Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

В. Н. Дубинин

К РЕЗУЛЬТАТАМ И. П. МИТЮКА О ПОВЕДЕНИИ ВНУТРЕННЕГО РАДИУСА ОБЛАСТИ И ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА ПРИ РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

**Моему учителю
Игорю Петровичу Митюку
посвящается**

Существенное влияние на развитие геометрической теории функций оказали работы И. П. Митюка, посвященные поведению внутреннего радиуса области комплексной плоскости либо конформной емкости конденсатора при регулярных отображениях (не обязательно однолистных). Эти исследования проводились в связи с приложениями метода симметризации к доказательству геометрических свойств аналитических функций (см., например, [1–6]). В данной работе показывается, что некоторые результаты И. П. Митюка о поведении внутреннего радиуса переносятся естественным образом на радиусы Робена относительно внутренних [7] и граничных точек [8]. Мы дополняем также частный случай теоремы И. П. Митюка [6] и результат Клоке [9] о поведении емкости конденсатора при отображении многолистными функциями. Первый параграф статьи содержит необходимые определения и обозначения в редакции, несколько отличной от [8]. Во втором параграфе классический принцип Линделефа о поведении функции Грина при регулярном отображении распространяется на случай функций Робена с полюсом в граничной точке. Ранее мы приводили подобное обобщение для полюсов функций Робена во внутренних точках области [10], либо в частных случаях граничных точек, но для конформного и однолистного отображения [11]. Кроме того, мы рассматриваем неравенства, противоположные

Ключевые слова : регулярные функции, функция Грина, функция Робена, внутренний радиус, радиус Робена, емкость конденсатора.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант 09-III-A-01-007) .

принципу Линделефа. Третий параграф посвящен аналогам теорем И. П. Митюка о поведении внутреннего радиуса области при отображении регулярными функциями. Наконец, в §4 рассматриваются емкости конденсаторов.

§1. Функция Робена и радиус Робена

Рассмотрим сначала область B комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых. Пусть γ – непустое замкнутое подмножество ∂B, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть z_0 – конечная точка множества $\overline{B} \setminus \gamma$. Обозначим через $g_B(z, z_0, \gamma)$ вещественнозначную непрерывную функцию на $\overline{B} \setminus \{z_0\}$, гармоническую в $\overline{B} \setminus (\gamma \cup \{z_0\})$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$g_B(z, z_0, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \gamma,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} g_B(z, z_0, \gamma) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \partial B \setminus (\gamma \cup \{z_0\}),$$

$g_B(z, z_0, \gamma) + \log|z - z_0|$ – ограниченная гармоническая функция в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к ∂B). Если $z_0 = \infty$, то функция $g_B(z, \infty, \gamma)$ определяется аналогично. Отличие состоит в том, что требуется гармоничность $g_B(z, z_0, \gamma) - \log|z|$ в окрестности бесконечности. При $z_0 \in B$ функцию $g_B(z, z_0, \gamma)$ называют *функцией Робена* области B с полюсом в точке z_0. Мы оставим за ней это название для любых точек $z_0 \in \overline{B} \setminus \gamma$. В случае, когда $\gamma = \partial B$, функция Робена совпадает в области B с функцией Грина $g_B(z, z_0)$. Существование и единственность функции $g_B(z, z_0, \gamma)$ в приведенных выше условиях легко проверяется.

Конечносвязную область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ и непустое замкнутое подмножество γ ее границы ∂B будем называть *допустимыми*, если граница ∂B не имеет изолированных точек, а γ состоит из конечного числа невырожденных связных компонент. Пусть B – произвольная допустимая область. Под границей ∂B области B будем понимать совокупность простых концов. В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, носитель достижимой граничной точки и саму такую точку будем обозначать одной и той же буквой. Напомним, что граничная точка ζ области G называется достижимой граничной точкой, если ее можно

соединить с какой-либо внутренней точкой области G некоторой непрерывной кривой $l : z = z(t)$, $a \le t \le b$, целиком лежащей в G, кроме одного ее конца $\zeta = z(b)$. Окрестность достижимой граничной точки $U(\zeta, r, B)$ определим как связную компоненту пересечения $B \cap U(\zeta, r)$, содержащую некоторую открытую дугу кривой l с концом в точке $z(b), U(\zeta, r) := \{z : |z - \zeta| < r\}$. Две достижимые граничные точки ζ_1 и ζ_2 считаются различными, если существуют непересекающиеся окрестности $U(\zeta_k, r, B)$, $k = 1, 2$. Окрестность внутренней точки $\zeta \in B$ совпадает с обычным кругом $U(\zeta, r) \subset B$ при малых r. Запись $z \to \zeta$ означает направление, при котором каждая последующая точка принадлежит той же окрестности точки ζ, что и предыдущая.

Пусть функция f конформно и однолистно отображает допустимую область B на область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых в плоскости $\mathbb{C}$. Точку z_0 назовем *допустимой точкой области B с показателем α*, $0 < \alpha \le 2$, если $z_0 \in B$ либо z_0 является достижимой граничной точкой области B и в некоторой окрестности этой точки справедливо разложение вида:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{1/\alpha}(A + o(1)), \quad z \to z_0, \tag{1}$$

где A – некоторая отличная от нуля постоянная. В случае $z_0 = \infty$ локальный параметр $z - z_0$ в разложении (1) необходимо заменить на $1/z$. Если $z_0 \in B$, $z_0 \ne \infty$, то разложение (1) автоматически выполняется с показателем $\alpha = 1$ и $A = f'(z_0)$. Понятно, что вид разложения (1) и значение α не зависят от выбора функции f. Таким образом, свойство допустимости точки z_0 не зависит от f, а зависит только от области B. В частности, если в некоторой окрестности точки $z_0 \ne \infty$ граница области B состоит из двух замкнутых аналитических дуг с общим концом в z_0, расположенных под внутренним по отношению к области B углом $\alpha\pi > 0$, то по теореме Лихтенштейна–Варшавского [12, с. 359] точка z_0 допустима с показателем α. Пусть область B и функция f определены выше, γ – допустимое подмножество границы ∂B и пусть z_0 – допустимая точка области B с показателем α, не принадлежащая γ. Определим функцию Робена равенством

$$g_B(z, z_0, \gamma) = \alpha g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\gamma)). \tag{2}$$

Данное определение не зависит от выбора функции f, поскольку при конформном и однолистном отображении “гладкой” области на

"гладкую" сохраняется гармоничность, граничные условия и вид разложения в окрестности полюса. Легко видеть, что в окрестности конечной допустимой точки z_0 функция $g_B(z, z_0, \gamma) + \log|z - z_0|$ гармоническая, а если $z_0 = \infty$, то гармонической является функция $g_B(z, z_0, \gamma) - \log|z|$, как в случае функции Грина. Иногда функцию Робена можно выразить через функции Грина подходящих областей. Например, ввиду симметрии относительно вещественной оси функция Грина области $\mathbb{C}\backslash\gamma$ с полюсом в точке $z_0 < 0$ совпадает с функцией Робена $g_B(z, z_0, \gamma)$, где $B = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\gamma = \{z = x+iy : x \geq 0, y = 0\}$. Легко проверить также равенство

$$g_{K(R)}(z, z_0, \gamma) = g_{K(R^2)}(z, R^2/\overline{z}_0) + g_{K(R^2)}(z, z_0),$$

где $K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$, $R \neq \infty$, и $\gamma = \{z : |z| = 1\}$. С другой стороны, пусть $G(z; R)$ – *функция Гретша*, конформно и однолистно отображающая кольцо $K(R)$, $R < \infty$, на внешность круга $|w| > 1$ с разрезом по вещественной положительной полуоси от некоторой точки $P(R)$ до бесконечности так, что $G(R; R) = P(R)$. Тогда для положительных z_0 имеем

$$g_{K(R)}(z, z_0, \gamma) = \log\left|\frac{1 - G(z; R)G(z_0; R)}{G(z; R) - G(z_0; R)}\right|.$$

Радиусом Робена области B относительно точки z_0 и множества γ назовем величину

$$r(B, \gamma, z_0) = \exp\{\lim_{z \to z_0}[g_B(z, z_0, \gamma) + \log|z - z_0|]\},$$

когда $z_0 \neq \infty$, и

$$r(B, \gamma, \infty) = \exp\{\lim_{z \to \infty}[g_B(z, \infty, \gamma) - \log|z|]\}.$$

Если $z_0 \in B$ и $\gamma = \partial B$, то $r(B, \gamma, z_0) = r(B, z_0)$ – внутренний радиус. В случае, когда B – односвязная область, γ – дуга ее границы и $z_0 \in (\partial B)\backslash\gamma$ величина $r(B, \gamma, z_0)$ встречается в литературе под разными названиями и обозначениями (см. [13]). В общем случае эта величина мало изучена. При конформном и однолистном отображении f области B на гладкую область $f(B)$ с разложением (1) в окрестности допустимой точки z_0 имеем

$$r(B, \gamma, z_0)|A|^\alpha = r^\alpha(f(B), f(\gamma), f(z_0)). \tag{3}$$

Как и выше, вычисление радиусов Робена можно свести к нахождению внутренних радиусов либо функций Грина подобно определению функций Робена. Заметим так же, что если область B есть круговой сектор $\{z \in U : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, а $\gamma = \{z : |z| = 1, \varphi_1 \le \arg z \le \varphi_2\}$, то $g_B(z, 0, \gamma) = -\log|z|$ и, следовательно,

$$r(B, \gamma, 0) = r(B, 0)$$

независимо от выбора значений φ_1 и φ_2. Если круг в этом примере заменить на правильный многоугольник с центром в начале координат, круговой сектор заменить на сектор, высекаемый из многоугольника лучами $\arg z = \varphi_k$, $k = 1, 2$, а γ на соответствующую часть границы многоугольника, то выписанное выше равенство будет иметь место лишь в случае, когда лучи проходят через его вершины.

§2. Дополнения к принципу Линделефа

Функцию Грина $g_B(z, \zeta)$ области B называют *классической*, если она обращается в нуль на границе B. В этом случае доопределим функцию $g_B(z, \zeta)$ нулем в дополнении $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$. Следующее утверждение принято называть *принципом Линделефа* [14]. Пусть области B и G расширенной комплексной плоскости имеют классические функции Грина, и пусть функция $f : B \to G$ регулярна в B и $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда для любой фиксированной точки w_0, принадлежащей $f(B)$, справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0) \ge \sum_{k \ge 0} p_k g_B(z, z_k), \qquad z \in B, \tag{4}$$

где $z_0, z_1, \cdots$ – нули функции $f - w_0$ кратности соответственно $p_0, p_1, \ldots$. Равенство в (4) в какой-либо точке $z \in B \setminus \bigcup\limits_{k \ge 0} \{z_k\}$ влечет за собой равенство в (4) во всей области B. Даже ослабленный вариант этого принципа

$$g_G(f(z), w_0) \ge g_B(z, z_0)$$

является существенным обобщением леммы Шварца и имеет многочисленные приложения в геометрической теории функций (см., например, [14, 15]). Распространение принципа Линделефа на случай

функций Робена вместо функций Грина состоит в следующем [10, теорема 4.1]. Пусть области B и G, а также замкнутые подмножества их границ $\gamma \subset \partial B$ и $\Gamma \subset \partial G$ допустимы. Предположим, что функция f регулярна в области B, $f(B) \subset G$ и $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$ (т.е. для любой последовательности точек $\zeta_n \in B$, стремящихся к $(\partial B) \setminus \gamma$, соответствующая последовательность точек $f(\zeta_n) \to (\partial G) \setminus \Gamma$). Пусть w_0 - точка образа $f(B)$, $\{z_k\}_{k\geq 0}$ – множество точек из B, для которых $f(z_k) = w_0$ и p_k – порядок нуля z_k функции $f - w_0$. Тогда

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma) \geq \sum_{k\geq 0} p_k g_B(z, z_k, \gamma) \tag{5}$$

при произвольном $z \in B$. Равенство в (5) в какой-либо точке $z \in B \setminus \bigcup\limits_{k\geq 0} \{z_k\}$ влечет за собой равенство во всей области B.

Рассмотрим теперь дополнение к принципу Линделефа в случае, когда точка w_0 принадлежит границе области $f(B)$.

Теорема 1. *Пусть области $B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$, а также замкнутые множества $\gamma \subset \partial B$ и $\Gamma \subset \partial G$ допустимы. Предположим, что функция f мероморфна в области B и удовлетворяет условиям: $f(B) \subset G$ и $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$. Пусть w_0 – допустимая точка области G с показателем β, принадлежащая $f((\partial B) \setminus \gamma)$, и пусть z_k, $k = 0, 1, \ldots,$ – различные допустимые точки области B с показателями соответственно $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ принадлежащие $(\partial B) \setminus \gamma$ и такие, что $f(z_k) = w_0$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда справедливо неравенство*

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma)/\beta \geq \sum_{k\geq 0} g_B(z, z_k, \gamma)/\alpha_k, \quad z \in B. \tag{6}$$

Равенство в (6) в какой-либо точке $z \in B$ влечет за собой равенство во всей области B.

Доказательство. Ввиду определения (2) можно считать, что области B и G ограничены конечным числом аналитических жордановых кривых; множества γ и Γ состоят из конечного числа невырожденных жордановых дуг; точки w_0 и z_k, $k = 0, 1, \ldots,$ конечны, а показатели β, α_k, $k = 0, 1, \ldots,$ равны единице. Заметим, что в этом случае функция f аналитически продолжима на открытые дуги множества $(\partial B) \setminus \gamma$ по принципу симметрии и $f'(z) \neq 0$ в точках этих дуг. Фиксируем произвольное число $n \geq 0$ и рассмотрим вспомогательную

функцию

$$h_n(z) = g_G(f(z), w_0, \Gamma) - \sum_{k=0}^{n} g_B(z, z_k, \gamma),$$

заданную на множестве $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k\geq 0} \{z_k\}$. Учитывая разложение функции f в окрестности точки z_k:

$$f(z) = w_0 + c_k(z - z_k) + \cdots, \quad c_k \neq 0,$$

а также представление функции Робена в окрестности ее полюса, легко заключаем, что точки z_k, $k \leq n$, являются устранимыми особыми точками функции h_n. Таким образом, функция h_n, гармоническая в $\overline{B} \setminus \bigcup\limits_{k>n} \{z_k\}$, стремится к $+\infty$ при $z \to z_k$, $k > n$ (если такие точки существуют), неотрицательная на γ и удовлетворяет условию $\partial h_n/\partial n = 0$ на $(\partial B) \setminus (\gamma \cup \bigcup\limits_{k>n} \{z_k\})$. Ввиду принципа максимума $h_n \geq 0$ в области B (см., например, [16]). Если число точек z_k, $k = 0, 1, \ldots$, конечно, то полагая $n + 1$ равным числу этих точек, получаем неравенство (6). При этом равенство в одной точке области B влечет равенство во всей области. Если число нулей бесконечно, то привлекая теорему Гарнака, получаем, что ряд

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma) - \sum_{k\geq 0} g_B(z, z_k, \gamma)$$

сходится равномерно внутри B. Следовательно, его сумма является гармонической и неотрицательной функцией в области B. Согласно принципу максимума, если в какой-либо точке области B она обращается в нуль, то она является тождественным нулем. Теорема доказана.

Применение неравенств (5) и (6) приводит к уточнениям известных результатов для регулярных функций в многосвязных областях, полученных из принципа Линделефа (4). В дополнение к работе [10] рассмотрим следующий простой пример.

Следствие 1. *Пусть γ – замкнутая дуга окружности $|z| = 1$, и пусть функция f регулярна в круге $U_z = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет следующим условиям: $|f(z)| < 1$, когда $|z| < 1$, $f(0) = 0$ и $f((\partial U_z)\setminus\gamma) \subset (\partial U_w)\setminus\Gamma$, где Γ – замкнутая дуга окружности $|w| = 1$. Тогда для любой точки z дуги $(\partial U_z) \setminus \gamma$ справедливо неравенство*

$$g_{U_z}(z, 0, \gamma) \leq g_{U_w}(f(z), 0, \Gamma).$$

Значение функции Робена $g_{U_z}(z,0,\gamma)$ совпадает со значением функции Грина $g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma}(z,0)$. Последнее нетрудно выписать явно, используя конформные отображения. Однако, даже без анализа явного выражения функции Грина можно утверждать, что следствие 1 уточняет классическую лемму Левнера [14, с. 168]. Действительно, пусть функция f регулярна в круге U_z, принимает значения в круге U_w и $f(0)=0$. Пусть α – дуга окружности $|z|=1$ такая, что множество предельных значений функции f относительно α принадлежит окружности $|w|=1$. Тогда это множество является дугой β окружности $|w|=1$. Если в следствии 1 в качестве точки z взять середину дуги α, то

$$g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma}(z,0)\le g_{\mathbb{C}\setminus\Gamma}(f(z),0)\le g_{\mathbb{C}\setminus\Gamma}(w^*,0),$$

где w^* – середина дуги β. Последнее неравенство суть следствие теоремы Кшижа [18]. Ввиду монотонности функции Грина длина дуги β не меньше длины дуги α.

В работе И. П. Митюка [5] впервые рассматривается неравенство, противоположное принципу Линделефа (4) (см. лемму в [5, с. 36]). По существу, утверждение И. П. Митюка сводится к следующему [17, теорема 1]. Пусть области B и G имеют классические функции Грина, $B\subset\overline{\mathbb{C}}_z$, $G\subset\overline{\mathbb{C}}_w$, и пусть w_0 – фиксированная точка области G. Предположим, что функция f является мероморфной в области B, принимает по крайней мере один раз значение w_0 в B и удовлетворяет условию $f(\partial B)\subset\overline{\mathbb{C}}_w\setminus G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области B все предельные значения функции $f(z)$ лежат в дополнении G). Тогда для любой точки $z\in B$ справедливо неравенство

$$g_G(f(z),w_0)\le\sum_{k=0}^{m}p_k g_B(z,z_k), \tag{7}$$

где $z_0,\dots,z_m$ – все нули функции $f-w_0$ в случае $w_0\ne\infty$ и нули функции $1/f$ при $w_0=\infty$ кратности $p_0,\dots,p_m$ соответственно. Равенство в (7) в какой-нибудь точке $z\in B\setminus\bigcup\limits_{k=0}^{m}\{z_k\}$ влечет за собой равенство в (7) во всей области B и выполняется тогда и только тогда, когда $G=f(B)$ и функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью B (т.е. при стремлении точки $z\in B$ к границе области B все предельные значения функции $f(z)$ принадлежат границе G и каждой точке $w\in G$ соответствует ровно n прообразов в

области B (с учетом кратности), $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$). Неравенство (7) впервые встречается в работе И. П. Митюка [5] при несколько иных ограничениях на функцию f. И. П. Митюк рассматривал (7) как вспомогательное неравенство для получения альтернативного [3] доказательства оценки сверху внутреннего радиуса области (12). Вместе с тем, неравенство (7) является важным дополнением к принципу Линделефа и, как выяснилось много лет спустя, оно содержит, в частности, многие классические и современные оценки для полиномов и рациональных функций (см. [17]). Следующая теорема распространяет неравенство (7) на случай функций Робена.

Теорема 2. *Пусть области $B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$, а также замкнутые множества $\gamma \subset \partial B$ и $\Gamma \subset \partial G$ допустимы, причем часть границы $(\partial G) \setminus \Gamma$ состоит из конечного числа аналитических дуг, и пусть w_0 – допустимая точка области G, принадлежащая множеству $\overline{G} \setminus \Gamma$. Предположим, что функция f является мероморфной в области B и удовлетворяет следующим условиям:*

$$f(B) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [(\partial G) \setminus \Gamma], \quad f(\gamma) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (\overline{G} \setminus \Gamma),$$

$$f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma \quad \text{и} \quad w_0 \in \overline{f(B)}.$$

Пусть z_k, $k = 0, \dots, m$, – различные допустимые точки области B, $f(z_k) = w_0$, $k = 0, \dots, m$, и пусть не существует других точек $z \in \overline{B}$ и последовательностей точек $z'_n \in B$, $n = 1, 2, \dots$, таких, что $z'_n \to z$, $f(z'_n) \to w_0$ при $n \to \infty$. Тогда для любой точки $z \in B$ справедливо неравенство

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma) \le \sum_{k=0}^{m} p_k g_B(z, z_k, \gamma)/\alpha_k, \tag{8}$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ – показатели точек соответственно $z_0, \dots, z_m$; $p_k = 1$, если $z_k \in \partial B$, и p_k – кратность нуля z_k функции $f - w_0$ в случае $z_k \in B$, $w_0 \ne \infty$, и нуля функции $1/f$ при $w_0 = \infty$, $0 \le k \le m$. Равенство в (8) в какой-нибудь точке $z \in B \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{m} \{z_k\}$ влечет за собой равенство в (8) во всей области B и выполняется тогда и только тогда, когда $f(B) = G$, $f(\gamma) \subset \Gamma$, и функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью B $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$.

Доказательство. Можно считать, что область B ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых; множество γ состоит из конечного числа невырожденных жордановых дуг; точки w_0 и z_k, $k = 0, \dots, m$, конечны, а показатели α_k, $k = 0, \dots, m$, равны единице. Заметим, для определенности, что в условиях теоремы 2, если точка $w_0 \in G$, то точки $z_k \in B$, $k = 0, \dots, m$, и если $w_0 \in \partial G$, то необходимо $z_k \in \partial B$, $k = 0, \dots, m$. Доопределим функцию Робена $g_G(w, w_0, \Gamma)$ нулем на множестве $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \overline{G}$ и рассмотрим функцию

$$h(z) := g_G(f(z), w_0, \Gamma) - \sum_{k=0}^{m} p_k g_B(z, z_k, \gamma), \quad z \in \overline{B} \setminus \bigcup_{k=0}^{m} \{z_k\}.$$

Так как доопределенная функция $g_G(w, w_0, \Gamma)$ субгармоническая на множестве $\left[\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [\overline{(\partial G) \setminus \Gamma}]\right] \setminus \{w_0\}$, то суперпозиция $g_G(f(z), w_0, \Gamma)$ субгармоническая в области $B \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{m} \{z_k\}$ и, следовательно, функция h также субгармоническая в этой области. Пусть теперь z_k – нуль функции $f - w_0$ кратности p_k, $z_k \in B$, $0 \le k \le m$. В окрестности точки z_k имеем

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma) = -\log|f(z) - w_0| + h_1 = -p_k \log|z - z_k| + h_2,$$

$$\sum_{k=0}^{m} p_k g_B(z, z_k, \gamma) = -p_k \log|z - z_k| + h_3,$$

где h_j, $j = 1, 2, 3$, – гармонические функции. Таким образом, особенности сокращаются и функцию h можно считать гармонической в точке z_k. Сказанное выше распространяется и на граничные точки $z_k \in (\partial B) \setminus \gamma$ с тем лишь замечанием, что значение p_k в этом случае равно единице, а под гармоничностью в граничной точке понимается гармоничность продолженной функции в окрестности этой точки. Итак, функция h субгармоническая в области B и гармоническая на части границы $(\partial B) \setminus \gamma$. Поскольку $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$, то в точках $(\partial B) \setminus \gamma$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0.$$

Ввиду условия $f(\gamma) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (\overline{G} \setminus \Gamma)$ выполняется

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} h(z) = 0$$

для любой граничной точки $\zeta \in \gamma$. По принципу максимума,

$$h(z) \leq 0 \quad \text{на} \quad B,$$

что равносильно неравенству (8), причем равенство в одной точке влечет за собой равенство во всей области B.

Предположим теперь, что в (8) имеет место равенство. Из аналитичности функции f и условия $f(\partial B) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus G$ следует, что каждая точка w области G имеет некоторую окрестность $U(w)$, обладающую следующим свойством: число прообразов $f^{-1}(w')$ одно и тоже для любой точки $w' \in U(w)$ (возможно, нулевое). Если $w_0 \in G$, то существует окрестность $U(w_0)$, для которой это число равно $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$. Поскольку любую другую точку области G можно соединить с w_0 непрерывной кривой в G и покрыть эту кривую конечным числом указанных окрестностей, то каждой точке G соответствует ровно n прообразов. В частности, $f(B) \supset G$. Из равенства в (8) видно, что $f(B) \subset G$ и, следовательно, $f(B) = G$. Вновь учитывая условия $f(\gamma) \subset \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (\overline{G} \setminus \Gamma)$ и $h \equiv 0$, заключаем, что $f(\gamma) \subset \Gamma$. В случае $w_0 \in (\partial G) \setminus \Gamma$ аналогичные рассуждения приводят нас к тому же результату. Наоборот, пусть $f(B) = G$, $f(\gamma) \subset \Gamma$ и функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью B. Тогда функция h гармоническая в области B, причем $\partial h/\partial n = 0$ на $(\partial B) \setminus \gamma$ и $h = 0$ на γ. Следовательно $h \equiv 0$ в B, что равносильно равенству в (8). Теорема доказана.

§3. Аналоги теорем И. П. Митюка о поведении внутреннего радиуса области

Пусть B – область плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$, z_0 - конечная точка области B, w_0 – точка плоскости $\mathbb{C}_w$ и $p \geq 1$ натуральное число. Следуя И. П. Митюку, обозначим через $\mathfrak{R}^p_{w_0}(B, z_0)$ класс регулярных в области B функций f, имеющих в некоторой окрестности точки z_0 разложение

$$f(z) = w_0 + a_p(z - z_0)^p + \cdots, \quad a_p \neq 0.$$

И. П. Митюк [1, 2] установил следующий результат. Если функция $f \in \mathfrak{R}^p_{w_0}(B, z_0)$, то

$$r(f(B), w_0) \geq |a_p| r^p(B, z_0) \exp \sum_{k \geq 1} p_k g_B(z_0, z_k), \tag{9}$$

где z_k, $k \geq 1$, – нули функции $f - w_0$, отличные от z_0, а p_k – их кратности. Если дополнительно известно, что B – допустимая область, а общее число корней уравнения $f(z) - w_0 = 0$ с учетом их кратностей равно n, то равенство в (9) имеет место тогда и только тогда, когда область $f(B)$ допустимая, а функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области $f(B)$ областью B. Аналогом этого результата И. П. Митюка является

Теорема 3. *Пусть области $B \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ и замкнутые множества $\gamma \subset \partial B$, $\Gamma \subset \partial G$ допустимы, а функция f мероморфна в области B и удовлетворяет условиям: $f(B) \subset G$, $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$. Пусть w_0 – допустимая точка области G с показателем β, принадлежащая $f(B \setminus \gamma)$, $w_0 \neq \infty$, и пусть z_k, $k = 0, 1, \ldots,$ – допустимые точки области B с показателями соответственно $\alpha_0, \alpha_1, \ldots,$ принадлежащие $B \setminus \gamma$ и такие, что $f(z_k) = w_0$, $k = 0, 1, \ldots$. Предположим, что $z_0 \neq \infty$ и в некоторой окрестности точки z_0 имеет место разложение*

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^{\beta p/\alpha_0}(a_p + o(1)), \quad z \to z_0, \tag{10}$$

где $p \geq 1$ натуральное число и $a_p \neq 0$. Тогда

$$(r(G, \Gamma, w_0))^{1/\beta} \geq |a_p|^{1/\beta}(r(B, \gamma, z_0))^{p/\alpha_0} \exp \sum_{k \geq 1} p_k g_B(z_0, z_k, \gamma)/\alpha_k, \tag{11}$$

где $p_k = 1$, если $z_k \in \partial B$, и p_k – кратность нуля z_k функции $f - w_0$ в случае $z_k \in B$, $1 \leq k \leq m$. Если дополнительно не существует других точек $z \in \overline{B}$, кроме z_k, $k = 0, \ldots, m$, таких, что найдется последовательность точек $z'_n \in B$, $n = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяющая условиям $z'_n \to z$, $f(z'_n) \to w_0$ при $n \to \infty$, то равенство в (11) выполняется в том и только в том случае, когда $f(B) = G$, $f(\gamma) \subset \Gamma$ и функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью B, где $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$.

Доказательство. В условиях теоремы 3 при $w_0 \in G$ все точки z_k принадлежат области B, $k = 0, 1, \ldots,$ а если $w_0 \in (\partial G) \setminus \Gamma$, то $z_k \in \partial B$, $k = 0, 1, \ldots$. В последнем случае необходимо $p = 1$. Учитывая определение функции Робена и равенство (3), заключаем, что достаточно рассмотреть случай, когда области B и G ограничены аналитическими жордановыми кривыми; множества γ и Γ состоят из конечного

числа невырожденных жордановых дуг, точки z_k, $k = 1, \dots$ конечны, а показатели β, α_k, $k = 0, 1, \dots$, равны единице. Применение неравенства (5) при $w_0 \in G$ и неравенства (6), когда $w_0 \in \partial G$, дает

$$g_G(f(z), w_0, \Gamma) \geq p g_B(z, z_0, \gamma) + \sum_{k \geq 1} p_k g_B(z, z_k, \gamma), \quad z \in B.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\log r(G, \Gamma, w_0) - \log |f(z) - w_0| \\ &\quad \geq p \log r(B, \gamma, z_0) - p \log |z - z_0| + \sum_{k \geq 1} p_k g_B(z, z_k, \gamma) + o(1), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \to z_0, \quad z \in B. \end{aligned}$$

Прибавляя к левой и правой части последнего неравенства $p \log |z - z_0|$ и переходя к пределу при $z \to z_0$ с учетом (10), находим неравенство (11) ($\beta = \alpha_k = 1$, $k = 0, 1 \dots$).

Предположим теперь, что не существует других точек $z \in \overline{B}$, кроме z_k, $k = 0, \dots, m$, таких, что найдется последовательность точек $z'_n \in B$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая условиям $z'_n \to z$, $f(z'_n) \to w_0$ при $n \to \infty$. В этом случае функция

$$h(z) = g_G(f(z), w_0, \Gamma) - p g_B(z, z_0, \gamma) - \sum_{k=1}^{m} p_k g_B(z, z_k, \gamma)$$

является гармонической в $\overline{B} \setminus \gamma$. В точке z_0 имеем

$$h(z_0) = \log r(G, \Gamma, w_0) - \log [|a_p| r^p(B, \gamma, z_0)] - \sum_{k=1}^{m} p_k g_B(z_0, z_k, \gamma).$$

По принципу максимума заключаем, что равенство в (11) ($\beta = \alpha_k = 1$, $k = 0, 1, \dots$) выполняется в том и только в том случае, когда $h \equiv 0$ в $\overline{B} \setminus \gamma$. Пусть теперь в неравенстве (11) имеет место знак равенства. Тогда определение функции h дает $f(B) = G$ и $f(\gamma) \subset \Gamma$. Учитывая включение $f((\partial B) \setminus \gamma) \subset (\partial G) \setminus \Gamma$ из условия теоремы легко приходим к выводу, что функция f осуществляет полное n-кратное накрытие области G областью B, $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$ (см. доказательство теоремы 2).

Наоборот, пусть функция f осуществляет такое накрытие и $f(B) = G$, $f(\gamma) \subset \Gamma$. Тогда функция $h \to 0$ при $z \to \gamma$ и производная по нормали $\partial h/\partial n = 0$ в точках части границы $(\partial B) \setminus \gamma$. Следовательно, $h \equiv 0$ и мы имеем равенство в (11). Теорема доказана.

В случае $w_0 \in G$ неравенство (11) было получено в работе [10] без утверждения единственности экстремального отображения. Приведем пример частного случая теоремы 3, когда $w_0 \in \partial G$.

Следствие 2. *Пусть z_1, z_2 и z_3 – три различные точки на единичной окружности $|z| = 1$, расположенные в порядке возрастания аргумента. Предположим, что функция f регулярна в круге $U_z = \{z : |z| < 1\}$, продолжима по непрерывности на замкнутую дугу $\alpha = (z_1, z_2, z_3)$ и удовлетворяет условиям: $|f(z)| < 1$, когда $|z| < 1$, и $|f(z)| = 1$ на α. Тогда справедлива точная оценка*

$$|f'(z_2)| \le \left| \frac{(z_3 - z_1)(f(z_1) - f(z_2))(f(z_2) - f(z_3))}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)(f(z_3) - f(z_1))} \right|,$$

достижимая в случае $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Доказательство. Можно считать, что $z_2 = 1$, $f(z_2) = 1$ и $z_1 \ne -1$. В условиях следствия 2 функция f аналитически продолжима на дугу α и в окрестности точки $z = 1$ имеет место разложение

$$f(z) = 1 + (z - 1)f'(1) + o(z - z_0), \quad z \to z_0.$$

По теореме 3

$$r(U_w, \Gamma, 1) \ge |f'(1)| r(U_z, \gamma, 1),$$

где γ – замыкание дополнения дуги α до окружности $|z| = 1$, а Γ – замыкание дополнения $f(\alpha)$ до окружности $|w| = 1$. Для вычисления радиуса Робена $r(U_z, \gamma, 1)$ рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{(z - 1)(z_1 + 1)}{(z - 1)(z_1 + 1) - (z + 1)(z_1 - 1)},$$

которая конформно и однолистно отображает круг U_z на верхнюю полуплоскость, если $\operatorname{Im} z_1 < 0$, и на нижнюю полуплоскость, если $\operatorname{Im} z_1 > 0$. При этом выполняется

$$F(1) = 0, \qquad F(z_1) = \infty, \quad F(z_3) = \frac{(z_3 - 1)(z_1 + 1)}{2(z_3 - z_1)}$$

и

$$|F'(1)| = |(z_1+1)/(2(z_1-1))|.$$

Учитывая (3), имеем

$$r(U_z,\gamma,1)|F'(1)| = r(F(U_z),F(\gamma),0) = r(\mathbb{C}\setminus F(\gamma),0) = 4|F(z_3)|.$$

Отсюда

$$r(U_z,\gamma,1) = 4\left|\frac{(z_3-1)(z_1-1)}{z_3-z_1}\right|.$$

Аналогично,

$$r(U_w,\Gamma,1) = 4\left|\frac{(f(z_3)-1)(f(z_1)-1)}{f(z_3)-f(z_1)}\right|,$$

что приводит к требуемому неравенству. Следствие доказано.

Следствие 2 можно получить также из принципа симметрии и леммы Шварца. Приведенное доказательство дается как простейшая иллюстрация иного подхода. Сказанное выше относится и к следствию 1, которое вытекает из принципа симметрии и принципа Линделефа (4).

В пособии [3] указано на необходимость изучения неравенства, противоположного (9). Именно, следуя [3], рассмотрим функцию $f(z) = w_0 + a_p(z-z_0)^p + \ldots$, регулярную в области B, и пусть A – множество предельных точек последовательностей $\{f(z'_\nu)\}$, когда $z'_\nu \in B$, $z'_\nu \to \partial B$, $\nu \to \infty$. Фиксируем конечную точку $w_0 \notin A$ и обозначим через G связную компоненту дополнения множества A, содержащую точку w_0. Тогда

$$r(G,w_0) \le |a_p| r^p(B,z_0) \exp \sum_{k\ge 1} p_k g_B(z_0,z_k), \tag{12}$$

где z_k, $k \ge 1$, – нули функции $f - w_0$, отличные от z_0, а p_k – их кратности. Равенство в (12) имеет место в том и только в том случае, когда $G = f(B)$ и функция f производит полное n-кратное накрытие области G областью B (здесь n - суммарная кратность нулей функции $f - w_0$). Следующая теорема распространяет неравенство (12) на случай радиусов Робена и функций Робена.

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы* 2 *в некоторой окрестности точки* z_0 *имеет место разложение* (10) ($p = p_0$). *Тогда справедливо неравенство*

$$r(G, \Gamma, w_0) \le |a_p|(r(B, \gamma, z_0))^{p/\alpha_0} \exp \sum_{k=1}^{m} p_k g_B(z, z_k, \gamma)/\alpha_k. \qquad (13)$$

Равенство в (13) *выполняется в том и только в том случае, когда* $f(B) = G$, $f(\gamma) \subset \Gamma$ *и функция* f *осуществляет полное* n*-кратное накрытие области* G *областью* B, *где* $n = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$.

Доказательство повторяет доказательство предыдущей теоремы. Отличие состоит в том, что вместо неравенств (5) и (6) необходимо использовать противоположное неравенство (8), а функция h является субгармонической в области B.

§4. Емкость конденсатора и регулярные отображения

Рассмотрим теперь поведение емкости конденсатора при многолистных отображениях. Пусть $C = \{G, E_0, E_1\}$ – конденсатор на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, для которого $\alpha := \partial E_1$ состоит из конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых, попарно не имеющих общих точек [6, 19]. Пусть функция f регулярна в области G и удовлетворяет следующим условиям:

(a) f отображает кривые α на попарно непересекающиеся замкнутые аналитические кривые α_f, причем так, что конечные области, ограниченные кривыми α_f, не имеют общих точек с $f(G)$;

(b) при однократном обходе кривых α в положительном относительно области G направлении каждая кривая, входящая в α_f, обходится конечное число раз, причем p – наименьшее число таких обходов.

Рассмотрим конденсатор $C_f = \{f(G), E_0^f, E_1^f\}$, где E_1^f – конечная область с границей α_f, а $E_0^f = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus (f(G) \cup E_1^f)$. И. П. Митюк [6] доказал неравенство для емкостей конденсаторов:

$$p \operatorname{cap} C_f \le \operatorname{cap} C - \sum_{\nu} (p_\nu - p) \int\limits_{\alpha_f^\nu} \left| \frac{\partial \omega_f}{\partial n} \right| ds, \qquad (14)$$

где α_f^ν – одна из компонент α_f, p_ν – число обходов этой компоненты, соответствующих однократному обходу α при отображении f, а ω_f – "обобщенная" потенциальная функция конденсатора C_f. Если конденсатор C допустимый, то равенство в (14) может иметь место тогда и только тогда, когда C_f – допустимый конденсатор, а функция f осуществляет полное p-кратное накрытие области $f(G)$ областью G. Приведем дополнение к частному случаю неравенства И. П. Митюка (14) при несколько иных ограничениях на конденсатор C и отображение f.

Пусть B – область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть $C = (B, \{E_0, E_1\}, \{0,1\})$ – конденсатор, объединение пластин которого содержит границу области B [8]. Предположим, что функция f мероморфна в области B и $f(E_0) \cap f(E_1) \cap \partial f(B) = \emptyset$. Здесь $f(E_k)$ – множество предельных значений функции $f(z)$, когда $z \to E_k$, $k = 0, 1$. Тогда определен конденсатор

$$f(C) := (f(B), \{f(E_0), f(E_1) \cap \partial f(B)\}, \{0,1\}).$$

Имеет место следующий принцип мажорации (ср. с теоремой 1 работы [9]).

Теорема 5. *Если в приведенных выше условиях $f(E_0 \cap \partial B) \subset \partial f(B)$, то справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} f(C) \le \operatorname{cap} C. \tag{15}$$

В случае, когда $E_1 \subset \partial B$ и функция f однолистна в области B, в неравенстве (15) *выполняется равенство.*

Доказательство. Пусть v – допустимая функция конденсатора C, равная нулю в окрестности пластины E_0 и единице в окрестности E_1, причем $0 \le v(z) \le 1$ при $z \in \overline{B}$ [19]. На множестве $\overline{f(B)}$ определим функцию

$$V(w) = \begin{cases} 0, & w \in f(E_0), \\ 1, & w \in f(E_1) \cap \partial f(B), \\ \min\{v(z) : f(z) = w\}, & w \in f(B). \end{cases}$$

Заметим, что в условиях теоремы функция f отлична от постоянной. Поэтому каждое свое значение в области $f(B)$ она принимает в

конечном либо счетном числе точек области B, сгущающихся к границе B. Отсюда следует, что минимум в определении функции $V(w)$ берется из конечного числа значений функции v. Легко видеть, что функция $V(w)$ непрерывна в $\overline{f(B)}$ и удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки области $f(B)$ за исключением, может быть, конечного числа точек w таких, что $f(z) = w$, $f'(z) = 0$ (см. утверждения из §1 работы [19]). Доопределяя конденсатор $f(C)$ в $\overline{\mathbb{C}}_w$ естественным образом, и применяя предложение 1.8 из [19], заключаем

$$\int\limits_B |\nabla v|^2 d\sigma_z \geq \int\limits_{f(B)} |\nabla V|^2 d\sigma_w \geq \operatorname{cap} f(C).$$

Осталось перейти к нижней грани по всевозможным функциям v. Условия равенства в (15) являются достаточными ввиду конформной инвариантности интеграла Дирихле. Теорема доказана.

Отметим, что наше доказательство отлично от доказательств в [6] и [9].

Следствие 3. *Пусть функция f регулярна в круге U и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Тогда для любого компакта $\gamma \subset U$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap}_h \gamma \geq \operatorname{cap}_h f(\gamma),$$

где $\operatorname{cap}_h(\cdot)$ означает гиперболическую емкость компакта.

Литература

1. И. П.Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей.* — Докл. АН СССР **157**, No. 2 (1964), 268–270.
2. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения.* — Укр. мат. журн. **17**, No. 4 (1965), 46–54.
3. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* — Изд-во Кубанского ун-та, Краснодар, 1980.
4. И. П. Митюк, *Применение симметризационных методов в геометрической теории функций.* — Изд-во Кубанского ун-та, Краснодар, 1985.
5. И. П. Митюк, *Оценки внутреннего радиуса (емкости) некоторой области (конденсатора).* — Изв. Сев. Кавказ. научн. центра высш. шк. Естественные науки No. 3 (1983), 36–38.

6. И. П. Митюк, *Некоторые свойства функций, регулярных в многосвязных областях.* — Докл. АН СССР **164**, No. 3 (1965), 495–498.
7. P. Duren, *Robin capacity.* — Computational methods and function theory 1977 (Nicosia), 177–190, Ser. Approx. Decompos., **11**, World Sci., River Edge, NJ, 1999.
8. В. Н. Дубинин, *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **302** (2003), 38–51.
8. H. Kloke, *Some inequalities for the capacity of plane condensers.* — Results Math. **9**, Nos. 1–2 (1986), 82–94.
10. V. N. Dubinin, M. Vuorinen, *Robin functions and distortion theorems for regular mappings.* — Rep. Math., Dep. Math. Stat., Univ. Helsinki, Preprint 454, 2007.
11. В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *О вариационных принципах конформных отображений.* — Алгебра и анализ **18**, No. 3 (2006), 39–62.
12. P. Henrici, *Applied and computational complex analysis.* Vol. 3, A Wiley-Interscience Publ., New York 1986.
13. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11**, No. 1 (1999), 3–86.
14. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного.* Том 2. М., 1962.
15. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1966.
16. M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1984.
17. В. Н. Дубинин, *О принципах мажорации для мероморфных функций.* — Мат. заметки **84**, No. 6 (2008), 803–808.
18. J.Krzyz, *Circular symmetrization and Green's function.* — Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math., Astron. et Phys. **7**, No. 6 (1959), 327–330.
19. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.

Dubinin V. N. On I. P. Mityuk's results on the behavior of the inner radius of a domain and the condenser capacity under regular mappings.

The classical Lindelöf principle on the behavior of Green's function under a regular mapping is generalized to the case of Robinson's function with a pole at a boundary point. In addition reverse inequalities in the Lindelöf principle are considered. As corollaries, certain analogs of Mityuk's theorems on the behavior of the inner radius of a domain are established. Also we supplement a special case of a Mityuk's theorems and a Kloke's result on the change of the condenser capacity under a multivalent mapping.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 20 октября 2009 г.