. [5, с.260])**.** *Пусть* $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$. *Тогда*

$$P(f - R_{n,r}(f)) \leqslant 2^{-r} K_1(r) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right),$$

где постоянная $K_1(r)$ *зависит только от* r.

Теорема B.14 (см. [7, с.227])**.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. *Тогда*

$$\|f - R_{n,r}(f)\|_p \leqslant 2^{-r} K_1(r) \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right)_p.$$

§2. Приближение функций суммами Фурье в пространстве L_p

1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $V : L_p \to L_p$. Тогда полагаем

$$\|V\|_p = \sup_{f \in L_p} \frac{\|V(f)\|_p}{\|f\|_p}, \quad \|V\|_{p,m} = \sup_{T \in H_m} \frac{\|V(T)\|_p}{\|T\|_p}.$$

Если оператор V задается соотношением

$$V(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)K(t)dt,$$

а $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, то оператор $(V)_\lambda$ определяется равенством

$$(V)_\lambda(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)K(t)_\lambda dt.$$

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda \in U(f)_p$. Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p E_n(f)_p. \tag{18}$$

Доказательство. Так как $\lambda \in U(f)_p$, то функция $f_\lambda \in L_p$. Принимая во внимание следствие B.3′, имеем

$$\begin{aligned} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|f_\lambda - \tau_n(f_\lambda)\|_p + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\|_p \\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\|_p. \end{aligned} \tag{19}$$

Опираясь на равенства (6) и (8) (при $k = n+1$), находим, что

$$S_n(f_\lambda, x) = \int\limits_Q f_\lambda(x+t)D_n(t)dt = \int\limits_Q f(x+t)D_n(t)_\lambda dt,$$

$$\tau_n(f_\lambda, x) = \int\limits_Q f_\lambda(x+t)\Lambda_n(t)dt = \int\limits_Q f(x+t)\Lambda_n(t)_\lambda dt.$$

Так как для любого полинома $T \in H_n$

$$S_n(T) = T, \quad \tau_n(T) = T,$$

то

$$\begin{aligned}
S_n(f_\lambda, x) &- \tau_n(f_\lambda, x) \\
&= S_n(f_\lambda - (T_n(f)_p)_\lambda, x) - \tau_n(f_\lambda - (T_n(f)_p)_\lambda, x) \\
&= \int\limits_Q (f(x+t) - T_n(f, x+t)_p)(D_n(t)_\lambda - \Lambda_n(t)_\lambda)\, dt \\
&= (S_n - \tau_n)_\lambda (f - T_n(f)_p, x).
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\|S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p \|f - T_n(f)_p\|_p \\
&= \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p E_n(f)_p. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Сопоставляя (19) и (20), приходим к (18).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того,* $\lambda \in \Phi$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + E_n(f)_p(\|(S_n)_\lambda\|_p + 3\Phi(\lambda)). \qquad (21)$$

Доказательство. Для любой функции $g \in L_p$

$$\begin{aligned}
\|(\tau_n)_\lambda(g)\|_p &= \Big\| \int\limits_Q g(\cdot + t)\Lambda_n(t)_\lambda dt \Big\|_p \\
&\leqslant \int\limits_Q \|g(\cdot + t)\|_p |\Lambda_n(t)_\lambda| dt = \|g\|_p \|\Lambda_n(\cdot)_\lambda\|_1.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (9), нетрудно понять, что

$$\Lambda_n(t)_\lambda = \left(1 + \frac{n}{n+1}\right)\Phi_{2n}(t)_\lambda - \frac{n}{n+1}\Phi_{n-1}(t)_\lambda$$

и, следовательно,

$$\|\Lambda_n(\cdot)_\lambda\|_1 \leqslant 2\|\Phi_{2n}(\cdot)_\lambda\|_1 + \|\Phi_{n-1}(\cdot)_\lambda\|_1 \leqslant 3\Phi(\lambda).$$

Таким образом, для любой $g \in L_p$

$$\|(\tau_n)_\lambda(g)\|_p \leqslant 3\Phi(\lambda)\|g\|_p,$$

т.е.

$$\|(\tau_n)_\lambda\|_p \leqslant 3\Phi(\lambda). \qquad (22)$$

Осталось сопоставить последнее неравенство с неравенством (18).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + E_n(f)_p(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Доказательство. Для любой функции $g \in L_p$

$$\|(S_n)_\lambda(g)\|_p = \|\int\limits_Q g(\cdot + t)D_n(t)_\lambda dt\|_p \leqslant \|g\|_p \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1,$$

т.е.

$$\|(S_n)_\lambda\|_p \leqslant \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1. \tag{23}$$

Сопоставляя последнее неравенство с (21), приходим к требуемому утверждению.

Следствие 2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \leqslant 3E_n(f_\lambda)_1 + E_n(f)_1(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Для доказательства достаточно положить в следствии 1 $p = 1$ и принять во внимание, что условие $\lambda \in \Phi$ влечет выполнение соотношения $\lambda \in U(f)_1$ для любой функции $f \in L_1$.

Следствие 3. *Пусть $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)_1 \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. Так как $E_n(g)_1 \to 0$ для любой функции $g \in L_1$ (см. теорему B.10 при $p = 1$), а f и f_λ принадлежат L_1, то

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)_1 = \lim_{n\to\infty} E_n(f_\lambda)_1 = 0.$$

В силу следствия 2

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} &\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \\ &\leqslant 3 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f_\lambda)_1 + \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)_1(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1) \\ &= \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)_1 \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.\end{aligned}$$

2. Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda \in U(f)_p$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 9E_n(f_\lambda)_p + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_p\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p.$$

Доказательство. Так как (см. равенство (4) при $k = n+1$)

$$\begin{aligned}\tau_n(f)_\lambda = \tau_n(f_\lambda) &= \left(1 + \frac{n}{n+1}\right)\sigma_{2n}(f_\lambda) - \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}(f_\lambda)\\ &= \left(1 + \frac{n}{n+1}\right)\sigma_{2n}(f)_\lambda - \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}(f)_\lambda, \qquad (24)\end{aligned}$$

то

$$E_n(\tau_n(f)_\lambda)_p = \left(1 + \frac{n}{n+1}\right)E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_p, \qquad (25)$$

$$E_n(\tau_n(f)_\lambda)_p \leqslant 2E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_p. \qquad (26)$$

Принимая во внимание соотношение

$$S_n(f_\lambda) = S_n(\tau_n(f_\lambda)) = S_n(\tau_n(f)_\lambda)$$

и следствие B.3′, находим

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|f_\lambda - \tau_n(f_\lambda)\|_p + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\|_p\\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(\tau_n(f_\lambda))\|_p\\ &= 3E_n(f_\lambda)_p + \|\tau_n(f)_\lambda - S_n(\tau_n(f)_\lambda)\|_p.\end{aligned}$$

Отсюда, с помощью леммы 1, получаем, что

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant{}& 3E_n(f_\lambda)_p + 3E_n(\tau_n(f)_\lambda)_p\\ &+ \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p E_n(\tau_n(f))_p. \qquad (27)\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства (7) и $\|\Phi_k\|_1 = 1$, для любой функции $g \in L_p$ при m, $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned}E_m(\sigma_k(g))_p = E_m(\sigma_k(g - T_m(g)_p))_p &\leqslant \|\sigma_k(g - T_m(g)_p)\|_p\\ &= \|\int\limits_Q (g(\cdot + t) - T_m(g, \cdot + t)_p)\Phi_k(t)dt\|_p\\ &\leqslant \int\limits_Q \|g - T_m(g)_p\|_p \Phi_k(t)dt\\ &= E_m(g)_p \int\limits_Q \Phi_k(t)dt = E_m(g)_p. \qquad (28)\end{aligned}$$

Теперь, опираясь на соотношение (27) и применяя неравенства (26) и (28), находим, что

$$\begin{aligned}
&\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \\
&\quad \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + 6E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_p + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_p\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p \\
&\quad \leqslant 9E_n(f_\lambda)_p + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_p\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_p.
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 2 и, кроме того,* $\lambda \in \Phi$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 9E_n(f_\lambda)_p + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_p(\|(S_n)_\lambda\|_p + 3\Phi(\lambda)).$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно сопоставить лемму 2 и неравенство (22).

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 9E_n(f_\lambda)_p + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_p(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Для доказательства следствия 4 достаточно сопоставить теорему 2 и неравенство (23).

Следствие 5. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \leqslant 9E_n(f_\lambda)_1 + 2E_n(\sigma_{2n}(f))_1(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Для доказательства достаточно положить в следствии 4 $p = 1$ и принять во внимание, что условие $\lambda \in \Phi$ влечет выполнение соотношения $\lambda \in U(f)_1$ для любой функции $f \in L_1$.

Следствие 6. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \leqslant 2 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. В силу (28)

$$\varlimsup_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)_1.$$

Поэтому, принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f)_1 = 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1 = 0$. Учитывая этот факт и опираясь на следствие 5, находим

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 \\
&\leqslant 9 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f_\lambda)_1 + 6\Phi(\lambda) \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)_1 + 2 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 \\
&= 2 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.
\end{aligned}$$

Следствие 7. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_1 \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1 = 0.$$

Следствие 8. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\|F_\lambda - S_n(F_\lambda)\|_1 \leqslant \pi \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n(\sigma_{2n}(f))_1 \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. Функция $f_\lambda \in L_1$. Применяя неравенство (16) (при $p = 1$), находим, что

$$\|F_\lambda - S_n(F_\lambda)\|_1 \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_1.$$

Осталось воспользоваться следствием 6.

Следствие 9. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in L_1$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\|\widetilde{F}_\lambda - S_n(\widetilde{F}_\lambda)\|_1 \leqslant \frac{8}{\pi} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n(\sigma_{2n}(f))_1 \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство следствия 9 аналогично доказательству следствия 8, но здесь вместо неравенства (16) надо воспользоваться неравенством (17) при $p = 1$.

Замечание 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1$, полунорма $P \in A$. Тогда

$$E_n(\sigma'_{2n}(f)) \leqslant 2nE_n(\sigma_{2n}(f)) \leqslant \pi E_n(\sigma'_{2n}(f)), \tag{29}$$

$$E_n(\tilde{\sigma}'_{2n}(f)) \leqslant \pi E_n(\sigma'_{2n}(f)). \tag{30}$$

Доказательство. Установим (29). Прежде всего заметим, что если полунорма $P \in A$, то полунорма $E_n(\cdot)$ также принадлежит классу A. Применяя следствие B.4 (при $r = 1$) к полунорме $E_n(\cdot)$, имеем

$$E_n(\sigma'_{2n}(f)) \leqslant 2nE_n(\sigma_{2n}(f)).$$

С другой стороны, в силу теоремы B.8

$$E_n(\sigma_{2n}(f)) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} E_n(\sigma'_{2n}(f)).$$

Теперь докажем (30). Применяя теорему B.12 (к полунорме $E_n(\cdot)$) и теорему B.8, имеем

$$E_n(\tilde{\sigma}'_{2n}(f) \leqslant 2nE_n(\sigma_{2n}(f)) \leqslant \pi E_n(\sigma'_{2n}(f)).$$

3. Лемма 3. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda \in U(f)_p$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} E_n(\varkappa_n(f))_p.$$

Доказательство. Принимая во внимание равенства

$$S_n(g) = S_n(\varkappa_n(g)), \quad \tau_n(g) = \tau_n(\varkappa_n(g)),$$

справедливые для любой $g \in L_1$, и учитывая, что $S_n(T) = T$, $\tau_n(T) = T$ для любого $T \in H_n$, имеем

$$\begin{aligned} S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda) &= S_n(\varkappa_n(f_\lambda)) - \tau_n(\varkappa_n(f_\lambda)) \\ &= S_n(\varkappa_n(f_\lambda) - (T_n(\varkappa_n(f))_p)_\lambda) - \tau_n(\varkappa_n(f_\lambda) - (T_n(\varkappa_n(f))_p)_\lambda) \\ &= (S_n - \tau_n)_\lambda(\varkappa_n(f) - T_n(\varkappa_n(f))_p). \end{aligned} \tag{31}$$

Опираясь на равенство (31) и принимая во внимание, что $\varkappa_n(f) \in H_{3n}$, находим, что

$$\begin{aligned} \|S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} \|\varkappa_n(f) - T_n(\varkappa_n(f))_p\|_p \\ &= \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} E_n(\varkappa_n(f))_p. \end{aligned} \tag{32}$$

Так как $\lambda \in U(f)_p$, то функция $f_\lambda \in L_p$. Принимая во внимание следствие B.3′ и неравенство (32), имеем

$$\begin{aligned} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|f_\lambda - \tau_n(f_\lambda)\|_p + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\|_p \\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} E_n(\varkappa_n(f))_p. \end{aligned} \tag{33}$$

Замечание 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_1$. Тогда

$$E_n(\varkappa_n(f))_p \leqslant 3E_n(\sigma_{3n}(f))_p + 2E_n(\sigma_{2n-1}(f))_p.$$

Для доказательства замечания 2 достаточно принять во внимание, что

$$\varkappa_n(f) = \left(1 + \frac{2n}{n+1}\right)\sigma_{3n}(f) - \frac{2n}{n+1}\sigma_{2n-1}(f).$$

Замечание 3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\lambda \in \Phi$. Тогда

$$\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} \leqslant \|(S_n)_\lambda\|_{p,3n} + 3\Phi(\lambda).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_{p,3n} &\leqslant \|(S_n)_\lambda\|_{p,3n} + \|(\tau_n)_\lambda\|_{p,3n} \\ &\leqslant \|(S_n)_\lambda\|_{p,3n} + \|(\tau_n)_\lambda\|_p. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться неравенством (22).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 3 и, кроме того,* $\lambda \in \Phi$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 3E_n(f_\lambda)_p + E_n(\varkappa_n(f))_p(\|(S_n)_\lambda\|_{p,3n} + 3\Phi(\lambda)).$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно сопоставить лемму 3 и замечание 3.

4. Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda \in U(f)_p$. *Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 2^{-r}\|(S_n)_\lambda\|_p\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\|_p + K_2(r)\omega_r\left(f_\lambda, \frac{\pi}{n+1}\right)_p,$$

где постоянная $K_2(r)$ *зависит только от* r.

Доказательство. Положим $h = \frac{\pi}{n+1}$. Пусть r – четное число. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant \|f_\lambda - R_{n,r}(f_\lambda)\|_p + \|R_{n,r}(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\|_p \\ &= \|f_\lambda - R_{n,r}(f_\lambda)\|_p + (n+1)^{-r}\|S_n^{(r)}(f_\lambda)\|_p.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему B.14, находим, что

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 2^{-r}K_1(r)\omega_r(f_\lambda, h)_p + (n+1)^{-r}\|S_n^{(r)}(f_\lambda)\|_p. \tag{34}$$

Далее, опираясь на теорему B.11 (применительно к полунорме $P(\cdot) = \|\cdot\|_p$) и равенство (6), имеем

$$\begin{aligned}(n+1)^{-r}\|S_n^{(r)}(f_\lambda)\|_p &\leqslant 2^{-r}\|\Delta_h^r(S_n(f_\lambda))\|_p \\ &= 2^{-r}\|S_n(\Delta_h^r(f_\lambda))\|_p = 2^{-r}\|\int\limits_Q \Delta_h^r(f_\lambda, \cdot + t)D_n(t)dt\|_p \\ &= 2^{-r}\|(S_n)_\lambda(\Delta_h^r(f))\|_p \leqslant 2^{-r}\|(S_n)_\lambda\|_p\|\Delta_h^r(f)\|_p. \end{aligned}\tag{35}$$

Сопоставление (34) и (35) приводит к неравенству

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 2^{-r}\|(S_n)_\lambda\|_p\|\Delta_h^r(f)\|_p + 2^{-r}K_1(r)\omega_r(f_\lambda, h)_p.$$

Пусть теперь r – нечетное число. Рассуждая, как и ранее, и используя следствие B.4 (полунорма $P(\cdot) = \|\cdot\|_p, r = 1$), имеем

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p &\leqslant (n+1)^{-r-1}\|S_n^{(r+1)}(f_\lambda)\|_p + \|f_\lambda - R_{n,r+1}(f_\lambda)\|_p \\ &\leqslant (n+1)^{-r}\|S_n^{(r)}(f_\lambda)\|_p + \|f_\lambda - R_{n,r+1}(f_\lambda)\|_p \\ &\leqslant 2^{-r}\|(S_n)_\lambda\|_p\|\Delta_h^r(f)\|_p + 2^{-r-1}K_1(r+1)\omega_{r+1}(f_\lambda, h)_p.\end{aligned}$$

Сопоставляя последнее неравенство с неравенством $\omega_{r+1}(f_\lambda, h)_p \leqslant 2\omega_r(f_\lambda, h)_p$, находим, что

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 2^{-r}\{\|S_n)_\lambda\|_p\|\Delta_h^r(f)\|_p + K_1(r+1)\omega_r(f_\lambda, h)_p\}.$$

Следствие 10. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$, $\lambda \in U(f)_p$. Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p \leqslant 2^{-r}\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\|_p + K_2(r)\omega_r\big(f_\lambda, \frac{\pi}{n+1}\big)_p.$$

Для доказательства следствия 10 достаточно сопоставить теорему 4 и неравенство (23).

§3. Приближение функций суммами Фурье в пространстве CP

1. Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$, $\lambda \in U(f)_\infty$. Тогда*

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 3E_n(f_\lambda) + \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 E_n(f).$$

Доказательство. Так как $\lambda \in U(f)_\infty$, то функция $f_\lambda \in C$. Принимая во внимание следствие B.3, имеем

$$\begin{aligned}P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) &\leqslant P(f - \tau_n(f_\lambda)) + P(\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)) \\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda) + P(\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)).\end{aligned} \tag{35}$$

Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, находим, что

$$\begin{aligned}S_n(f_\lambda, x) - \tau_n(f_\lambda, x) &= S_n(f_\lambda - T_n(f)_\lambda, x) - \tau_n(f_\lambda - T_n(f)_\lambda, x) \\ &= \int\limits_Q (f(x+t) - T_n(f, x+t))(D_n(t)_\lambda - \Lambda_n(t)_\lambda)\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя следствие B.2, получаем

$$P(S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)) \leqslant P(f - T_n(f)) \int\limits_Q |D_n(t)_\lambda - \Lambda_n(t)_\lambda| dt$$
$$= E_n(f)\|D_n(\cdot)_\lambda - \Lambda_n(\cdot)_\lambda\|_1 = E_n(f)\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1. \tag{36}$$

Осталось сопоставить (35) и (36).

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. Тогда*

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 3E_n(f_\lambda) + E_n(f)(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Доказательство. Условие $\lambda \in \Phi$ влечет выполнение $\lambda \in U(f)_\infty$ для любой $f \in C$. В силу (22) и (23),

$$\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 \leqslant \|(S_n)_\lambda\|_1 + \|(\tau_n)_\lambda\|_1 \leqslant 3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Сопоставляя сказанное с леммой 4, приходим к теореме 5.

Следствие 11. *Пусть $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. Так как $E_n(g) \leqslant ME_n(g)_\infty$ (M – константа, участвующая в определении полунормы класса A) для любой функции $g \in C$, а $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(g)_\infty = 0$ (теорема B.10 при $p = \infty$), то для любой $g \in CP$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(g) = 0$. Функции f и f_λ принадлежат CP и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = \lim_{n\to\infty} E_n(f_\lambda) = 0.$$

В силу теоремы 5

$$\varlimsup_{n\to\infty} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 3 \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f_\lambda) + \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1)$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty} E_n(f)\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

2. Лемма 5. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in CP$, $\lambda \in U(f)_\infty$. *Тогда*

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 9E_n(f_\lambda) + 2E_n(\sigma_{2n}(f))\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. Рассуждая как при доказательстве неравенства (26), получаем, что

$$E_n(\tau_n(f)_\lambda) \leqslant E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda). \tag{37}$$

Так как полунорма $P \in A$, то $E_n(\cdot)$ также является полунормой класса A. Учитывая этот факт и применяя следствие B.2, для любой функции $g \in CP$ при $m, k \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$E_m(\sigma_k(g)) = E_m\left(\int\limits_Q g(\cdot + t)\Phi_k(t)dt\right) \leqslant E_m(g)\int\limits_Q \Phi_k(t)dt = E_m(g). \tag{38}$$

Так как

$$S_n(f_\lambda) = S_n(\tau_n(f_\lambda)) = S_n(\tau_n(f)_\lambda),$$

то, применяя следствие B.3, находим

$$\begin{aligned} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) &\leqslant P(f_\lambda - \tau_n(f_\lambda)) + P(\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)) \\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda) + P(\tau_n(f_\lambda) - S_n(\tau_n(f_\lambda)) = 3E_n(f_\lambda) \\ &+ P(\tau_n(f)_\lambda - s_n(\tau_n(f)_\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда, с помощью леммы 4, получаем, что

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 3E_n(f_\lambda) + 3E_n(\tau_n(f_\lambda)) + \|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 E_n(\tau_n(f)).$$

Теперь, применяя неравенства (37) и (38), имеем

$$\begin{aligned} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) &\leqslant 3E_n(f_\lambda) + 6E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda)) + 2\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 E_n(\sigma_{2n}(f)) \\ &\leqslant 9E_n(f_\lambda) + 2\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 E_n(\sigma_{2n}(f)). \end{aligned}$$

Теорема 6. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда*

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 9E_n(f_\lambda) + 2E_n(\sigma_{2n}(f))(3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1).$$

Доказательство. Условие $\lambda \in \Phi$ влечет выполнение $\lambda \in U(f)_\infty$ для любой $f \in C$. Как отмечалось в доказательстве теоремы 5, имеет место неравенство

$$\|(S_n - \tau_n)_\lambda\|_1 \leqslant 3\Phi(\lambda) + \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Осталось сопоставить эти факты с леммой 5.

Следствие 12. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f))\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. В силу (38)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f)) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(f).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f) = 0$, и применяя теорему 6, находим

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \\
&\quad \leqslant 9 \lim_{n\to\infty} E_n(f_\lambda) + 6\Phi(\lambda) \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(f) + 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f))\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 \\
&\quad = 2 \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f))\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.
\end{aligned}$$

Следствие 13. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) = 0.$$

Следствие 14. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} nP(F_\lambda - S_n(F_\lambda)) \leqslant \pi \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f))_1\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство. Функция $f_\lambda \in CP$. Применяя неравенство (16′), находим, что

$$P(F_\lambda - S_n(F_\lambda)) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)).$$

Осталось воспользоваться следствием 12.

Следствие 15. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, nP(\widetilde{F}_\lambda - S_n(\widetilde{F}_\lambda)) \leqslant \frac{8}{\pi}\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n(\sigma_{2n}(f)\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1.$$

Доказательство следствия 15 аналогично доказательству следствия 14, но здесь вместо неравенства (16′) надо применить неравенство (17′).

3. Теорема 7. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \Phi$, $f \in CP$. *Тогда*

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda) \leqslant 2^{-r}\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 P\left(\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\right) + K_3(r)\omega_r\left(f_\lambda, \frac{\pi}{n+1}\right),$$

где постоянная $K_3(r)$ *зависит только от* r.

Доказательство. Положим $h = \frac{\pi}{n+1}$. Пусть r – четное число. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) &\leqslant P(f_\lambda - R_{n,r}(f_\lambda)) + P(R_{n,r}(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)) \\ &= P(f_\lambda - R_{n,r}(f_\lambda)) + (n+1)^{-r}P(S_n^{(r)}(f_\lambda)). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему B.13, находим, что

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 2^{-r}K_1(r)\omega_r(f_\lambda, h) + (n+1)^{-r}P(S_n^{(r)}(f_\lambda)). \tag{39}$$

Далее, опираясь на теорему B.11, равенство (6) и следствие B.2, имеем

$$\begin{aligned} (n+1)^{-r}P(S_n^{(r)}(f_\lambda)) &\leqslant 2^{-r}P(\Delta_h^r(S_n(f_\lambda))) \\ &= 2^{-r}P(S_n(\Delta_h^r(f_\lambda))) = 2^{-r}P(\int\limits_Q \Delta_h^r(f_\lambda, \cdot + t)D_n(t)dt) \\ &= 2^{-r}P\left(\int\limits_Q \Delta_h^r(f, \cdot + t)D_n(t)_\lambda dt\right) \\ &\leqslant 2^{-r}\int\limits_Q P(\Delta_h^r(f, \cdot + t))|D_n(t)_\lambda|dt = 2^{-r}\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 P(\Delta_h^r(f)). \end{aligned} \tag{40}$$

Сопоставление (39) и (40) приводит к неравенству

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 2^{-r}\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 P(\Delta_h^r(f)) + 2^{-r}K_1(r)\omega_r(f_\lambda, h).$$

Пусть теперь r – нечетное число. Рассуждая, как и ранее, и используя следствие B.4, имеем

$$\begin{aligned} P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) &\leqslant (n+1)^{-r-1} P(S_n^{(r+1)}(f_\lambda)) + P(f_\lambda - R_{n,r+1}(f_\lambda)) \\ &\leqslant (n+1)^{-r} P(S_n^{(r)}(f_\lambda)) + P(f_\lambda - R_{n,r+1}(f_\lambda)) \\ &\leqslant 2^{-r} \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 P(\Delta_h^r(f)) + 2^{-r-1} K_1(r+1)\omega_{r+1}(f_\lambda, h). \end{aligned}$$

Сопоставляя последнее неравенство с неравенством

$$\omega_{r+1}(f_\lambda, h) \leqslant 2\omega_r(f_\lambda, h),$$

находим, что

$$P(f_\lambda - S_n(f_\lambda)) \leqslant 2^{-r}\{\|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 P(\Delta_h^r(f)) + K_1(r+1)\omega_r(f_\lambda, h)\}.$$

4. Полагая в следствии 13 $P(\cdot) = \|\cdot\|$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 16. *Пусть $\lambda \in \Phi$, $f \in C$. Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\sigma_{2n}(f))_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0, \tag{41}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| = 0, \tag{42}$$

т.е. в условиях следствия 16 ряд Фурье функции f_λ сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

В силу замечания 1 условие (41) эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(\sigma_{2n}(F))_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0. \tag{43}$$

Так как (см. неравенство (38))

$$E_n(\sigma_{2n}(F))_\infty \leqslant E_n(F)_\infty,$$

то соотношение

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(F)_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0$$

влечет выполнение равенства (43).

Таким образом, справедливо

Следствие 17. *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in C$,

$$\lim_{n\to\infty} nE_n(F)_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0.$$

Тогда ряд Фурье функции f_λ *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$.

Следствие 17, в свою очередь, усиливает ранее известное утверждение

Следствие 18 (см. [8, с. 31, 32])**.** *Пусть* $\lambda \in \Phi$, $f \in C$,

$$\lim_{n\to\infty} nE_{[\frac{n+1}{2}]}(F)_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0.$$

Тогда выполнено соотношение (42).

Следствию 18 предшествовали работы [9–11], см. также [3, с. 291–296].

§4. Приближение функций суммами Фурье в пространстве C

1. Теорема 8. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $f \in C$, $\lambda \in U(f)_\infty$; *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$M(\lambda, n, k)_q \leqslant A(q)\alpha(n)(k-1)^{1/p}, \tag{44}$$

где $A(q)$, $\alpha(n)$ *не зависят от* k. *Тогда*

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| \\ \leqslant \left\{\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(f)_p\alpha(n)}{E_n(f_\lambda)_\infty}\right)^p\right) + 3 + A(q)\right\}E_n(f_\lambda)_\infty.\end{aligned}$$

Доказательство. Так как для любого $T \in H_n$ будет

$$\sigma_{n,k}(T) = S_n(T) = T,$$

то, используя равенства (6) и (8), имеем

$$\begin{aligned}\|\sigma_{n,k}(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\| &= \|\sigma_{n,k}(f_\lambda - (T_n(f)_p)_\lambda) - S_n(f_\lambda - (T_n(f)_p)_\lambda)\| \\ &= \|\int_Q (f_\lambda(\cdot + t) - T_n(f, \cdot + t)_p)_\lambda)(V_{n,k}(t) - D_n(t))\,dt\| \\ &= \|\int_Q (f(\cdot + t) - T_n(f, \cdot + t)_p)(V_{n,k}(t)_\lambda - D_n(t)_\lambda)\,dt\|.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и неравенство (44), получаем

$$\begin{aligned}\|\sigma_{n,k}(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\| &\leqslant \|f - T_n(f)\|_p \|V_{n,k}(\cdot)_\lambda - D_n(\cdot)_\lambda\|_q \\ &= E_n(f)_p M(n,k)_q \\ &\leqslant A(q)\alpha(n)(k-1)^{1/p} E_n(f)_p. \end{aligned} \tag{45}$$

Принимая во внимание теорему B.5′ и неравенство (45), имеем

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| &\leqslant \|f_\lambda - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| + \|\sigma_{n,k}(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\| \\ &\leqslant \left(\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1+\frac{n}{k}\right)+3\right)E_n(f_\lambda)_\infty + A(q)\alpha(n)(k-1)^{1/p}E_n(f)_p,\end{aligned}$$

где k – любое натуральное число. Полагая здесь

$$k = \left[\left(\frac{E_n(f_\lambda)_\infty}{E_n(f)_p\alpha(n)}\right)^p\right] + 1,$$

получаем доказываемое утверждение.

Замечание 4. Пусть $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ – последовательность вещественных чисел такая, что последовательность ее абсолютных величин убывает ($|\lambda_k| \downarrow$), $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M(\lambda, n, k)_2 \leqslant \frac{|\lambda_{n+1}|}{\sqrt{\pi}}\sqrt{k-1}. \tag{46}$$

Доказательство. При $k = 1$ соотношение (46) очевидно, ибо $V_{n,1}(t)_\lambda = D_n(t)_\lambda$. Пусть $k > 1$. Тогда, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\begin{aligned}\|V_{n,k}(\cdot)_\lambda - D_n(\cdot)_\lambda\|_2^2 &= \frac{1}{\pi^2}\|\sum_{l=n+1}^{n+k-1}\lambda_l\left(1-\frac{l-n}{k}\right)\cos lt\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{l=n+1}^{n+k-1}\lambda_l^2\left(1-\frac{l-n}{k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{l=n+1}^{n+k-1}\lambda_l^2 \leqslant \frac{\lambda_{n+1}^2}{\pi}(k-1).\end{aligned}$$

2. Теорема 9. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $f \in C$, $\lambda \in U(f)_\infty$; при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство (44). Тогда*

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| \leqslant \frac{8}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(\sigma_{2n}(f))_p \alpha(n)}{E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty}\right)^p\right)$$

$$\times E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty + (9 + 2A(q))E_n(f_\lambda)_\infty. \qquad (47)$$

Доказательство. Принимая во внимание следствие B.3′ (при $p = \infty$) и равенство $S_n(f_\lambda) = S_n(\tau_n(f_\lambda))$, имеем

$$\begin{aligned}\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| &\leqslant \|f_\lambda - \tau_n(f_\lambda)\| + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(f_\lambda)\| \\ &\leqslant 3E_n(f_\lambda)_\infty + \|\tau_n(f_\lambda) - S_n(\tau_n(f_\lambda))\| \\ &= 3E_n(f_\lambda)_\infty + \|\tau_n(f)_\lambda - S_n(\tau_n(f)_\lambda)\|.\end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему 8, находим, что

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| \leqslant 3E_n(f_\lambda)_\infty$$
$$+ \left\{\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(\tau_n(f))_p \alpha(n)}{E_n(\tau_n(f)_\lambda)_\infty}\right)^p\right) + 3 + A(q)\right\} E_n(\tau_n(f)_\lambda)_\infty. \qquad (48)$$

Сопоставляя (48) с соотношениями (25) и (26), получаем

$$\|f_{la} - S_n(f_\lambda)\| \leqslant 3E_n(f_\lambda)_\infty$$
$$+ 2\left\{\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(\sigma_{2n}(f))_p \alpha(n)}{E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_\infty}\right)^p\right) + 3 + A(q)\right\} E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_\infty.$$

Теперь, применяя неравенство

$$E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_\infty \leqslant E_n(f_\lambda)_\infty$$

(см. неравенство (28)), имеем

$$\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| \leqslant \frac{8}{\pi^2} \ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(\sigma_{2n}(f))_p \alpha(n)}{E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_\infty}\right)^p\right)$$
$$\times E_n(\sigma_{2n}(f)_\lambda)_\infty + (9 + 2A(q))E_n(f_\lambda)_\infty.$$

Следствие 19. *Пусть* $f \in C$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\lambda \in U(f)_\infty$; *при всех* n, $k \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* (44). *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| \leqslant \frac{8}{\pi^2} \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty \ln(1+n(E_n(\sigma_{2n}(f))_p\alpha(n))^p).$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \ln\left(1 + n\left(\frac{E_n(\sigma_{2n}(f))_p\alpha(n)}{E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty}\right)^p\right),\\
\beta_n &= \ln(1 + n(E_n(\sigma_{2n}(f))_p\alpha(n))^p),\\
\gamma_n &= E_n(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty.
\end{aligned}$$

Так как $f_\lambda \in C$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f_\lambda)_\infty = 0$. Поэтому, в силу теоремы 9, достаточно доказать соотношение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \gamma_n\alpha_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \gamma_n\beta_n$. Ясно, что

$$\alpha_n \leqslant \beta_n + \ln(1 + E_n^{-p}(\sigma_{2n}(f_\lambda))_\infty).$$

Так как $\lim\limits_{n\to 0+} x\ln(1+x^{-p}) = 0$, то, умножая последнее неравенство на бесконечно малую γ_n ($\gamma_n \leqslant E_n(f_\lambda)_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma_n\alpha_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma_n\beta_n.$$

Следствие 20. *Пусть* $f \in C$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\lambda \in U(f)_\infty$; *при всех* n, $k \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* (44). *Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\sigma_n(f_\lambda))_\infty \ln(1 + n(E_n(\sigma_{2n}(f))_p\alpha(n))^p) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\| = 0,$$

т.е. ряд Фурье функции f_λ *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$.

§5. Сходимость рядов Фурье на множестве

1. Теорема 10. *Пусть* $f \in L_1$, $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\lambda \in U(f)_1$, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $s : E \to \mathbb{R}$; *при всех* n, $k \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* (44). *Пусть, далее,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/p}\alpha(n)E_n(\varkappa_n(f))_p < \infty, \tag{49}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\sigma_n(f_\lambda, x) - S(x)| = 0. \tag{50}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S_n(f_\lambda, x) - S(x)| = 0. \tag{51}$$

Доказательство. Рассуждая, как при установлении соотношения (31), получаем, что

$$\begin{aligned} &S_n(f_\lambda, x) - \sigma_{n,k}(f_\lambda, x) \\ &= \int\limits_Q (\varkappa_n(f, x+t) - T_n(\varkappa_n(f), x+t))_p)(D_n(t)_\lambda - V_{n,k}(t)_\lambda)\, dt. \end{aligned} \tag{52}$$

Опираясь на соотношение (52) и применяя неравенство Гельдера, находим

$$\|S_n(f_\lambda) - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| \leqslant \|\varkappa_n(f) - T_n(\varkappa_n(f))_p\|_p \times \|D_n(\cdot)_\lambda - V_{n,k}(\cdot)_\lambda\|_q. \tag{53}$$

В силу условия (49) существует такая постоянная $K_4(f)$, не зависящая от n, что при любом $n \in \mathbb{N}$ будет

$$n^{1/p}\alpha(n)E_n(\varkappa_n(f))_p \leqslant K_4(f). \tag{54}$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Положим $k = [n\varepsilon]+1$. Тогда, в силу (53) и неравенства (44), имеем

$$\begin{aligned} \|S_n(f_\lambda) - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| &\leqslant A(q)\alpha(n)(k-1)^{1/p}E_n(\varkappa_n(f))_p \\ &\leqslant A(q)\alpha(n)n^{1/p}\varepsilon^{1/p}E_n(\varkappa_n(f))_p. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (54), получаем

$$\|S_n(f_\lambda) - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| \leqslant A(q)K_4(f)\varepsilon^{1/p}.$$

В силу равенства (4) и ограниченности $\frac{n}{k}$ $\left(\frac{n}{k} < \frac{n}{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\right)$, из соотношения (50) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\sigma_{n,k}(f_\lambda, x) - S(x)| = 0.$$

Из сказанного выше вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in E} |S_n(f_\lambda, x) - S(x)| \\
&\qquad \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n(f_\lambda) - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in E} |\sigma_{n,k}(f_\lambda, x) - S(x)| \\
&\qquad = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n(f_\lambda) - \sigma_{n,k}(f_\lambda)\| \leqslant A(q)K_4(f)\varepsilon^{1/p}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что ε произвольно мало, заключаем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S_n(f_\lambda, x) - S(x)| = 0.$$

Следствие 21. *Пусть* $1 < p < \infty$, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $s : E \to \mathbb{R}$, *функция* $f \in L_1$ *такова, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/p} E_n(\varkappa_n(f))_p < \infty. \tag{55}$$

Тогда соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S_n(f, x) - s(x)| = 0, \tag{56}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\sigma_n(f, x) - s(x)| \tag{57}$$

эквивалентны, т.е. выполнение одного из соотношений (56) или (57) влечет выполнение другого.

Доказательство. То, что соотношение (57) влечет (56), следует из теоремы 10, в которой надо положить $\lambda_k = 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. С другой стороны, соотношение (56) всегда влечет (57), даже без выполнения неравенства (55).

2. Теорема 11. *Пусть* $f \in L_1$, $\lambda \in U(f)_1$, $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, $s : E \to \mathbb{R}$. *Пусть, далее*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\sigma_n(f_\lambda, x) - s(x)| = 0, \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\varkappa_n(f))_\infty \|D_n(\cdot)_\lambda - \Lambda_n(\cdot)_\lambda\|_1 = 0. \tag{59}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S_n(f_\lambda, x) - s(x)| = 0. \tag{60}$$

Доказательство. Принимая во внимание равенство (24), легко понять, что (58) влечет соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\tau_n(f_\lambda, x) - s(x)| = 0.$$

Опираясь на равенство (52) (при $k = n + 1$, $p = \infty$), находим, что

$$\|S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)\| \leqslant E_n(\varkappa_n(f))_\infty \int\limits_Q |D_n(t)_\lambda - \Lambda_n(t)_\lambda| dt.$$

Отсюда и (59) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)\| = 0.$$

Теперь, опираясь на сказанное выше, имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{x\in E} |s(x) - S_n(f_\lambda, x)| \\
&\qquad \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |s(x) - \tau_n(f_\lambda, x)| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \|S_n(f_\lambda) - \tau_n(f_\lambda)\| = 0.
\end{aligned}$$

Замечание 5. Применяя изложенные выше утверждения к случаю, когда $\lambda_k = 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, полезно иметь в виду теоремы B.6 и B.7. Часть из этих результатов известна и нашла свое отражение в монографии [5].

Литература

1. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 1. М., 1965.
2. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* М.-Л., 1939.
3. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М., 1961.
4. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
5. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
6. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
7. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* СПб., 1995.
8. В. В. Жук, *О некоторых приложениях обынтегрированного ряда Фурье.* — Вестн. ЛГУ, сер. мат., мех., астр,, вып. 2, No. 7 (1966), 29–34.
9. R. Salem, *New theorems on the convergence of Fourier series.* — Proc. Konik. Nederland. Akad. Indag. Math. **16** (1954), 550–555.
10. Ф. И. Харшиладзе, *Множители равномерной сходимости и равномерная суммируемость.* — Тр. Тбилиск. мат. ин-та, **26** (1959), 121–130.
11. R. Bojanič, *On uniform convergence of Fourier series.* — Publ. Inst. math. Acad. serbe sci. **10** (1956), 153–158.

Zhuk V. V. On approximating periodic functions by the Fourier sums.

Let L_p, $1 \leqslant p < \infty$, be the space of 2π-periodic functions f with the norm $\|f\|_p = \big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p\big)^{1/p}$, and let $C = L_\infty$ be the space of continuous 2π-periodic functions with the norm $\|f\|_\infty = \|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Let CP be the subspace of C with a seminorm P that is invariant with respect to translation and such that $P(f) \leqslant M\|f\|$ for every $f \in C$. By $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(f)$ we denote the Fourier series of the function f, and let $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ be a sequence of real numbers for which $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k A_k(f)$ is the Fourier series of a certain function $f_\lambda \in L_p$.

The paper considers questions related to approximating the function f_λ by its Fourier sums $S_n(f_\lambda)$ on a point set and on the spaces L_p and CP. Estimates of $\|f_\lambda - S_n(f_\lambda)\|_p$ and $P(f_\lambda - S_n(f_\lambda))$ are obtained by using the structural characteristics (the best approximations and the modules of continuity) of the functions f and f_λ. As a rule, the essential part of deviation is estimated with the use of the structural characteristics of the function f.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 25 сентября 2009 г.