Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 371, 2009 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**Восьмидесятилетию со дня рождения
Игоря Петровича Митюка
посвящается**

Введение

Пусть T – класс функций $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

В работе автора [1] была рассмотрена задача о множестве значений системы значений функции и ее производных в заданных точках круга U на классе T. Именно в [1] были установлены факты указанного множества в терминах неотрицательных и положительно определенных эрмитовых форм. Доказательства основывались на интегральном представлении класса T и некоторых теоремах теории моментов. Аналогичные задачи для класса C-функций Каратеодори были ранее решены в [2] с использованием интегрального представления класса C.

В настоящей работе при помощи того же подхода конкретизируются и дополняются некоторые из результатов в [1]. Так, на классе T исследована система

$$I(f) = \{c_2, f(z_1), f(z_2)\},$$

дана алгебраическая характеристика множества значений системы $I(f)$ и найдены граничные функции этого множества. Также найдено множество значений $f(z_2)$ при фиксированных значениях c_2 и $f(z_1)$.

Ключевые слова : типично вещественная функция, коэффициентные задачи, множества значений.

§1. Основные результаты

Пусть z_1 и z_2 – заданные точки, $0 < |z_j| \leqslant 1$, $\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}$ $(j = 1, 2)$. Пусть

$$w_j = x_j + iy_j = f(z_j), \quad x_j, y_j \in \mathbb{R} \quad (j = 1, 2), \quad x_0 = c_2.$$

Для $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots \in T$ обозначим через D множество значений системы

$$\{c_2, f(z_1), \quad f(z_2)\}. \tag{1}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Im} z_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$. *Тогда имеем:*

1. *Множество значений D есть множество всех таких точек*

$$X = X(x_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^5, \tag{2}$$

в которых неотрицательны все главные миноры двух эрмитовых матриц $A_1(X)$ и $A_{-1}(X)$, где

$$A_\varepsilon(X) = (a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + \varepsilon x_0 & (2 + \varepsilon\zeta_1)w_1 - \varepsilon & (2 + \varepsilon\zeta_2)w_2 - \varepsilon \\ (2 + \varepsilon\overline{\zeta}_1)\bar{w}_1 - \varepsilon & -\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} & \frac{(2+\varepsilon\overline{\zeta}_1)\bar{w}_1 - (2+\varepsilon\zeta_2)w_2}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} \\ (2 + \varepsilon\overline{\zeta}_2)\bar{w}_2 - \varepsilon & \frac{(2+\varepsilon\zeta_1)w_1 - (2+\varepsilon\overline{\zeta}_2)\bar{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} & -\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_2)w_2]}{\operatorname{Im}\zeta_2} \end{bmatrix},$$

$\varepsilon = -1, +1$.

2. *Для того чтобы некоторая точка $X \in \mathbb{R}^5$ была внутренней точкой множества D, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\det A_\varepsilon(X) > 0, \quad 2 + \varepsilon x_0 > 0,$$
$$-\frac{\operatorname{Im}[(2 + \varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1}(2 + \varepsilon x_0) > |(2 + \varepsilon\zeta_1)w_1 - \varepsilon|^2, \ \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

3. *Каждой точке $X \in \partial D$ – границе множества D – соответствует только одна функция $f_X(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ класса T и она имеет вид*

$$f_X(z) \equiv f_X^{(\varepsilon)}(z) = \frac{\lambda_1^{(\varepsilon)} z}{(1 + \varepsilon z)^2} + \sum_{k=2}^{3} \frac{\lambda_k^{(\varepsilon)} z}{1 - 2t_k^{(\varepsilon)} z + z^2}, \tag{4}$$

где

$$0 < \lambda_k^{(\varepsilon)} < 1, \quad \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^{(\varepsilon)} = 1, \quad t_3^{(\varepsilon)} \neq t_2^{(\varepsilon)},$$
$$-1 < t_j^{(1)} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant t_j^{(-1)} < 1, \quad j = 2, 3, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $z_1 = r$, $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$. *Тогда имеем:*

1. *Множество значений* D *есть множество всех таких точек*

$$X = X(x_0, x_1, w_2) \in \mathbb{R}^4, \tag{5}$$

в которых неотрицательны все главные миноры двух эрмитовых матриц $B_1(X)$ *и* $B_2(X)$, *где*

$$B_1(X) = (b_{jk}^{(1)})_{j,k=0}^{1}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 + \rho + (4-\rho^2)x_1 & -1 + \frac{1}{\zeta_2 - \rho}[(4-\rho^2)x_1 - (4-\zeta_2^2)w_2] \\ \bar{b}_{01} & \frac{(4-\rho^2)x_1}{|\zeta_2-\rho|^2} + 2\operatorname{Re}\frac{(4-\zeta_2^2)w_2}{(\rho-\zeta_2)(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} \end{bmatrix},$$

$$B_2(X) = (b_{jk}^{(2)})_{j,k=0}^{2}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & \rho x_1 - 1 & \frac{w_2 - x_1}{\rho - \zeta_2} \\ \rho x_1 - 1 & \rho^2 x_1 - \rho - x_0 & \frac{\rho x_1 - \zeta_2 w_2}{\zeta_2 - \rho} \\ \frac{\bar{w}_2 - x_1}{\rho - \overline{\zeta}_2} & \frac{\rho x_2 - \overline{\zeta}_2 \bar{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \rho} & \frac{x_1}{|\zeta_2 - \rho|^2} + 2\operatorname{Re}\frac{w_2}{(\rho-\zeta_2)(\overline{\zeta}_2-\zeta_2)} \end{bmatrix}$$

$\rho = r + \frac{1}{r}$.

2. *Для того чтобы некоторая точка* $X \in \mathbb{R}^4$ *была внутренней точкой множества* D, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\det[(b_{jk}^{(1)})_{j,k=0}^{s_1}] > 0, \quad \det[(b_{jk}^{(2)})_{j,k=0}^{s_2}] > 0,$$

при $s_1 = 0, 1$, $s_2 = 0, 1, 2$.

3. *Каждой точке* $X \in \partial D$ *соответствует только одна функция* $f_X(z)$ *класса* T *и она имеет вид*

$$f_X(z) = \frac{\lambda_1 z}{(1+z)^2} + \frac{\lambda_2 z}{(1-z)^2} + \frac{\lambda_3 z}{1 - 2tz + z^2},$$

где $\lambda_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3)$, $\sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_1 = 1$, $-1 < t < 1$,

либо вид

$$f_X(z) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\mu_j}{1 - 2t_j z + z^2},$$

где $\mu_j > 0$, $-1 \leqslant t_j \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{2} \mu_j = 1$, $j = 1, 2$.

Известно [3, 1], что множество D_1 значений системы $\{c_2, f(z_1)\}$ на классе T в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, есть множество всех точек $X = X(c_2, w_1) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих системе неравенств

$$|c_2| \leqslant 2, \quad -\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \geqslant 0,$$
$$-(2+\varepsilon c_2)\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \geqslant |w_1(2+\varepsilon\zeta_1) - \varepsilon|^2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Кроме того, из леммы 3 в [1] следует, что $\operatorname{Int} D_1$ – множество внутренних точек D_1 – определяется системой неравенств

$$|c_2| < 2, \quad -(2+\varepsilon c_2)\frac{\operatorname{Im}[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1} > |w_1(2+\varepsilon\zeta_1) - \varepsilon|^2,$$
$$\varepsilon = \pm 1. \tag{6}$$

Пусть $\tilde{T}$ – класс функций $f(z) \in T$ при фиксированных значениях c_2 и $w_1 = f(z_1)$, удовлетворяющих условию (6), $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$.

Следствие. *Пусть* $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$. *Тогда множество* $\tilde{D}$ *значений* $f(z_2)$ *на классе* $\tilde{T}$ *есть пересечение двух кругов* $D^{(\varepsilon)}$:

$$|w - O^{(\varepsilon)}| \leqslant R^{(\varepsilon)}, \quad \varepsilon = +1, -1, \tag{7}$$

где

$$R^{(\varepsilon)} = \frac{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1| \cdot |\zeta_2 - \zeta_1|}{2|2+\varepsilon\zeta_2| \operatorname{Im}\zeta_2} \cdot \frac{\Delta_1^{(\varepsilon)}}{\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)}},$$
$$O^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2+\varepsilon\zeta_2}\left[\varepsilon - \frac{i}{2\operatorname{Im}\zeta_2}\left(2 + \varepsilon c_2 + \frac{\Delta_2^{(\varepsilon)}}{\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)}}\right)\right],$$

при

$$\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)} = -\frac{\operatorname{Im}\{[w_1(2+\varepsilon\zeta_1)-\varepsilon](\zeta_2-\zeta_1)(\overline{\zeta}_2-\zeta_1)\}}{\operatorname{Im}\zeta_1} + 2 + \varepsilon c_2,$$

$$\Delta_1^{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} 2+\varepsilon c_2 & (2+\varepsilon\zeta_1)w_1-\varepsilon \\ (2+\varepsilon\overline{\zeta}_1)\bar{w}_1-\varepsilon & -\frac{\operatorname{Im}[w_1(2+\varepsilon\zeta_1)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2^{(\varepsilon)} = \{(\overline{\zeta}_2-\zeta_1)[(2+\varepsilon\zeta_1)w_1-\varepsilon)] + 2 + \varepsilon c_2\} \times \{(\overline{\zeta}_2-\overline{\zeta}_1)[(2+\varepsilon\overline{\zeta}_1)\bar{w}_1-\varepsilon] + 2 + \varepsilon c_2\}.$$

Каждой точке границы множество $\tilde{D}$ соответствует только одна функция $f_X^{(\varepsilon)}(z,t_1) \equiv f_X^{(\varepsilon)}(z)$ класса $\tilde{T}$:

$$f_X^{(\varepsilon)}(z) = \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}\left\{1 + \frac{z}{1-2t_1z+z^2}\left[2\varepsilon + c_2 - \frac{z}{1-2t_2z+z^2}\cdot\frac{[w_1(\zeta_1-2t_1)-1](\zeta_1+2\varepsilon)-c_2+2t_1|^2\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[(\zeta_1-2t_1)(\zeta_1+2\varepsilon)w_1-\zeta_1]}\right]\right\}$$

где

$$2t_2 = 2t_2^{(\varepsilon)}(t_1) = \frac{\operatorname{Im}\{\zeta_1(\zeta_1-2t_1)[w_1(\zeta_1+2\varepsilon)-1]-\zeta_1(c_2+2\varepsilon)\}}{\operatorname{Im}[(\zeta_1-2t_1)(\zeta_1+2\varepsilon)w_1-\zeta_1]}, \quad t_1,t_2 \in [-1,1].$$

Замечание. Множество значений $f(z_2)$ при фиксированных c_2 и $f(z_1)$ в случае $\operatorname{Im} z_1 = 0$ найдено в [4] (см. [4, теорема 2)].

§2. Доказательства

1°. Доказательство теоремы 1.

Докажем первое утверждение теоремы 1.

Для класса T имеет место интегральное представление

$$f(z) \in T \Leftrightarrow f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{z}{1-2tz+z^2}\,d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{8}$$

где M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$ [5, 6].

Из (8) для системы (1) получаем представление

$$c_2 = \int\limits_{-1}^{1} 2t d\alpha(t), \quad f(z_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \alpha(t) \in M_1, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Используя (9), нетрудно показать, что D – выпуклое ограниченное замкнутое множество.

Для того чтобы имело место представление (9), необходимо и достаточно, чтобы из справедливости для всех $t \in [-1, 1]$ неравенства

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \delta_3 t + \sum_{j=1}^{2} \frac{\delta_j}{\zeta_j - 2t}\right] \geqslant 0, \tag{10}$$

(где $\delta_0 \neq 0$, δ_j, $j = 1, 2, 3$, – некоторые комплексные числа) вытекала справедливость неравенства

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + 2\delta_3 c_2 + \sum_{j=1}^{2} \delta_j w_j\right] \neq 0 \tag{11}$$

(теорема 1.3 в [7, с. 86–87]).

Так как $\operatorname{Im} \zeta_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$, запишем (10) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_5(t)}{\prod\limits_{j=1}^{2} |\zeta_j - 2t|^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{12}$$

где $A_5(t)$ – алгебраический многочлен от t пятой степени. Используя представление Маркова–Лукача (см. [7, с. 89]) для неотрицательных многочленов, из (12) получаем

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (1-t)\left|\beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\beta_2}{\zeta_2 - 2t}\right|^2 + (1+t)\left|\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\gamma_2}{\zeta_2 - 2t}\right|^2 \\
&= (1-t)\left[|\beta_0|^2 + \sum_{j=1}^{2} \frac{|\beta_j|^2}{|\zeta_j - 2t|^2} + 2\operatorname{Re}\left(\overline{\beta}_0 \sum_{j=1}^{2} \frac{\beta_j}{\zeta_j - 2t}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 \overline{\beta}_2}{(\zeta_1 - 2t)(\overline{\zeta}_2 - 2t)}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$+ (1+t)\left[|\gamma_0|^2 + \sum_{j=1}^{2} \frac{|\gamma_j|^2}{|\zeta_j - 2t|^2} + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\gamma}_0 \sum_{j=1}^{2} \frac{\gamma_j}{\zeta_j - 2t}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma_1\overline{\gamma}_2}{(\zeta_1 - 2t)(\overline{\zeta}_2 - 2t)}\right)\right] \geqslant 0, \tag{13}$$

где $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ – комплексные числа.

Используя разложения

$$\frac{1+\varepsilon t}{\zeta_j - 2t} = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2+\varepsilon\zeta_j}{2}\frac{1}{\zeta_j - 2t},$$

$$\frac{1+\varepsilon t}{|\zeta_j - 2t|^2} = \mathrm{Re}\,\frac{2+\varepsilon\zeta_j}{(\overline{\zeta}_j - \zeta_j)(\zeta_j - 2t)}, \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{1+\varepsilon t}{(\zeta_1 - 2t)(\overline{\zeta}_2 - 2t)} = \frac{2+\varepsilon\zeta_1}{2(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)} \cdot \frac{1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{2+\varepsilon\overline{\zeta}_2}{2(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)} \cdot \frac{1}{\overline{\zeta}_2 - 2t},$$

$$\varepsilon = \pm 1,$$

из неравенства (13) и условия (9)–(10) приходим к неравенствам

$$H_1(X) \equiv \left(1 - \frac{c_2}{2}\right)|\beta_0|^2 + \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}\,\frac{(2-\zeta_j)w_j}{\overline{\zeta}_j - \zeta_j}|\beta_j|^2 + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} \overline{\beta}_0\beta_j[1 + (2-\zeta_j)w_j] + \mathrm{Re}\left[\beta_1\overline{\beta}_2\frac{(2-\zeta_1)w_1 - (2-\overline{\zeta}_2)\overline{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1}\right] \geqslant 0$$

$$H_2(X) \equiv \left(1 + \frac{c_2}{2}\right)|\gamma_0|^2 + \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}\,\frac{(2+\zeta_j)w_j}{\overline{\zeta}_j - \zeta_j}|\gamma_j|^2 + \mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2} \overline{\gamma}_0\gamma_j[-1 + (2+\zeta_j)w_j] + \mathrm{Re}\left[\gamma_1\overline{\gamma}_2\frac{(2+\zeta_1)w_1 - (2+\overline{\zeta}_2)\overline{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1}\right] \geqslant 0.$$

Неотрицательность эрмитовых форм $H_1(X)$ и $H_2(X)$ равносильна неотрицательности всех главных миноров эрмитовых матриц $A_1(X)$ и $A_{-1}(X)$ (см. [8, с. 300]).

Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 и 3 теоремы 1 аналогично доказательствам лемм 1 и 2 в [1]. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 следует из доказательства теоремы 1 в [4, с. 52–54]. Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично леммам 1 и 2 в [1].

2°. Доказательство следствия. В силу утверждения 2 теоремы 1 имеем

$$\operatorname{Int}\tilde{D} = \{w_2 \in \mathbb{C} : \det A_\varepsilon(c_2, w_1, w_2) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1\}.$$

Преобразуя эрмитову матрицу $A_\varepsilon = (a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^2$, получим

$$\det A_\varepsilon = \frac{1}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2 |\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|^2} \det \tilde{A}_\varepsilon,$$

где $\tilde{A}_\varepsilon$ – эрмитова матрица,

$$\tilde{A}_\varepsilon = (\tilde{a}_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^2 =$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} & \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)(\omega_1 - \varepsilon) & \tilde{a}_{02}^{(\varepsilon)} \\ \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\zeta_2 - \overline{\zeta}_1)(\overline{\omega}_1 - \varepsilon) & \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + 2\operatorname{Re}\left\{(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)\left[\frac{\omega_1(\zeta_2 - \zeta_1)}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} - \varepsilon\right]\right\} & \tilde{a}_{12}^{(\varepsilon)} \\ \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\zeta_2 - \overline{\zeta}_2)[\overline{w}_2(2 + \varepsilon\overline{\zeta}_2) - \varepsilon] & \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\zeta_2 - \zeta_1)(\omega_1 - \varepsilon) & \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} &= 2 + \varepsilon c_2, \quad \omega_1 = (2 + \varepsilon\zeta_1)w_1 \\
\tilde{a}_{01}^{(\varepsilon)} &= \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)[(2 + \varepsilon\zeta_1)w_1 - \varepsilon] \\
\tilde{a}_{02}^{(\varepsilon)} &= \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\overline{\zeta}_2 - \zeta_2)[w_2(2 + \varepsilon\zeta_2) - \varepsilon] \\
\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)} &= \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + 2\operatorname{Re}\left\{(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1)\left[\frac{(2 + \varepsilon\zeta_1)w_1(\zeta_2 - \zeta_1)}{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1} - \varepsilon\right]\right\} \\
\tilde{a}_{12}^{(\varepsilon)} &= \tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} + (\overline{\zeta}_2 - \overline{\zeta}_1)[\overline{w}_1(2 + \varepsilon\overline{\zeta}_1) - \varepsilon]
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\det[(\tilde{a}_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^1 &= |\overline{\zeta}_2 - \zeta_1|^2 \det[(a_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^1] = |\overline{\zeta}_2 - \zeta_1|^2 \Delta_1^{(\varepsilon)}, \\
\det[(\tilde{a}_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=1}^2] &= \frac{|\zeta_2 - \zeta_1|^2}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|^2} \det[(\tilde{a}_{jk}^{(\varepsilon)})_{j,k=0}^1] = \frac{|\zeta_2 - \zeta_1|^2}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|^2} \Delta_1^{(\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

В силу неравенств (6), имеем $\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)} > 0$, ибо $\tilde{a}_{00}^{(\varepsilon)} = a_{00}^{(\varepsilon)}$. Поэтому неравенство $\det \tilde{A}_\varepsilon > 0$ равносильно неравенству

$$\left|\tilde{a}_{02}^{(\varepsilon)} - \frac{\tilde{a}_{01}^{(\varepsilon)}\tilde{a}_{12}^{(\varepsilon)}}{\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)}}\right| < \frac{|\zeta_2 - \zeta_1||\overline{\zeta}_2 - \zeta_1|}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_2|\tilde{a}_{11}^{(\varepsilon)}}\Delta_1^{(\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{14}$$

Следовательно, $\operatorname{Int}\tilde{D}$ – пересечение двух кругов (14). Первое утверждение Следствия доказано.

Граничным точкам множества $\tilde{D}$ соответствуют функции (4) при $\lambda_j^{(\varepsilon)}$ и $t_j^{(\varepsilon)}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^{(\varepsilon)} = 1, \ \sum_{j=1}^{3}\lambda_j^{(\varepsilon)}t_j^{(\varepsilon)} = \frac{c_2}{2}, \quad \sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_j^{(\varepsilon)}}{\zeta_1 - 2t_j^{(\varepsilon)}} = w_1, \varepsilon = \pm 1. \tag{15}$$

Используя первые два равенства (15), запишем третье равенство в виде

$$\begin{aligned} x^{(\varepsilon)}(\zeta_1 - 2t_3^{(\varepsilon)}) &\equiv \big\{[w_1(\zeta_1 + 2\varepsilon) - 1](\zeta_1 - 2t_2^{(\varepsilon)}) - (c_2 + 2\varepsilon)\big\}(\zeta_1 - 2t_3^{(\varepsilon)}) \\ &= 4\lambda_3^{(\varepsilon)}(t_3^{(\varepsilon)} + \varepsilon)(t_3^{(\varepsilon)} - t_2^{(\varepsilon)}), \quad x^{(\varepsilon)} = x^{(\varepsilon)}(t_2^{(\varepsilon)}), \end{aligned}$$

откуда находим $t_3^{(\varepsilon)}$:

$$t_3^{(\varepsilon)} = t_3^{(\varepsilon)}(t_2^{(\varepsilon)}) = \frac{\operatorname{Im}[\zeta_1 x^{(\varepsilon)}]}{2\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}}.$$

Замечая далее, что

$$\begin{aligned} \zeta_1 - 2t_3^{(\varepsilon)} &= \frac{\zeta_1 \operatorname{Im} x^{(\varepsilon)} - \operatorname{Im}[\zeta_1 x^{(\varepsilon)}]}{\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}} = \frac{-\overline{x^{(\varepsilon)}}\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}} \\ t_3^{(\varepsilon)} + \varepsilon &= \frac{\operatorname{Im}[x^{(\varepsilon)}(\zeta_1 + 2\varepsilon)]}{2\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}} \\ t_3^{(\varepsilon)} - t_2^{(\varepsilon)} &= \frac{\operatorname{Im}[x^{(\varepsilon)}(\zeta_1 - 2t_2^{(\varepsilon)})]}{2\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

найдем $\lambda_3^{(\varepsilon)}$:

$$\lambda_3^{(\varepsilon)} = \frac{-|x^{(\varepsilon)}|^2 \operatorname{Im}\zeta_1 \operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}}{\operatorname{Im}[x^{(\varepsilon)}(\zeta_1 + 2\varepsilon)]\operatorname{Im}[x^{(\varepsilon)}(\zeta_1 - 2t_2^{(\varepsilon)})]}$$

Запишем теперь функцию $f_X^{(\varepsilon)}(z)$ в виде

$$f_X^{(\varepsilon)}(z) = \frac{z}{(1+\varepsilon z)^2}\left\{1 + \frac{z}{1-2t_2^{(\varepsilon)}z+z^2}\right.$$
$$\left.\times\left[c_2 + 2\varepsilon + 4\lambda_3^{(\varepsilon)}(t_3^{(\varepsilon)}+\varepsilon)(t_3^{(\varepsilon)}-t_2^{(\varepsilon)})\frac{z}{1-2t_3^{(\varepsilon)}z+z^2}\right]\right\}$$

и заметим, что

$$4\lambda_3^{(\varepsilon)}(t_3^{(\varepsilon)}+\varepsilon)(t_3^{(\varepsilon)}-t_2^{(\varepsilon)}) = -\frac{|x^{(\varepsilon)}|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im} x^{(\varepsilon)}},$$

получим второе утверждение Следствия.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
2. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
3. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стильтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
4. Е. Г. Голузина, *О множестве значений $f(z_0)$ в одном классе типично вещественных функций* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **237** (1997), 46–55.
5. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
6. Г. М. Голузин, *Об одном методе вариаций в теории аналитических функций.* — Учен. зап. ЛГУ, No. 144, (1952), 85–101.
7. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М. (1973).
8. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 3-е изд., М. (1967).

Goluzina E. G. On the region of values of the system $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ in the class of typically real finctions.

The author's investigations in the well known class T of typically real functions $f(z)$ in the disk $U = \{z : |z| < 1$ are prolonged. The region of values of the system $\{c_2, f(z_1), f(z_2)\}$ in the class T is investigated. As a corollary, the region of values $f(z_2)$ in the class of functions $f \in T$ with

fixed values c_2 and $f(z_1)$ is determined. In the proof a criterion of decision power moment problem is used.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, н.р. Фонтанки, 27
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 12 октября 2009 г.