

Н. Ю. Додонов, В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ СУММАМИ РИССА

§1. ВВЕДЕНИЕ

1. В дальнейшем \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ , \mathbb{Z}_+ , \mathbb{N} – соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; $Q = [-\pi, \pi]$.

При $1 \leq p < \infty$ через L_p обозначаем пространство вещественных измеримых 2π -периодических функций f , у которых

$$\|f\|_p = \left(\int_Q |f|^p \right)^{1/p} < \infty;$$

$L_\infty = C$ – пространство вещественных непрерывных 2π -периодических функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_Q f(t) \cos kt dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_Q f(t) \sin kt dt$$

– коэффициенты Фурье функции f ; при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f, x) = a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx; \quad A_0(f, x) = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Ключевые слова : периодическая функция, пространство L_p , суммы Фейера, суммы Рисса, асимптотические формулы, наилучшее приближение.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (грант по. НШ-2409.2008.1).

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$, $f \in L_1$. Через $R_{n,r}(f)$, $\sigma_n(f)$ обозначаем соответственно суммы Рисса, Фейера функции f :

$$\begin{aligned} R_{n,r}(f, x) &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right) A_k(f, x), \\ \sigma_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) A_k(f, x) = R_{n,1}(f, x). \end{aligned}$$

Через H_n обозначаем множество вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n . Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_p$. Через $E_n(f)_p$ обозначаем наилучшее приближение функции f порядка n в пространстве L_p :

$$E_n(f)_p = \inf_{T \in H_n} \|f - T\|_p.$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда через $\delta_t^r(f)$ обозначаем конечную (симметричную) разность r -го порядка функции f с шагом t :

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{m=0}^r (-1)^m C_r^m f\left(x + \frac{tr}{2} - mt\right).$$

Для $f \in L_p$ полагаем

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{|t| \leq h} \|\delta_t^r(f)\|_p.$$

Величина $\omega_r(f)_p$ называется модулем непрерывности порядка r функции f в пространстве L_p . Через $q_k(\cdot)$ обозначаем положительные конечные постоянные, зависящие только от тех аргументов, которые будут выписаны.

2. Пусть $f \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$Z_n(f, x) = f(x) - \sigma_n(f, x) + \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{\pi/(n+1)}^{\infty} \frac{\delta_t^2(f, x)}{t^2} dt.$$

Заманский [1] установил, что для любой функции $f \in C$, у которой $\omega_2(f, h)_\infty \leq Mh$ при $h \in \mathbb{R}_+$, справедлива оценка

$$\|Z_n(f)\| \leq q_1 M(n+1)^{-1}.$$

Этот результат был обобщен Ефимовым [2], который показал, что для любой $f \in C$

$$\|Z_n(f)\| \leq q_2 \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{n+1} \right)_\infty.$$

Приведенные результаты Заманского и Ефимова в дальнейшем развивались в различных направлениях рядом авторов. В частности (см. [3, с. 233]) было установлено следующее утверждение. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < r < 2m$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$K(r, m) = (-1)^{m+1} 2^{r-2m} \left(\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} \sin^{2m} t dt \right)^{-1}.$$

Тогда для любой $f \in L_p$

$$\begin{aligned} \|f - R_{n,r}(f) + \frac{K(r, m)}{(n+1)^r} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-r-1} \delta_t^{2m}(f, \cdot) dt\|_p \\ \leq q_3(m, r, a) \|f - R_{n,2m}(f)\|_p. \end{aligned} \quad (1)$$

Неравенству (1) предшествовали работы Жука [4;5] и Скопиной [6]. В работе [7] установлен ряд утверждений общего характера, содержащих оценки полуаддитивных функционалов, заданных на полунормированных пространствах, посредством отклонений сумм Рисса и приведены некоторые их приложения. Полученные результаты, в частности, содействуют развитию тематики, связанной с неравенствами типа (1).

Пусть $s \geq 0$ – целое число или символ ∞ . Положим

$$\begin{aligned} X_n(f, a, s, x) = f(x) - \sigma_n(f, x) + \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{a/(n+1)}^{\infty} \frac{\delta_t^2(f, x)}{t^2} dt \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^k a^{2k-1} \{f(x) - R_{n,2k}(f, x)\}}{(2k)!(2k-1)}. \end{aligned}$$

В [5] установлено, что при $1 \leq p \leq \infty$ для любой $f \in L_p$ справедливо соотношение

$$\|X_n(f, a, \infty)\|_p \leq q_4(a) E_n(f)_p. \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует, что при $s \in \mathbb{Z}_+$ для любой $f \in L_p$ имеет место неравенство

$$\|X_n(f, a, s)\|_p \leq q_5(a, s) \|f - R_{n, 2s+2}(f)\|_p. \quad (3)$$

В настоящей работе мы устанавливаем (в существенно развитом виде) аналоги неравенств (2) и (3) применительно к суммам Рисса.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, определяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

Пусть $f \in L_1$, $r \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Через $S_{t,r}(f)$, $P_t(f)$ обозначаем соответственно функции В. А. Стеклова порядка r функции f , средние Абеля–Пуассона функции f :

$$\begin{aligned} S_{t,1}(f, x) &= \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} f(x+u) du, \quad S_{t,r}(f) = S_{t,1}(S_{t,r-1}(f)), \\ S_{t,r}(f, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \left(\frac{\sin(kt/2)}{kt/2} \right)^r, \\ P_t(f, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) e^{-tk}. \end{aligned}$$

Норму линейного оператора $U : L_p \rightarrow L_p$ обозначаем $\|U\|_p$:

$$\|U\|_p = \sup_{f \in L_p} \{ \|U(f)\|_p / \|f\|_p \};$$

E – оператор тождественного преобразования в L_1 . Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Полагаем

$$R_p(r) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|E - R_{n,r}\|_p, \quad R(r) = R_\infty(r).$$

Имеет место неравенство

$$R_p(r) \leq R(r) \quad (4)$$

при $1 \leq p \leq \infty$. Для $f \in L_p$ полином $T_n(f)_p \in H_n$ определяется равенством

$$\|f - T_n(f)_p\|_p = E_n(f)_p.$$

2. Нам понадобятся следующие известные утверждения.

Лемма А (обобщенное неравенство Минковского для интегралов; см., например, [8, с. 23, 24]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi(x, y)$ – измеримая функция, заданная на \mathbb{R}^2 . Тогда

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Лемма В (см., например, [7]). Справедливы неравенства: $R(r) \leq 2$, если $0 < r \leq 1$, $R(r) < 2r + 2$ при $r > 1$.

Замечание 1 ([9, с. 46]). Пусть $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$R(r) \leq \frac{4}{\pi^2} \ln \left(r + \frac{1}{2} \right) + 2, 6.$$

3. Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < \beta$, $b > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $T \in H_n$, функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

- а) $\varphi(t) = t^\beta \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$, где $b_m \in \mathbb{R}$, при $t \in [0, b]$;
- в) $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}} dt = 1$.

Положим при $t \in \mathbb{R}_+$

$$B_t(T, x) = \sum_{k=0}^n \varphi(kt) A_k(T, x).$$

Тогда для любых $x \in \mathbb{R}$ и $a \in [0, b]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_{a/(n+1)}^{\infty} \frac{B_t(T, x)}{t^{\alpha+1}} dt &= T(x) - R_{n,\alpha}(T, x) \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (T(x) - R_{n,m+\beta}(T, x)). \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Положим $c = a/(n+1)$. Имеем

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_c^{\infty} \frac{B_t(T, x)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \int_c^{\infty} \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_c^\infty \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt - \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt \\ &= k^\alpha \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}} dt - \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt = k^\alpha - \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_c^\infty \frac{B_t(T, x)}{t^{\alpha+1}} dt &= \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \left(k^\alpha - \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt \right) \\ &= T(x) - R_{n,\alpha}(T, x) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt. \quad (6) \end{aligned}$$

Так как $\varphi(t) = t^\beta \sum_{m=0}^\infty b_m t^m$ при $t \in [0, b]$, $a \in [0, b]$ и, следовательно, $ck \in [0, b]$ при $k = \overline{0, n}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt &= \sum_{m=0}^\infty b_m k^{\beta+m} \int_0^c t^{\beta+m-\alpha-1} dt \\ &= \sum_{m=0}^\infty b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha} k^{m+\beta}}{(m+\beta-\alpha)(n+1)^{m+\beta-\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \int_0^c \frac{\varphi(kt)}{t^{\alpha+1}} dt &= \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \sum_{m=0}^\infty b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha} k^{m+\beta}}{(m+\beta-\alpha)(n+1)^{m+\beta-\alpha}} \\ &= \sum_{k=0}^n A_k(T, x) \sum_{m=0}^\infty \frac{am + \beta - \alpha k^{m+\beta}}{(m+\beta-\alpha)(n+1)^{m+\beta}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n+1} \right)^{m+\beta} A_k(T, x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (T(x) - R_{n,m+\beta}(T, x)). \tag{7}
\end{aligned}$$

Осталось сопоставить (6) и (7).

4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha < \beta$, $\{B_t : L_p \rightarrow L_p\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ – семейство линейных операторов таких, что:

- a) для любой функции $f \in L_p$ функция $F(t, x) = B_t(f, x)$ измерима на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$;
- b) $\|B_t\|_p \leq \psi(t)$ при $t \in \mathbb{R}_+$, где функция $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что

$$M = \sup_{y>0} \left(y^\alpha \int_y^\infty \frac{\psi(t)}{t^{\alpha+1}} dt \right) < \infty;$$

c) для фиксированного $n \in \mathbb{Z}_+$ и любого $T \in H_n$ выполнено соотношение

$$B_t(T, x) = \sum_{k=0}^n \varphi(kt) A_k(T, x),$$

где функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\varphi(t) = t^\beta \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$$

при $t \in [0, b]$, $b > 0$, $b_m \in \mathbb{R}$;

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}} dt = 1.$$

Пусть $0 < a < b$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in L_p$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Для рассматриваемого множества операторов полагаем

$$\begin{aligned}
X_{n,\alpha,\beta}(f, a, s, x) &= f(x) - R_{n,\alpha}(f, x) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_{a/(n+1)}^{\infty} \frac{B_t(f, x)}{t^{\alpha+1}} dt \\
&\quad - \sum_{m=0}^s b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (f(x) - R_{n,m+\beta}(f, x)) \tag{8}
\end{aligned}$$

(при $s = -1$ сумму считаем равной нулю).

Покажем, что оператор, задаваемый формулой (8), является линейным оператором в L_p .

Полагая $\gamma = a/(n+1)$ и принимая во внимание условия а) и в), а также лемму А, для $f \in L_p$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_Q \left(\int_{\gamma}^{\infty} \frac{|B_t(f, x)|}{t^{\alpha+1}} dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(\int_Q |B_t(f, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\ &= \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\|B_t(f)\|_p}{t^{\alpha+1}} dt \leq \|f\|_p \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\|B_t\|_p}{t^{\alpha+1}} dt \\ &\leq \|f\|_p \int_{\gamma}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^{\alpha+1}} dt \leq \|f\|_p M \gamma^{-\alpha} < \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Из сказанного следует, что оператор U , задаваемый формулой

$$U(f, x) = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \int_{a/(n+1)}^{+\infty} \frac{B_t(f, x)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

является линейным в L_p и

$$\|U\|_p \leq Ma^{-\alpha}. \quad (10)$$

Теперь установим, что для любой $f \in L_p$ ряд

$$V(f) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (f - R_{n,m+\beta}(f))$$

сходится в L_p и

$$\|V\|_p \leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m+\beta). \quad (11)$$

Действительно, принимая во внимание (4) и лемму B , имеем

$$\begin{aligned}
A(f) &= \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} \|f - R_{n,m+\beta}(f)\|_p \\
&\leq \|f\|_p \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m+\beta) \\
&\leq \|f\|_p \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (2(m+\beta)+2) \\
&= 2\|f\|_p a^{\beta-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^m}{m+\beta-\alpha} (m+\beta+1).
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как ряд $\sum_{m=0}^{\infty} b_m a^m$ сходится и $a \in (0, b)$, то ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^m}{m+\beta-\alpha} (m+\beta+1)$$

также сходится. Значит, $A(f) < \infty$ и потому (в силу полноты L_p) ряд $V(f)$ сходится в L_p и $\|V(f)\|_p \leq A(f)$. Из соотношений (12) следует, что

$$\|V\|_p \leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m+\beta).$$

5. Лемма 2. В условиях пункта 4 для любой $f \in L_p$ справедливо неравенство

$$\|X_{n,\alpha,\beta}(f, a, \infty)\|_p \leq BE_n(f)_p$$

где

$$B \leq R(\alpha) + Ma^{-\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m+\beta).$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(f) = X_{n,\alpha,\beta}(f, a, \infty).$$

Сопоставляя неравенства (4), (10) и (11), находим, что

$$\|\Phi\|_p \leq R(\alpha) + Ma^{-\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m+\beta). \tag{13}$$

В силу леммы 1 $\Phi(T) = 0$ для любого полинома $T \in H_n$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)\|_p &\leq \|\Phi(f - T_n(f)_p)\|_p + \|\Phi(T_n(f)_p)\|_p \\ &= \|\Phi(f - T_n(f)_p)\|_p \leq \|\Phi\|_p E_n(f)_p.\end{aligned}$$

Осталось принять во внимание неравенство (13).

Замечание 2. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда в условиях леммы 2

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{m=k}^{\infty} b_m \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} (f - R_{n,m+\beta}(f)) \right\|_p \\ \leq \|f - R_{n,k+\beta}(f)\|_p \sum_{m=k}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-\alpha}}{m+\beta-\alpha} R(m-k).\end{aligned}$$

Здесь и далее $R(0) = 1$.

Доказательство. Так как при $m > k$

$$(E - R_{n,m+\beta}) = (E - R_{n,m-k})(E - R_{n,k+\beta}),$$

то для любой $f \in L_p$

$$\begin{aligned}\|f - R_{n,m+\beta}(f)\|_p &\leq \|E - R_{n,m-k}\|_p \|f - R_{n,k+\beta}(f)\|_p \\ &\leq R(m-k) \|f - R_{n,k+\beta}(f)\|_p.\end{aligned}$$

Остальная часть доказательства очевидна.

Следствие 1. Пусть $s+1 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда в условиях леммы 2 для любой $f \in L_p$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|X_{x,\alpha,\beta}(f, a, s)\|_p &\leq \left(B + \sum_{m=s+1}^{\infty} |b_m| \frac{a^{m+\beta-1}}{m+\beta-1} R(m-s-1) \right) \\ &\quad \times \|f - R_{n,s+1+\beta}(f)\|_p.\end{aligned}$$

Для доказательства следствия 1 достаточно принять во внимание, что

$$E_n(f)_p \leq \|f - R_{n,s+1+\beta}(f)\|_p$$

и сопоставить лемму 2 с замечанием 2.

 §3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приводимые в этом параграфе результаты в своей основе являются конкретизациями общих подходов, составляющих содержание леммы 2 и следствия 1.

1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $0 < r < 2m$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in L_1$. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} J_{n,r,m}(f, a, s, x) = f(x) - R_{n,r}(f, x) + \frac{K(r, m)}{(n+1)^r} \int_{a/(n+1)}^{\infty} \frac{\delta^{2m}(f, x)}{t^{r+1}} dt \\ - K(r, m) \sum_{j=0}^s a_j(m) \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} (f(x) - R_{n,2m+2j}(f, x)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K(r, m) &= (-1)^{m+1} 2^{r-2m} \left(\int_{\mathbb{R}_+} t^{r-1} \sin^{2m} t dt \right)^{-1}, \\ a_j(m) &= \frac{(-1)^{m+1+j}}{(2m+2j)!} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k (m-k)^{2m+2j}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$. Тогда

$$\|J_{n,r,m}(f, a, \infty)\|_p \leq q_6(r, m, a) E_n(f)_p,$$

где

$$\begin{aligned} q_6(r, m, a) &\leq R(r) + |K(r, m)| (2^{2m} r^{-1} a^{-r} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} |a_j(m)| \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} R(2m+2j)). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 достаточно убедиться, что семейство операторов $\{-K(r, m) \delta_t^{2m} : L_p \rightarrow L_p\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ удовлетворяет условиям а), в), с) пункта 4 §2 и применить лемму 2. Приступаем к проверке выполнения условий. Выполнение условия а) очевидно. Так как $\|\delta_t^{2m}(f)\|_p \leq 2^{2m}$, то в условии в) будет

$M \leq |K(r, m)|2^{2m}r^{-1}$. Для любого тригонометрического полинома T справедливо равенство

$$\delta_t^{2m}(T, x) = (-1)^m 2^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(T, x) \sin^{2m} \frac{kt}{2}.$$

Проверим, что в условии с) можно положить

$$\varphi(t) = (-1)^{m+1} K(r, m) 2^{2m} \sin^{2m} \frac{t}{2}.$$

В силу определения $K(r, m)$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} \varphi(t) dt = 1.$$

Далее,

$$\sin^{2m} x = (-1)^m 2^{-2m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \cos(2m - 2k)x$$

и, следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin^{2m} \frac{t}{2} &= (-1)^m 2^{-2m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k (m-k)^{2j} \right) t^{2j} \\ &= (-1)^m 2^{-2m} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left(\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k (m-k)^{2j} \right) t^{2j}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\varphi(t) = K(r, m) t^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(m) t^{2j}.$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условию с) пункта 4 §2 при любом $b > 0$.

Следствие 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\|J_{n,r,m}(f, a, s)\|_p \leq q_7(r, m, a, s) \|f - R_{n,2s+2+2m}(f)\|_p,$$

где

$$\begin{aligned} q_7(r, m, a, s) &\leq q_6(r, m, a) + |K(r, m)| \sum_{j=s+1}^{\infty} |a_j(m)| \\ &\times \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} R(2j-2s-2). \end{aligned}$$

Следствие 2 содержит значительное число параметров. Проиллюстрируем его для некоторых их значений.

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $a > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|f - \sigma_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-2} \delta_t^4(f, \cdot) dt - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a^3}{3} (f - R_{n,4}(f)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^5}{30} (f - R_{n,6}(f)) + \frac{a^7}{560} (f - R_{n,8}(f)) \right) \|_p \\ &\leq q_8(a) \|f - R_{n,10}(f)\|_p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|f - R_{n,2}(f) - \frac{1}{4 \ln 2} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-3} \delta_t^4(f, \cdot) dt \\ &\quad - \frac{1}{4 \ln 2} \left(\frac{a^2}{2} (f - R_{n,4}(f)) - \frac{a^4}{24} (f - R_{n,6}(f)) + \frac{a^6}{480} (f - R_{n,8}(f)) \right) \|_p \\ &\leq q_9(a) \|f - R_{n,10}(f)\|_p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|f - \sigma_n(f) + \frac{1}{6\pi} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-2} \delta_t^6(f, \cdot) dt - \frac{1}{6\pi} \left(\frac{a^5}{5} (f - R_{n,6}(f)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^7}{28} (f - R_{n,8}(f)) + \frac{7}{2160} a^9 (f - R_{n,10}(f)) \right) \|_p \\ &\leq q_{10}(a) \|f - R_{n,12}(f)\|_p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|f - R_{n,2}(f) + \frac{1}{3(8 \ln 2 - 3 \ln 3)} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-3} \delta_t^6(f, \cdot) dt \\
& - \frac{1}{3(8 \ln 2 - 3 \ln 3)} \left(\frac{a^4}{4} (f - R_{n,6}(f)) - \frac{a^6}{24} (f - R_{n,8}(f)) \right. \\
& \left. + \frac{7}{1920} a^8 (f - R_{n,10}(f)) \right) \|_p \leq q_{11}(a) \|f - R_{n,12}(f)\|_p; \\
& \|f - R_{n,3}(f) + \frac{1}{\pi} \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-4} \delta_t^6(f, \cdot) dt \\
& - \frac{1}{\pi} \left(\frac{a^3}{3} (f - R_{n,6}(f)) - \frac{a^5}{20} (f - R_{n,8}(f)) + \frac{1}{240} a^7 (f - R_{n,10}(f)) \right) \|_p \\
& \leq q_{12}(a) \|f - R_{n,12}(f)\|_p.
\end{aligned}$$

2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $0 < r < m$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in L_1$. Тогда полагаем

$$\begin{aligned}
G_{n,r,m}(f, a, s, x) &= f(x) - R_{n,r}(f, x) - \frac{K_1(r, m)}{(n+1)^r} \\
&\times \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-r-1} \{(E - P_t)^m(f, x)\} dt \\
&- K_1(r, m) \sum_{j=0}^s c_j(m) \frac{a^{m+j-r}}{m+j-r} (f(x) - R_{n,m+j}(f, x)),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1(r, m) &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} (1 - e^{-t})^m dt \right)^{-1}, \\
c_j(m) &= \frac{(-1)^{m+j}}{(m+j)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k k^{m+j}.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$. Тогда

$$\|G_{n,r,m}(f, a, \infty)\|_p \leq q_{13}(r, m, a) E_n(f)_p,$$

где

$$\begin{aligned} q_{13}(r, m, a) &\leq R(r) \\ &+ K_1(r, m) \left(2^m r^{-1} a^{-r} + \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(m)| \frac{a^{m+j-r}}{m+j-r} R(m+j) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для любой $f \in L_p$ положим $(E - P_0)^m(f) = 0$. Для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться, что семейство операторов $\{K_1(r, m)(E - P_t)^m : L_p \rightarrow L_p\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ удовлетворяет условиям а), в), с) пункта 4 §2 и воспользоваться леммой 2. Приступаем к проверке выполнения условий. Выполнение условия а) очевидно.

Так как $\|(E - P_t)^m\|_p \leq 2^m$, то в условии в) будет $M \leq K_1(r, m)2^m r^{-1}$. Проверим, что в условии с) можно положить

$$\varphi(t) = K_1(r, m)(1 - e^{-t})^m.$$

В силу определения $K_1(r, m)$ имеем,

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} \varphi(t) dt = 1.$$

Далее,

$$(1 - e^{-t})^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k e^{-kt}$$

и, следовательно, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (1 - e^{-t})^m &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k k^j \right) t^j \\ &= \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k k^j \right) t^j. \end{aligned}$$

Значит,

$$\varphi(t) = K_1(r, m)t^m \sum_{j=0}^{\infty} c_j(m)t^j.$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условию с) пункта 4 §2 при любом $b > 0$.

Следствие 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\|G_{n,r,m}(f, a, s)\|_p \leq q_{14}(r, m, a, s) \|f - R_{n,s+1+m}(f)\|_p,$$

где

$$q_{14}(r, m, a, s) \leq q_{13}(r, m, a) + K_1(r, m) \sum_{j=s+1}^{\infty} |c_j(m)| \frac{a^{m+j-r}}{m+j-r} R(j-s-1).$$

3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m, l \in \mathbb{N}$, $s+1 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. $0 < r < 2m$, $a > 0$, $x \in R$, $f \in L_1$. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} \varphi_{l,m}(t) &= \left(1 - \left(\frac{\sin(t/2)}{(t/2)}\right)^l\right)^m \\ F_{n,r,l,m}(f, a, s, x) &= f(x) - R_{n,r}(f, x) - \frac{K_2(r, l, m)}{(n+1)^r} \\ &\times \int_{a/(n+1)}^{\infty} t^{-r-1} \{(E - S_{t,l})^m(f, x)\} dt - K_2(r, l, m) \\ &\times \sum_{j=0}^s b_j(l, m) \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} (f(x) - R_{n,2m+2j}(f, x)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_2(r, l, m) &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} \varphi_{l,m}(t) dt \right)^{-1}, \\ b_j(l, m) &= \frac{1}{(2m+2j)!} \varphi_{l,m}^{(2m+2j)}(0). \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$. Тогда

$$\|F_{n,r,l,m}(f, a, \infty)\|_p \leq q_{15}(r, l, m, a) E_n(f)_p,$$

где

$$\begin{aligned} q_{15}(r, l, m, a) &\leq R(r) + K_2(r, l, m) (2^m r^{-1} a^{-r} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} |b_j(l, m)| \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} R(2m+2j)). \end{aligned}$$

Доказательство. Для любой $f \in L_p$ положим $(E - S_{0,l})^m(f) = 0$. Для доказательства теоремы 3 достаточно убедиться, что семейство операторов $\{K_2(r, l, m)(E - S_{t,l})^m : L_p \rightarrow L_p\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ удовлетворяет условиям а), в), с) пункта 4 §2 и применить лемму 2. Выполнение условия а) очевидно. Так как $\|(E - S_{t,l})^m\|_p \leq 2^m$, то в условии в) будет $M \leq K_2(r, l, m)2^m r^{-1}$. Проверим, что в условии с) можно положить

$$\varphi(t) = K_2(r, l, m)\varphi_{l,m}(t).$$

В силу определения $K_2(r, l, m)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^{-r-1} \varphi(t) dt = 1.$$

Так как

$$\frac{\sin(t/2)}{t/2} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{2^j (2j+1)!},$$

то

$$\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^l = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} d_j(l) t^{2j},$$

где $d_1(l) = -\frac{l}{12}$. Значит,

$$\begin{aligned} \varphi_{l,m}(t) &= \left(- \sum_{j=1}^{\infty} d_j(l) t^{2j} \right)^m = t^{2m} (-d_1(l)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} d_{j+1}(l) t^{2j})^m = t^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(l, m) t^{2j}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(t) = K_2(r, l, m) t^{2m} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(l, m) t^{2j}.$$

Таким образом, функция φ удовлетворяет условию с) пункта 4 §2 при любом $b > 0$.

Следствие 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$, $s + 1 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\|F_{n,r,l,m}(f, a, s)\|_p \leq q_{16}(r, l, m, a, s) \|f - R_{n,2s+2+2m}(f)\|_p,$$

где

$$\begin{aligned} q_{16}(r, l, m, a, s) &\leq q_{15}(r, l, m, a) \\ &+ K_2(r, l, m) \sum_{j=s+1}^{\infty} |b_j(l, m)| \frac{a^{2m+2j-r}}{2m+2j-r} R(2j-2s-2). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Zamansky, *Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation*. — Ann. Sci. Ecole. norm. sup., **66** (1949), 19–93.
2. А. В. Ефимов, *О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера*. — Изв. АН СССР, сер. мат., **22** (1958), 81–116.
3. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование*. СПб., 1995.
4. В. В. Жук, *О приближении периодических функций суммами Фейера и интегралом Валле-Пуссена*. — Вестн. ЛГУ, №. 13 (1974), 18–25.
5. В. В. Жук, *О приближении непрерывных периодических функций линейными методами суммирования рядов Фурье*. — Вестн. ЛГУ, №. 19 (1974), 25–31.
6. М. А. Скопина, *Об асимптотических формулах для уклонений линейных методов суммирования двойных рядов Фурье*. — Зап. науч. семин. ЛОМИ, **80** (1978), 189–196.
7. Н. Ю. Додонов, В. В. Жук, *Оценки функционалов посредством отклонений сумм Рисса в полунормированных пространствах*. — Проб. мат. анал., вып. 40 (2009), 57–68.
8. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*. М., 1996.
9. В. В. Жук, С. Ю. Пименов, *О нормах сумм Ахиезера–Крейна–Фавара*. — Вестн. С.-Петерб. ун-та, сер. 10, вып. 4 (2006), 34–47.

Dodonov N. Yu., Zhuk V. V. On approximating periodic functions by Riesz sums.

Let C be the space of continuous 2π -periodic functions f with the norm $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $\sigma_n(f)$ be the Fejer sums of f , $E_n(f)$ be the best

approximation, and let

$$\begin{aligned} X_n(f, a, x) &= f(x) - \sigma_n(f, x) \\ &+ \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{a/(n+1)}^{\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^2} dt \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k-1} \{(E - \sigma_n)^{2k}(f, x)\}}{(2k)!(2k-1)}. \end{aligned}$$

Generalizing earlier results by M. Zamanskii and A. V. Efimov, the second author proved that for $f \in C$, the following relation is valid:

$$\|X_n(f, a)\| \leq C(a) E_n(f). \quad (1)$$

The present paper establishes advanced analogs of inequality (1) for the Riesz sums.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец, 198504
Санкт-Петербург
Россия

E-mail: dodonov@math.spbu.ru
zhuk@math.spbu.ru

Поступило 10 ноября 2009 г.