Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

ЁМКОСТЬ ПОЛИКОНДЕНСАТОРА И МОДУЛЬ СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ МЕР

**Восьмидесятилетию дня рождения
Игоря Петровича Митюка
посвящается**

В данной работе рассматриваются емкость поликонденсатора и модули семейств мер, связанных с кривыми, соединяющими пластины поликонденсатора, и установлено равенство между этими величинами. Также получено соотношение между емкостью поликонденсатора и модулем семейства векторых мер, связанных с классом функций, допустимых для емкости поликонденсатора. Эти результаты являются обобщением соответствующих результатов М. Оцуки и Х. Айкавы [5, теоремы 1 и 2].

Пусть G – область в R^n, $a \cdot b$ – скалярное произведение двух векторов, $w : G \to R^+$ – вес Макенхаупта [7, §2.4], $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ – матрица с измеримыми элементами, удовлетворяющая условию

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\eta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \leqslant c_0^2 w(x)^{2/p} |\eta|^2,$$

где $c_0 \geqslant 1$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n$, $p > 1$.

Обозначим

$$\xi_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^n) \in R^n, k = 1, 2, \dots, m, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m),$$

$$\mathcal{A}[\xi_k] = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_k^i \xi_k^j \right)^{1/2}, \quad \mathcal{A}_p(\xi) = \left(\int\limits_G \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathcal{A}[\xi_k]^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Ключевые слова : емкость, модуль, поликонденсатор, векторная мера, кривые, поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–2810-2008.1), РФФИ (грант 08-01-000 28) и ДВО РАН (грант 06-III-A-01-013).

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Известно, что для положительно определённой матрицы существует квадратный корень, который тоже является положительно определённой матрицей. Обозначим соответствующие матрицы через $\sqrt{\mathcal{A}}$ и $\sqrt{\mathcal{B}}$. Из предыдущих неравенств следует, что для любого $\eta \in R^n$

$$\begin{gathered} c_0^{-1} w(x)^{1/p} |\eta| \leqslant |\sqrt{\mathcal{A}}\eta| \leqslant c_0 w(x)^{1/p} |\eta|, \\ c_0^{-1} w(x)^{-1/p} |\eta| \leqslant |\sqrt{\mathcal{B}}\eta| \leqslant c_0 w(x)^{-1/p} |\eta|. \end{gathered} \tag{1}$$

Определим (p, w)-модуль семейства мер Σ в G следующим равенством:

$$M_{p,w}(\Sigma) = \inf \int\limits_G \rho^p w \, dx,$$

где инфимум берётся по всем неотрицательным борелевским функциям ρ таким, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho \, d\mu \geqslant 1$ для любой меры $\mu \in \Sigma$. Если Γ – некоторое семейство локально спрямляемых кривых, то с каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ можно сопоставить меру H^1_γ в R^n с помощью равенства $H^1_\gamma(A) = H^1(\gamma \cap A)$ для любого измеримого множества $A \subset R^n$, где H^1 – одномерная мера Хаусдорфа. Под (p, w)-модулем семейства кривых Γ будем понимать (p, w)-модуль семейства мер $\{H^1_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. В случае когда $w \equiv 1$, соответствующие модули будем обозначать через M_p.

Определим векторную меру $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, где каждая компонента ν_i представляет собой меру со знаком. Полную вариацию $|\nu|$ векторной меры ν определим следующим образом:

$$|\nu|(E) = \sup \sum_j \left(\sum_{i=1}^n (\nu_i(E_j))^2 \right)^{1/2}$$

для любого борелевского множества E, где супремум берётся по всем разбиениям $\{E_j\}$ множества E.

Семейство векторных мер назовём (p, w)-исключительным, если (p, w)-модуль семейства их полных вариаций равен нулю.

Если η – некоторая вектор-функция и ν – векторная мера, то будем писать $\eta \wedge \nu$, если $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta \cdot d\nu \geqslant 1$. Если $\mathcal{F}$ – некоторое семейство векторных мер, то будем говорить, что η (p, w)-почти допустима для

$\mathcal{F}$, если $\eta \wedge \nu$ для всех мер $\nu \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$, где $\mathcal{F}_0$ – (p,w)-исключительное семейство.

Назовём поликонденсатором конструкцию

$$F = \{(F_{01}, F_{11}), \ldots, (F_{0m}, F_{1m}), G\},$$

где $F_{ik} \subset \bar{G}$ – замкнутые множества, удовлетворяющие условию $F_{0k} \cap F_{1k} = \varnothing$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m$. Множества F_{ik} называются пластинами поликонденсатора.

Обозначим через Γ_k семейство локально спрямляемых кривых, соединяющих F_{0k} и F_{1k} в G, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$. Для этих кривых определены семейство векторных мер $d\Gamma_k = \{dx|_\gamma, \gamma \in \Gamma_k\}$ и семейство мер $|d\Gamma| = \{ds|_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, где $ds = |dx|$. Более общо, для любой матрицы $Q = (q_{ij})$ введём обозначения $|Q\,dx||_\gamma = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} q_{ij}\,dx_i dx_j|_\gamma}$, $|Q\,d\Gamma| = \{|Q\,dx||_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для (p,w)-почти всех кривых, если семейство кривых, для которого оно не выполняется, является (p,w)-исключительным.

Модуль поликонденсатора F определим следующим образом:

$$M_{\mathcal{A},p}(F) = \inf\{\mathcal{A}_p(\xi)^p : \xi_k \ \ (p,w)\text{-почти допустима для } d\Gamma_k, \ \ k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Функции $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, использующиеся в определении модуля, назовём допустимыми для модуля.

Согласно [7, п. 4.4], функцию v назовём (p,w)-точной в G, если она абсолютно непрерывна на (p,w)-почти всех кривых в G и $\int\limits_G |\nabla v|^p w\,dx < \infty$. Пусть $\mathcal{D}(E_0, E_1, G)$ – класс (p,w)-точных функций, $\to 0$ при $x \to E_0 \cap \bar{G}$ по (p,w)-почти всем кривым в G и $\to 1$ при $x \to E_1 \cap \bar{G}$ по (p,w)-почти всем кривым в G, а $\mathcal{D}^*(E_0, E_1, G)$ – класс (p,w)-точных функций, равных 0 и 1 в некоторых окрестностях E_0 и E_1 соответственно.

Обозначим $\nabla u = (\nabla u_1, \ldots, \nabla u_m)$, $\nabla\mathcal{D} = \{\nabla u : u_k \in \mathcal{D}(F_{0k}, F_{1k}, G)$, $k = 1, 2, \ldots, m\}$. Аналогично введём $\nabla\mathcal{D}^*$.

Ёмкости поликонденсатора F определим следующим образом:

$$C_{\mathcal{A},p}(F) = \inf\{\mathcal{A}_p(\nabla u)^p : \nabla u \in \nabla\mathcal{D}\},$$
$$C^*_{\mathcal{A},p}(F) = \inf\{\mathcal{A}_p(\nabla u)^p : \nabla u \in \nabla\mathcal{D}^*\}.$$

Отметим, что ёмкости и модули поликонденсаторов на римановом многообразии без края в случае, когда $\mathcal{A}$ является единичной матрицей, изучались В. В. Ассевым и Б. Ю. Султановым в работе [1].

Функцию $u = (u_1, \dots, u_m)$ такую, что $\nabla u \in \nabla\mathcal{D}$ ($\nabla u \in \nabla\mathcal{D}^*$), назовём допустимой для соответствующей ёмкости.

Из оценок (1) следует, что

$$\frac{c_0^{-1}}{n} w^{1/p} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |\nabla u_k|^2} \leqslant \frac{c_0^{-1}}{n} w^{1/p} \sum_{k=1}^{m} |\nabla u_k| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u_k|$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u_k| \leqslant c_0 w^{1/p} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\nabla u_k| \leqslant c_0 w^{1/p} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |\nabla u_k|^2}.$$

Значит, норма $\|u\|_1 = \mathcal{A}_p(\nabla u)$ эквивалентна норме

$$\|u\|_2 = \left(\int\limits_G \left(\sum_{k=1}^{m} |\nabla u_k|^2 \right)^{p/2} w \, dx \right)^{1/p}$$

и по этой норме пространство функций u является рефлексивным. Используя стандартные рассуждения (см., напр., [1]), получим, что существует экстремальная функция, которая является пределом допустимых функций и для которой достигается инфимум в определениях емкостей $C_{\mathcal{A},p}(F)$ и $C^*_{\mathcal{A},p}(F)$.

Заметим, что инфимум в определении ёмкости конденсатора можно брать по функциям, являющимися пределами допустимых функций в пространстве с нормой $\|u\|_{\mathcal{A},p}$. Такие функции назовём обобщённо-допустимыми для ёмкости.

Докажем теперь теорему, являющуюся обобщением теоремы 1 из [5].

Теорема 1. $C_{\mathcal{A},p}(F) = M_{\mathcal{A},p}(d\Gamma) = M_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma|)$.

Доказательство разобьём на три этапа.

а) Докажем, что $M_{\mathcal{A},p}(F) \leqslant C_{\mathcal{A},p}(F) < \infty$. Возьмём произвольные функции $u_k \in \mathcal{D}(F_{0k}, F_{1k}, G)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Это можно сделать вследствие того, что для любого k, $k = 1, 2, \dots, m$, класс $\mathcal{D}(F_{0k}, F_{1k}, G)$ непуст. Получим, что $C_{\mathcal{A},p}(F) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_G \mathcal{A}_p[\nabla u_k]^p \, dx < \infty$. Рассмотрим

произвольную кривую $\gamma \in \Gamma_k$. Для любых двух точек a и b на этой кривой $\int\limits_\gamma \nabla u_k \cdot dx \geqslant u_k(b) - u_k(a)$. Устремляя b к F_{1k} и a к F_{0k} по кривой γ, получим, что $\int\limits_\gamma \nabla u_k \cdot dx \geqslant 1$. Рассмотрим вектор-функции $\xi_k = \nabla u_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Для любой $\gamma \in \Gamma_k$ имеем $\int\limits_\gamma \xi_k \cdot dx \geqslant 1$. Следовательно, $M_{\mathcal{A},p}(F) \leqslant \int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} \mathcal{A}_p[\nabla u_k]^p\, dx$. Отсюда в силу произвольности функций u_k утверждение доказано.

в) Докажем, что $M_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|) \leqslant M_{\mathcal{A},p}(F)$. Для этого возьмём вектор-функции ξ_k, (p,w)-почти допустимые для $d\Gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда для (p,w)-почти всех $\gamma \in \Gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$,

$$1 \leqslant \int\limits_\gamma \xi_k \cdot dx = \int\limits_\gamma \sqrt{\mathcal{A}}\xi_k \cdot \sqrt{\mathcal{B}}dx$$
$$\leqslant \int\limits_\gamma |\sqrt{\mathcal{A}}\xi_k||\sqrt{\mathcal{B}}dx| \leqslant \int\limits_\gamma \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\xi_k||\sqrt{\mathcal{B}}dx|.$$

Отсюда следует, что функция $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\xi_k|$ допустима для $|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|$. Значит,

$$\int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\xi_k|^p\, dx \geqslant M_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|).$$

В силу произвольности ξ_k утверждение в) доказано.

с) Докажем, что $C_{\mathcal{A},p}(F) \leqslant M_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|)$. Заметим сначала, что $M_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|) = M_{p,w}(w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|)$. Пусть ρ – неотрицательная функция такая, что $\int\limits_G \rho^p w\, dx < \infty$ и

$$\int\limits_\gamma \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}dx| \geqslant 1 \tag{2}$$

для любой $\gamma \in \Gamma$. Введём функции

$$u_k(x) = \inf \int\limits_\gamma \rho w^{1/p}|\sqrt{\mathcal{B}}dx|,$$

где инфимум берётся по всем кривым, соединяющим F_{0k} с точкой $x \in G$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

В силу оценок (1) и свойств модуля из [6, Теорема 3]

$$\int\limits_{\gamma} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leqslant c_0 \int\limits_{\gamma} \rho \, ds < \infty \tag{3}$$

для (p, w)-почти всех кривых $\gamma \subset G$. Следовательно, для таких кривых

$$|u_k(b) - u_k(a)| \leqslant \int\limits_{\widetilde{ab}} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leqslant c_0 \int\limits_{\widetilde{ab}} \rho \, ds \tag{4}$$

для любых точек a, b на γ, где $\widetilde{ab}$ – дуга кривой γ между точками a и b. Отсюда получаем, что функция u_k абсолютно непрерывна на (p, w)-почти всех кривых в G и $|\partial u_k / \partial x_i| \leqslant c_0 \rho$, $i = 1, 2, \ldots, n$, откуда следует, что $\nabla u_k \in L^p_w(G)$. Следовательно, функция u_k является (p, w)-точной в G.

Докажем теперь, что

$$|\sqrt{\mathcal{A}(x)} \nabla u_k(x)| \leqslant \rho(x) w(x)^{1/p} \quad \text{почти всюду} \quad \text{в} \quad G. \tag{5}$$

Возьмём счётное всюду плотное множество векторов $\{\eta_i\}$ на единичной сфере. Тогда неравенство (4) имеет место для почти всех отрезков, параллельных одному из векторов η_i. Значит,

$$|u_k(a + h\xi_i) - u_k(a)| \leqslant \int\limits_0^h \rho(a + t\xi_i) w(a + t\xi_i)^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}(a + t\xi_i)} \xi_i| \, dt$$

для почти всех $a \in G$. Деля на h и переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$|\xi_i \cdot \nabla u_k(a)| \leqslant \rho(a) w(a)^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}(a)} \xi_i| \tag{6}$$

для почти всех $a \in G$. Если $\nabla u_k(a) = 0$, то требуемое неравенство доказано при $x = a$. Если $\nabla u_k(a) \neq 0$, то возьмём последовательность $\xi_i \to \mathcal{A}(a) \nabla u_k(a) / |\mathcal{A}(a) \nabla u_k(a)|$ в (6). Получим требуемое неравенство.

Функция ρ удовлетворяет неравенству (3) для (p, w)-почти всех кривых γ в G. Возьмём такую кривую γ, соединяющую F_{0k} и F_{1k} и параметризуем её параметром t. Пусть уравнение этой кривой имеет вид $x = x(t)$, где $x(t) \to F_{ik}$ при $t \to t_i$, $i = 0, 1$. Имеем:

$$0 \leqslant u_k(x(t)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| \leqslant c_0 \int\limits_{t_0}^{t} \rho \, ds \to 0$$

при $t \to t_0$. Отсюда следует, что по (p, w)-почти всем кривым $u_k(x) \to 0$, когда $x \to F_{0k}$. Докажем теперь, что $\liminf u_k(x) \geqslant 1$ при $x \to F_{1k}$ по (p, w)-почти всем кривым. Предположим противное, что для кривой γ, для которой выполняется неравенство (3), указанный нижний предел равен $\alpha < 1$. Пусть $\varepsilon = 1 - \alpha$. По определению, существует t, $t_0 < t < t_1$, такое, что

$$|u_k(x(t)) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int\limits_t^{t_1} \rho\, ds < \frac{\varepsilon}{3c_0}.$$

По определению $u(x)$, существует кривая γ', соединяющая $x(t)$ с F_{0k} и такая, что

$$\int\limits_{\gamma'} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| < u(x(t)) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если γ'' – часть кривой γ, соответствующая значениям параметра (t, t_1), то кривая $\gamma' \cup \gamma'' \in \Gamma$ и

$$\int\limits_{\gamma' \cup \gamma''} \rho w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} dx| < u(x(t)) + \frac{\varepsilon}{3} + c_0 \int\limits_t^{t_1} \rho\, ds < \alpha + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = 1.$$

Это противоречит неравенству (2).

Следовательно, мы получили, что функции $\tilde{u}_k(x) = \min(u_k(x), 1) \in \mathcal{D}\ (F_{0k}, F_{1k}, G)$. Поэтому, используя определение ёмкости и неравенство (5), находим

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{A},p}(F) &\leqslant \int\limits_G \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathcal{A}_p[\nabla \tilde{u}_k]^p\, dx \leqslant \int\limits_G \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathcal{A}[\nabla u_k]^p\, dx \\ &= \int\limits_G \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u_k|^p\, dx \leqslant \int\limits_G \rho^p w\, dx. \end{aligned}$$

Взяв инфимум по функциям ρ, получим

$$C_{\mathcal{A},p}(F) \leqslant M_{p,w}(w^{1/p} |\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma|) = M_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma|).$$

Теорема доказана.

Далее будем рассматривать ёмкость поликонденсатора $C^*_{\mathcal{A},p}$.

Следующая теорема является обобщением вариационного равенства для экстремальной функции ёмкости конденсатора [3, теорема 2].

Теорема 2. *Пусть $v = (v_1, \dots, v_m)$ – функция, являющаяся разностью двух обобщённо-допустимых функций, а $(u_1^0, \dots, u_m^0)$ – экстремальная функция для ёмкости поликонденсатора. Тогда для каждой точки $x \in G$ существуют номера $k^{\pm}(x)$, $1 \leqslant k^{\pm}(x) \leqslant m$, такие, что*

$$\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_{k^+(x)}|^{p-2} \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_{k^+(x)} \cdot \sqrt{\mathcal{A}}\nabla v_{k^+(x)})\, dx \geqslant 0,$$

$$\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_{k^-(x)}|^{p-2} \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_{k^-(x)} \cdot \sqrt{\mathcal{A}}\nabla v_{k^-(x)})\, dx \leqslant 0,$$

При этом $|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{k^+(x)}| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_k|$ в каждой точке G.

Доказательство. Возьмём последовательность положительных чисел $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$. Для фиксированного $x \in G$ с конечными значениями ∇u^0_k, ∇v_k пусть I – множество всех натуральных чисел от 1 до m такое, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_k| = |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_i|, \qquad i \in I,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_k| > |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_i|, \qquad i \notin I.$$

Обозначим $u_{jk} = u^0_k + \varepsilon_j v_k$. Из второго неравенства выше следует, что при достаточно малых ε_j и для всех номеров $i \notin I$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_k| > |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{ji}|. \tag{7}$$

Рассмотрим функции

$$g_j = \frac{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{jk}|^p - \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_k|^p}{p\,\varepsilon_j}, \qquad f_l = \sup_{j\geqslant l} g_j.$$

Пусть для определённого j $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{jk}| = |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{ji}|$. Возможны два случая:

(1) 1) $i \notin I$. В этом случае $g_j < 0$ в силу (7).

(2) 2) $i \in I$. Тогда, используя рассуждения из [3, Теорема 2], получим:

$$g_j = \frac{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{ji}|^p - |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_i|^p}{p\varepsilon_j} = |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_i|^{p-2}\left(\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u^0_i \cdot \sqrt{\mathcal{A}}\nabla v_i\right) + o(1).$$

Отсюда замечаем, что функции f_l ограничены сверху некоторой суммируемой функцией. Кроме того, по определению экстремальной и допустимой функций легко видеть, что $\int\limits_G f_l\,dx \geqslant 0$. Последовательность $\{-f_l\}$ является монотонно возрастающей и имеет равномерно ограниченные сверху интегралы. Применяя теорему Б. Леви, получаем, что почти всюду в G существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} f_l(x)$, который является суммируемой функцией и возможен предельный переход под знаком интеграла. Это означает, что g_l не может стремиться к $-\infty$ на множестве положительной меры, следовательно, случай 1), расмотренный выше, может выполняться для бесконечного числа номеров j лишь на множестве нулевой меры. В остальных точках области G имеем $f(x) = |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_i^0|^{p-2}\left(\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_i^0 \cdot \sqrt{\mathcal{A}}\nabla v_i\right)$. Обозначая $i = k^+(x)$ и переходя к пределу при $l \to \infty$ в интеграле $\int\limits_G f_l\,dx \geqslant 0$, получим первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично, если рассмотреть функции $u_{jk} = u_k^0 - \varepsilon_j v_k$.

Пусть $q = p/(p-1)$. Определим модуль семейства мер $\nabla\mathcal{D}^*$ следующим образом:

$$\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) = \inf \mathcal{B}_q(\xi)^q,$$

где инфимум берётся по всем $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ таким, что для всех $\nabla u \in \nabla\mathcal{D}^*$ имеем неравенство $\int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (\xi_k \cdot \nabla u_k)\,dx \geqslant 1$. Такие функции ξ назовём допустимыми для этого модуля.

Докажем аналог теоремы 2 из [5].

Теорема 3. *Если* $C^*_{\mathcal{A},p}(F) = 0$, *то* $\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) = \infty$; *если* $C^*_{\mathcal{A},p}(F) > 0$, *то*

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p}\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)^{1/q} = 1.$$

Доказательство. Пусть $\Xi = \{\xi : \int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{B}}\xi_k|^q\,dx \leqslant 1\}$. Докажем, что

$$\sup_{\xi\in\Xi} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx = \left(\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Действительно, по неравенству Гёльдера

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx = \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k \cdot \sqrt{\mathcal{B}}\xi_k)\,dx$$
$$\leqslant \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k| \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{B}}\xi_k|\,dx$$
$$\leqslant \left(\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{B}}\xi_k|^q\,dx\right)^{1/q}$$
$$\leqslant \left(\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

С другой стороны, рассмотрим функции

$$\xi_i = \frac{\left(\max\limits_k |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|\right)^{p-2} \mathcal{A}\nabla u_i}{\left(\int\limits_G \max\limits_k |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|^p\,dx\right)^{1/q}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Для них

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{B}}\xi_k|^q\,dx = 1$$

и

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx = \left(\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \sup_{\xi\in\Xi} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx = C^*_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p}. \tag{8}$$

Используя [4, глава VI, предложение 1.1], получим:

$$\sup_{\xi\in\Xi} \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx$$
$$\leqslant \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \sup_{\xi\in\Xi} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\,dx = C^*_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p}.$$

Если $C^*_{\mathcal{A},p}(F)=0$, то для любого $\xi\in\Xi$ имеем равенство $\int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(\nabla u_k\cdot\xi_k)\,dx = 0$, то есть не существует функций, допустимых для $\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$, значит, $\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)=\infty$. Поэтому можно считать, что $C^*_{\mathcal{A},p}(F)>0$.

Пусть $(u_1^0,\dots,u_m^0)$ – экстремальная функция для ёмкости поликонденсатора. Тогда

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m}(\nabla u_k^0\cdot\xi_k)\,dx \leqslant \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0|\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{B}}\xi_k|\,dx\leqslant C_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p} \tag{9}$$

для любого набора $\xi\in\Xi$.

Для функций

$$\xi_i^0=\frac{\max\limits_{l\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0|^{p-2}\mathcal{A}\nabla u_i^0}{\left(\int_G\max\limits_{l\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0|^p\,dx\right)^{1/q}},\qquad i=1,2,\dots,m$$

и любого допустимого набора $\{u_k\}$ для ёмкости поликонденсатора имеем

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m}(\nabla u_k\cdot\xi_k^0)\,dx = C_{\mathcal{A},p}(F)^{-1/q}\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0|^{p-2}\max_{1\leqslant k\leqslant m}(\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0\cdot\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k)\,dx. \tag{10}$$

Рассмотрим функции $v_k=u_k-u_k^0$. Они удовлетворяют условиям теоремы 2. Из этой теоремы следует, что существует функция $k^-(x)$ такая, что

$$\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{k^-(x)}^0|^{p-2}(\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{k^-(x)}^0\cdot\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{k^-(x)})\,dx \geqslant \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_{k^-(x)}^0|^p\,dx=\int\limits_G\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_k^0|^p\,dx=C^*_{\mathcal{A},p}(F).$$

Отсюда, используя равенство (10), получим:

$$\int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k^0)\, dx \geqslant C^*_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p} \tag{11}$$

для любого $\nabla u \in \nabla\mathcal{D}^*$.

Из (9) и (11), применяя [4, глава VI, предложение 1.3], получим, что $(\nabla u_1^0, \dots, \nabla u_m^0, \xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$ является седловой точкой функционала $\int\limits_G \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx$, то есть

$$\begin{aligned} &\inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \sup_{\xi\in\Xi} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx \\ &= \sup_{\xi\in\Xi} \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx = C^*_{\mathcal{A},p}(F)^{1/p}. \end{aligned} \tag{12}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} &\sup_{\xi\in\Xi} \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx \\ &= \sup_{\mathcal{B}_q(\xi)\neq 0} \left\{ \mathcal{B}_q(\xi)^{-1} : \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx \right\} \\ &= \sup_{\xi} \left\{ \mathcal{B}_q(\xi)^{-1} : \inf_{\nabla u\in\nabla\mathcal{D}^*} \int\limits_G \max_{1\leqslant k\leqslant m} (\nabla u_k \cdot \xi_k)\, dx \geqslant 1 \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

в силу однородности крайних частей равенств (13) по ξ.

Используя равенства (12), (13) и учитывая, что правая часть второго из равенств (13) равна $\widetilde{M}_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)^{-1/q}$, мы завершим доказательство теоремы.

Литература

1. В. В. Асеев, Б. Ю. Султанов, *Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных фунций класса W_n^1*. Препринт АН СССР, Сиб. отд., Ин-т мат., Новосибирск, 1989.
2. У. Рудин, *Функциональный анализ*. М., (1975).

3. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
4. И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М., (1979).
5. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A., **24** (1999), 61–88.
6. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math., **126**, No. 3 (1957), 171–219.
7. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* GAKUTO Intern. J., Advances in Math. Sci. Appl. **19** (2003), 1–343.

Dymchenko Yu. V., Shlyk V. A. Capacity of polycondensor and the module of the family of vector measure.

The paper considers the capacity of a polycondenser and the modules of families of measures related to curves connecting the polycondenser's plates. It is proved that these quantities are equal. Also a relation between the polycondenser's capacity and the module of a family of vector measures connected with a class of functions admissible for the polycondinser's capacity is established. The results obtained generalize the corresponding results by M. Ohtzuka and H. Aikava.

Дальневосточный
государственный университет,
ул. Суханова 8, 690950 Владивосток,
Россия

E-mail: shlyknv@yandex.ru,
dymch@mail.ru

Поступило 8 октября 2009 г.