Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 370, 2009 г.

**М. Н. Демченко**

# О ЧАСТИЧНО ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

**К юбилею Нины Николаевны Уральцевой**

## 1. Введение

Изучаемое в работе преобразование $M^T$ используется при решении динамической обратной задачи для системы Максвелла [1, 2]. В задаче требуется восстановить переменную скорость распространения электромагнитных волн в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ по измерениям на границе $\partial\Omega$. Преобразование $M^T$ действует на соленоидальное поле $y$ в приграничном слое $\Omega^T$ оптической толщины $T$; образ $M^T y$ составляется из разрывов, возникающих при проектировании поля $y$ на подпространства соленоидальных полей, локализованных в слоях $\Omega^\xi$ толщины $\xi \in (0, T)$. При этом поле $M^T y$ оказывается касательным к эквидистантным поверхностям $\partial\Omega^\xi \setminus \partial\Omega$. Оператор $M^T$ является аналогом векторного преобразования Фурье в $\mathbb{R}^3$, которое переводит соленоидальные поля в касательные к сферам с центрами в начале координат.

В работах [1–3] оператор $M^T$ определялся и использовался при существенном ограничении на величину $T$: требовалось, чтобы в $\Omega^T$ были регулярны полугеодезические (лучевые) координаты. В этом же слое восстанавливалась скорость, причем ключевую роль играли унитарность $M^T$ и его сплетающие свойства. При бо́льших $T$ проблемой становится само определение оператора $M^T$ и его ограниченность в естественных $L_2$-нормах. Осложнения вызваны нарушением гладкости эквидистант границы $\partial\Omega$.

В нашей работе преобразование $M^T$ определяется для произвольных $T$, причем обобщение потребовало радикального пересмотра первоначального определения. Теорема 4 устанавливает согласованность

*Ключевые слова* : разложение Гельмгольца, преобразование “соленоидальные поля” → “поперечные поля”, частичная изометричность, сплетающие свойства.

определения, данного в этой работе (формула (15)), с тем, которое использовалось в работах [1–3]. Установлено также, что вне зоны регулярности полугеодезических координат унитарность может нарушаться: оператор $M^T$ остается лишь частично изометрическим (теорема 1). Доказаны сплетающие свойства обобщенного преобразования (формулы (20) и (40)). Наши рассмотрения подготавливают решение обратной задачи в слое $\Omega^T$ произвольной толщины $T$.

## 2. Обозначения и условия на область

Здесь мы введем ряд обозначений.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega \in C^\infty$.
- $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $c > 0$ в $\overline{\Omega}$ – функция скорости. Функция $c$ определяет в $\Omega$ оптическую метрику:
$$ds^2 := \frac{|dx|^2}{c^2}.$$
- $\mathrm{dist}_c(\cdot,\cdot)$ – функция расстояния в оптической метрике.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.
- $\varepsilon, \mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varepsilon, \mu > 0$ в $\overline{\Omega}$ – скалярные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.
- $\tau(x) := \mathrm{dist}_c(x,\Gamma)$ – эйконал. Выполнено $\tau \in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega})$, так как $\tau$ является функцией расстояния до множества. Кроме того, функция $\tau$ удовлетворяет уравнению эйконала
$$|\nabla\tau|^2 = \frac{1}{c^2}. \tag{1}$$
Здесь и всюду далее все дифференциальные операции над функциями и полями в $\Omega$ понимаются как обобщенные операции в $\mathbb{R}^3$.
- $\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \xi\}$.
- $X^\xi$ – оператор срезки векторных полей на подобласть $\Omega^\xi$:
$$(X^\xi z)(x) := \begin{cases} z(x), & x \in \Omega^\xi \\ 0, & x \notin \Omega^\xi. \end{cases}$$
- $\Gamma^\xi := \partial\Omega^\xi \setminus \Gamma$ – набор эквидистант.
- Отнесем точку $x \in \Omega$ к множеству $\omega_0$, если $x$ соединяется с $\Gamma$ более, чем одной кратчайшей (в оптической метрике) геодезической. Множество $\omega_0$ называют *множеством кратных точек*, а $\omega := \overline{\omega_0}$ – *множеством раздела* (*cut locus*). Известно, что

$\omega \cap \Gamma = \varnothing$, а также что для области с гладкой границей мера Лебега этого множества равна нулю. Кроме того, $\tau \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus U)$ для любой окрестности $U$ множества $\omega$, и эквидистанты $\Gamma^\xi$ являются гладкими поверхностями вне $\omega$.

- $\nu := c\nabla\tau$ – поле, определенное в $\Omega \setminus \omega$. Из уравнения эйконала (1) следует, что $|\nu| = 1$ в $\Omega \setminus \omega$. Поле $\nu$ совпадает с нормалями к $\Gamma^\xi$, внешними по отношению к $\Omega^\xi$.
- $T_* := \sup\{\xi > 0 \,|\, \Omega^\xi \neq \Omega\}$. Далее мы предполагаем число $T \in (0, T_*]$ зафиксированным.

Теперь введем обозначения для функциональных пространств (все пространства в работе вещественны).

Обозначим через $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi)$ пространство квадратично суммируемых полей в $\Omega^\xi$ с весом $\varepsilon$. Скалярное произведение в нем определяется формой $(\varepsilon\cdot, \cdot)_{\Omega^\xi}$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение в безвесовом пространстве:

$$(z, w)_{\Omega^\xi} := \int\limits_{\Omega^\xi} dx\, \langle z(x), w(x)\rangle.$$

Норму в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi)$ обозначим через $\|\cdot\|_\varepsilon$. Для $\varepsilon \equiv 1$ пространство и норму будем обозначать $\vec{L}_2(\Omega^\xi)$ и $\|\cdot\|$. Положим также

$$(z, w) := (z, w)_{\Omega^T}.$$

Выделим в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ подпространство поперечных полей:

$$\vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) = \{v \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \,|\, \langle v(x), \nu(x)\rangle = 0 \ \text{ a.e. } \ x \in \Omega^T\}$$

и обозначим проектор на это подпространство через $P_\theta$.

Определим оператор векторного умножения на $\nu$ слева:

$$Nz := \nu \times z.$$

Очевидно, что $N^* = -N$ и $N^2 = -P_\theta$.

Через $H^1(\Omega^\xi)$ мы будем обозначать стандартное соболевское пространство в $\Omega^\xi$ с нормой

$$\|h\|^2_{H^1(\Omega^\xi)} := \int\limits_{\Omega^\xi} dx\, (|\nabla h(x)|^2 + h(x)^2).$$

Введем пространство соленоидальных полей:

$$J_\varepsilon := \{y \in \vec{L}_{2,\,\varepsilon}(\Omega) \,|\, \operatorname{div}(\varepsilon y) = 0\}$$

и выделим в нем подпространство полей, локализованных в $\Omega^\xi$:

$$J_\varepsilon^\xi := \operatorname{clos}\{y \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega}) \cap J_\varepsilon \,|\, \operatorname{supp} y \subset \Omega^\xi \cup \Gamma\}.$$

Для $\varepsilon \equiv 1$ в двух последних обозначениях вес опускается: $J$, $J^\xi$. Нетрудно показать, что включения $y \in J_\varepsilon^\xi$ и $\varepsilon y \in J^\xi$ равносильны. Кроме того, выполнено

$$\{y \in J_\varepsilon \,|\, \operatorname{supp} y \subset \Omega^\xi \cup \Gamma\} \subset J_\varepsilon^\xi. \tag{2}$$

Ограниченную область $V \subset \mathbb{R}^3$ будем называть областью с липшицевой границей и писать $\partial V \in \mathrm{Lip}$, если для любой точки $\sigma \in \partial V$ существуют: открытая окрестность $U_\sigma \subset \mathbb{R}^3$, содержащая $\sigma$, $D_\sigma \subset \mathbb{R}^2$, цилиндр $Z_\sigma = D_\sigma \times (0,1)$, $C^\infty$-диффеоморфизм $\phi_\sigma : U_\sigma \to D \times (0,1)$, где $D$ – произвольный открытый диск в $\mathbb{R}^2$, и липшицева функция $f_\sigma : \overline{D} \to (0,1)$, такие что

$$\phi(V \cap U_\sigma) = \{(z', z_3) \in D \times (0,1) \,|\, z_3 < f_\sigma(z')\}.$$

Мера Лебега в $\mathbb{R}^3$ индуцирует поверхностную меру на $\partial V$.

Всюду далее мы будем считать, что область $\Omega^T$ удовлетворяет следующему условию.

**Условие 1.** *При почти всех $\xi \in (0,T)$ выполнено:*

$$\partial\Omega^\xi \in \mathrm{Lip}\,, \quad \operatorname{mes}_{\Gamma^\xi}(\Gamma^\xi \cap \omega) = 0, \tag{3}$$

*где $\operatorname{mes}_{\Gamma^\xi}$ – поверхностная мера на $\Gamma^\xi$. Кроме того, (3) выполнено для $\xi = T$.*

Следующее чисто техническое утверждение мы оставляем без доказательства.

**Утверждение 1.** *Для любой функции $h \in L_1(\Omega^T)$ выполнено:*

$$\int\limits_{\Omega^T} h\,dx = \int\limits_0^T d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} ch\,d\sigma \tag{4}$$

*(внутренний интеграл берется по поверхностной мере на $\Gamma^\xi$).*

## 3. Спектральное семейство $P^\xi$

Для $\xi \in (0,T]$ обозначим через $P^\xi$ ортогональный проектор на подпространство $J^\xi_\varepsilon$, действующий в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$. Положим $P^\xi = \mathbb{O}$ для $\xi \leqslant 0$ и $P^\xi = P^T$ для $\xi > T$.

**Лемма 1.** *Для любого $\xi$ верно равенство*

$$s - \lim_{s\to\xi-0} P^s = P^\xi. \tag{5}$$

**Доказательство.** Утверждение леммы содержательно лишь для $\xi \in (0,T]$. Предположим, что в этом случае (5) не выполнено. Тогда существует ненулевой элемент $y \in J^\xi_\varepsilon$, ортогональный всем $J^s_\varepsilon$ при $s < \xi$. По определению пространства $J^\xi_\varepsilon$ поле $y$ можно приблизить последовательностью полей $\{y_n\} \subset \vec{C}^\infty(\overline{\Omega}) \cap J^\xi_\varepsilon$, таких что $\operatorname{supp} y_n \subset \Omega^\xi \cup \Gamma$. Очевидно, что $y_n \in J^{s_n}_\varepsilon$, $s_n < \xi$. Но тогда $y \perp_\varepsilon y_n$ при всех $n$. Следовательно, $y = 0$. □

Таким образом, сужения проекторов $\{P^\xi\}$ на $J^T_\varepsilon$ образуют в этом пространстве спектральное семейство, сильно непрерывное слева.

Нам понадобится описание ортогонального дополнения к $J^\xi_\varepsilon$. Определим следующее линейное пространство для произвольного $\xi \in (0,T]$:

$$G^\xi := \{\nabla h \mid h \in H^1(\Omega^\xi),\ h\,|_\Gamma = 0\}.$$

Нетрудно доказать, что

$$G^\xi \subset \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi) \ominus_\varepsilon J^\xi_\varepsilon. \tag{6}$$

В случае, если $\partial\Omega^\xi \in \mathrm{Lip}$, $G^\xi$ образует подпространство в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi)$. При этом включение (6) обращается в равенство (см., например, [5])

$$G^\xi = \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^\xi) \ominus_\varepsilon J^\xi_\varepsilon, \tag{7}$$

и, кроме того, градиенты гладких функций плотны в $G^\xi$ (см. [4])

$$G^\xi = \operatorname{clos}\{\nabla h \mid h \in C^\infty(\overline{\Omega^\xi}),\ \operatorname{supp} h \cap \Gamma = \varnothing\}. \tag{8}$$

## 4. Оператор $K^T$

Пусть $s \in (0,T]$. Определим оператор $K^s : \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ через его билинейную форму:

$$(\varepsilon K^s z, w) = \int_0^s d\xi \, (\varepsilon \, (X^\xi - P^\xi) z, w), \quad z, w \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T). \tag{9}$$

Данный интеграл существует, так как с помощью поляризационного тождества подинтегральное выражение можно представить в виде линейной комбинации монотонных функций. Очевидно, что введенная билинейная форма симметрична и ограничена:

$$|(\varepsilon K^s z, w)| \leqslant 2s \, \|z\|_\varepsilon \|w\|_\varepsilon,$$

следовательно, отвечающий ей оператор $K^s$ является ограниченным и самосопряженным.

В равенстве (9) можно опустить вес $\varepsilon$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(K^s z, w) = (\varepsilon K^s z, \varepsilon^{-1} w) &= \int_0^s d\xi \, (\varepsilon \, (X^\xi - P^\xi) z, \varepsilon^{-1} w) \\ &= \int_0^s d\xi \, ((X^\xi - P^\xi) z, w).\end{aligned} \tag{10}$$

**Лемма 2.** *Пусть $s \in (0,T]$ таково, что при $\xi = s$ выполнено* (3). *Тогда для $h \in H^1(\Omega^s)$, $h\,|_\Gamma = 0$, и $z \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^s})$ справедливо равенство*

$$(\varepsilon \nabla h, K^s \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} z)_{\Omega^s} = (\nabla h, c^{-1} N z)_{\Omega^s}.$$

**Доказательство.** В силу (8) требуемое равенство достаточно доказать для $h \in C^\infty(\overline{\Omega^s})$, $h\,|_\Gamma = 0$. Согласно (9) имеем

$$(\varepsilon \nabla h, K^s \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} z)_{\Omega^s} = \int_0^s d\xi \, (\varepsilon \nabla h, (X^\xi - P^\xi) \, \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} z)_{\Omega^s}.$$

Поле $\nabla h$ принадлежит классу $G^s$, отсюда по (6) $\nabla h \perp_\varepsilon P^s\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z$, а значит, $\nabla h \perp_\varepsilon P^\xi\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z$. Преобразуем последний интеграл:

$$\int\limits_0^s d\xi\,(\varepsilon\nabla h, (X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)_{\Omega^s} = \int\limits_0^s d\xi\,(\varepsilon\nabla h, X^\xi\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)_{\Omega^s}$$
$$= \int\limits_0^s d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\sigma\,\langle\nabla h, \nu\times z\rangle.$$

В последнем переходе мы применили формулу интегрирования по частям в $\Omega^\xi$, воспользовавшись тем, что при почти всех $\xi$ по условию 1 выполнено $\partial\Omega^\xi \in \operatorname{Lip}$. Применив теперь к повторному интегралу равенство (4):

$$\int\limits_0^s d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\sigma\, c\, c^{-1}\,\langle\nabla h, \nu\times z\rangle = \int\limits_{\Omega^s} dx\, c^{-1}\,\langle\nabla h, \nu\times z\rangle,$$

мы получаем желаемое равенство. □

**Лемма 3.** *Для любого поля $z \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ справедливо соотношение*

$$(\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z) = 2\,(K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, c^{-1}Nz). \tag{11}$$

**Доказательство.** Применим к левой части (11) последовательно формулы (9) и (10):

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)\\
&\quad= \int\limits_0^T ds\,(\varepsilon\,(X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)\\
&\quad= \int\limits_0^T ds \int\limits_0^T d\xi\,(\varepsilon\,(X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, (X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)\\
&\quad= 2\int\limits_0^T ds \int\limits_0^s d\xi\,(\varepsilon\,(X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, (X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z).
\end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что $(X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^s) \ominus_\varepsilon J^s_\varepsilon$. Однако при почти всех $s$ имеет место равенство (7) (с заменой $\xi$ на $s$), поэтому

$$(X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z = \nabla h^s, \quad h^s \in H^1(\Omega^s), \quad h^s\,|_\Gamma = 0.$$

Преобразуем внутренний интеграл в (12):

$$\int\limits_0^s d\xi\,(\varepsilon\nabla h^s, (X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)_{\Omega^s} = (\varepsilon\nabla h^s, K^s\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)_{\Omega^s}.$$

Если для $s$ выполнено (3), то мы можем к последнему скалярному произведению применить лемму 2:

$$(\varepsilon\nabla h^s, K^s\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z)_{\Omega^s} = (\nabla h^s, c^{-1}Nz)_{\Omega^s} = ((X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, c^{-1}Nz).$$

Заменив в (12) внутренний интеграл на полученное выражение, что правомерно для почти всех $s$, получим

$$\begin{aligned}(\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z) &= 2\int\limits_0^T ds\,((X^s - P^s)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, c^{-1}Nz)\\ &= 2\,(K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, c^{-1}Nz).\end{aligned}$$

Последнее равенство получено применением формулы (10). $\square$

Формула (11) позволяет расширить по непрерывности оператор $K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}$ с гладких полей $\vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ на все $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$. В самом деле, для $z \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ имеем:

$$\|K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z\|^2_\varepsilon = 2\,(K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, c^{-1}Nz) \leqslant C\,\|K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z\|_\varepsilon \cdot \|z\|_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z\|_\varepsilon \leqslant C\,\|z\|_\varepsilon. \tag{13}$$

Полученную оценку можно распространить на более широкий класс полей $z$. Обозначим через $\mathcal{R}^T$ оператор в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, заданный формулой $\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}$ на области определения $D(\mathcal{R}^T) := \{z \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) : \varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)\}$. Как известно, этот оператор плотно определен и замкнут. Более того, можно показать, что множество $\vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$ плотно в графике $\mathcal{R}^T$ в силу условия $\partial\Omega^T \in \operatorname{Lip}$. Из этого легко заключить, что оценка (13) верна для любого $z \in D(\mathcal{R}^T)$, а значит, композиция $K^T\mathcal{R}^T$, определенная на $D(\mathcal{R}^T)$, ограничена в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$.

**Лемма 4.** *Справедливо равенство*

$$(\mathcal{R}^T)^* K^T = (K^T \mathcal{R}^T)^*. \tag{14}$$

**Доказательство.** Пусть $w \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$. Для любого $z \in D(R^T)$ имеем

$$(\varepsilon\,\mathcal{R}^T z, K^T w) = (\varepsilon K^T \mathcal{R}^T z, w) = (\varepsilon z, (K^T \mathcal{R}^T)^* w).$$

Так как оператор $(K^T\mathcal{R}^T)^*$ ограничен, то данная билинейная форма ограничена по $\|z\|_\varepsilon$, поэтому $K^T w \in D((\mathcal{R}^T)^*)$ и $(\mathcal{R}^T)^* K^T w = (K^T\mathcal{R}^T)^* w$, что и доказывает лемму. □

Для того, чтобы описать оператор $(\mathcal{R}^T)^*$, введем еще один оператор $\mathcal{R}_0^T$ в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, связанный с операцией $\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}$ на области определения $D(\mathcal{R}_0^T) := \vec{C}_0^\infty(\Omega^T)$. Из определения обобщенного ротора непосредственно следует, что $\mathcal{R}^T = (\mathcal{R}_0^T)^*$. Поэтому $(\mathcal{R}^T)^* = (\mathcal{R}_0^T)^{**} = \overline{\mathcal{R}_0^T}$, так что оператор $(\mathcal{R}^T)^*$ действует как $\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}$ на $D(\overline{\mathcal{R}_0^T}) \subset D(\mathcal{R}^T)$. Отсюда, а также из соотношения (14) и ограниченности $(K^T\mathcal{R}^T)^*$ вытекает

**Следствие 1.** *Для любого поля* $z \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ *выполнено* $\operatorname{rot} K^T z \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$, *причем*

$$\|\operatorname{rot} K^T z\|_\varepsilon \leqslant C\,\|z\|_\varepsilon.$$

## 5. Оператор $M^T$

Определим преобразование $M^T$ в $\vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ следующим образом:

$$M^T := P_\theta - cN\operatorname{rot} K^T. \tag{15}$$

По следствию 1 линейный оператор $M^T$ ограничен, а из леммы 4 нетрудно вывести формулу сопряженного оператора для полей класса $\vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$:

$$(M^T)^* = P_\theta + K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(\varepsilon cN\cdot). \tag{16}$$

Из определения $M^T$ немедленно следует, что

$$\operatorname{Ran} M^T \subset \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T). \tag{17}$$

Покажем теперь, что

$$\operatorname{Ran}(M^T)^* \subset J_\varepsilon^T. \tag{18}$$

Пусть $v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$, тогда поле $z := -\varepsilon c N v$ принадлежит $\vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T})$. Выберем произвольный элемент $\nabla h \in G^T$. По (16) имеем

$$\begin{aligned}(\varepsilon \nabla h, (M^T)^* v) &= \langle \varepsilon \nabla h, P_\theta v + K^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\varepsilon c N v)) \\ &= (\varepsilon \nabla h, \varepsilon^{-1} c^{-1} N z - K^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} z) \\ &= (\nabla h, c^{-1} N z) - (\varepsilon \nabla h, K^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} z) = 0.\end{aligned}$$

Равенство нулю следует из леммы 2.Мы получили, что $(M^T)^* v \perp_\varepsilon G^T$. А так как (7) выполнено, в частности, при $\xi = T$ (по условию 1), то $(M^T)^* v \in J_\varepsilon^T$. В силу ограниченности $(M^T)^*$ полученное включение можно распространить на $v \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$.

Заметим, что (18) можно обобщить:

$$\operatorname{Ran}(M^T)^* X^s \subset J_\varepsilon^s \quad \forall s \in (0, T]. \tag{19}$$

Для $s$, удовлетворяющих (3), это доказывается аналогично (18). Пусть теперь возрастающая последовательность таких $\{s_j\}$ стремится к произвольному $s \in (0, T]$. Тогда для произвольного $v \in \vec{L}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ мы имеем

$$(M^T)^* X^{s_j} v \in J_\varepsilon^{s_j} \subset J_\varepsilon^s.$$

Но из формулы (4), примененной к функции $\langle \varepsilon v, v \rangle$, и свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует

$$\|X^{s_j} v - X^s v\|_\varepsilon \to 0, \quad j \to \infty.$$

Поэтому

$$\|(M^T)^* X^{s_j} v - (M^T)^* X^s v\|_\varepsilon \to 0, \quad j \to \infty.$$

А значит, $(M^T)^* X^s v$ принадлежит $J_\varepsilon^s$.

Включение (18) означает, что $M^T$ аннулирует поля, ортогональные $J_\varepsilon^T$. Учитывая также (17), естественно рассматривать сужение оператора $M^T$ на подпространство $J_\varepsilon^T$ и сужение $(M^T)^*$ на $\vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$:

$$M^T : J_\varepsilon^T \to \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T),$$

$$(M^T)^* : \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to J_\varepsilon^T.$$

За этими сужениями мы сохраним прежние обозначения.

**Теорема 1.** *Оператор $M^T$ частично изометрический, причем*

$$\operatorname{Ran} M^T = \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T).$$

**Доказательство.** Мы докажем эквивалентное утверждение: оператор $(M^T)^*$ изометричен.

Для произвольного поля $v \in \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T) \cap \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$, полагая $z := -\varepsilon c N v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$, по (16) имеем

$$\begin{aligned}(\varepsilon(M^T)^*v, (M^T)^*v) &= (\varepsilon v, v) + 2\,(\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(\varepsilon cNv), v)\\ &\quad + (\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(\varepsilon cNv), K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(\varepsilon cNv))\\ &= (\varepsilon v, v) - 2\,(\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, \varepsilon^{-1}c^{-1}Nz)\\ &\quad + (\varepsilon K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z) = (\varepsilon v, v).\end{aligned}$$

Последний переход сделан на основании (11). Полученное равенство по непрерывности распространяется на все $v \in \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T)$. □

Теперь мы установим сплетающее свойство оператора $M^T$.

**Теорема 2.** *Для любого $s \in (0, T]$ выполнены (эквивалентные) равенства*

$$M^T P^s = X^s M^T, \quad P^s(M^T)^* = (M^T)^* X^s. \tag{20}$$

**Доказательство.** Мы докажем второе равенство. Ясно, что его достаточно проверить лишь на плотном множестве, так что пусть $v \in \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T) \cap \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \Gamma^s \setminus \omega)$. Такой выбор $v$ обеспечивает:

$$Nv \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega), \quad NX^s v \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^s \setminus \omega). \tag{21}$$

Второе сплетающее тождество на элементе $v$ эквивалентно двум отношениям:

$$(M^T)^* X^s v \in J_\varepsilon^s, \quad (M^T)^* v - (M^T)^* X^s v \perp_\varepsilon J_\varepsilon^s. \tag{22}$$

Первое следует из (19). Для того, чтобы доказать второе, положим $z = \varepsilon c N v$, возьмем какой-нибудь элемент $y \in J_\varepsilon^s$ и рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned}&(\varepsilon((M^T)^*v - (M^T)^*X^s v), y)\\ =&(\varepsilon(v + K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z - X^s v - K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z)), y)\\ =&(\varepsilon(K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z - K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z)), y).\end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь формулой (16). Из (21) следует, что в последнем выражении роторы можно понимать в классическом смысле. Обращаясь теперь к (9), получаем

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon(K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z - K^T\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z)), y)\\
&= \int_0^T d\xi\, (\varepsilon(X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, y) - \int_0^T d\xi\, (\varepsilon(X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z), y)\\
&= \int_0^s d\xi\, (\varepsilon(X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z), y) + \int_s^T d\xi\, (\varepsilon(X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} z, y)\\
&- \int_0^T d\xi\, (\varepsilon(X^\xi - P^\xi)\,\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(X^s z), y)\\
&= \int_s^T d\xi\, (\operatorname{rot} z, (X^\xi - P^\xi)y) - \int_s^T d\xi\, (\operatorname{rot}(X^s z), (X^\xi - P^\xi)y).
\end{aligned}
$$

Однако для $\xi \geqslant s$ будет $X^\xi y = P^\xi y$. Поэтому рассмотренное нами скалярное произведение равно нулю. Тем самым, ортогональность в (22) доказана. $\square$

Установим следующий результат о ядре оператора $M^T$.

**Теорема 3.** *Пусть $P^\xi_{ac}$ и $P^\xi_s$ суть абсолютно непрерывная и сингулярная составляющие (см. [6]) спектрального семейства $P^\xi$ в пространстве $J^T_\varepsilon$. Верно следующее включение*

$$P^T_s J^T_\varepsilon \subset \operatorname{Ker} M^T.$$

**Доказательство.** Мы докажем эквивалентное соотношение

$$\operatorname{Ran}(M^T)^* \perp_\varepsilon P^T_s J^T_\varepsilon. \tag{23}$$

Для произвольного $v \in \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T)$ положим $y = (M^T)^* v$; тогда по сплетающему свойству и по изометричности $(M^T)^*$ имеем

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon P^\xi y, y) &= (\varepsilon P^\xi (M^T)^* v, (M^T)^* v)\\
&= (\varepsilon (M^T)^* X^\xi v, (M^T)^* v) = (\varepsilon X^\xi v, v).
\end{aligned}
$$

Правая часть полученного тождества абсолютно непрерывна по $\xi$, что следует из формулы (4) для $h = \langle \varepsilon v, v \rangle$, и свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Поэтому $y \in P^T_{ac} J^T_\varepsilon$ или $y \perp_\varepsilon P^T_s J^T_\varepsilon$. Тем самым, (23) доказано. □

**Пример.** Покажем, что спектральное семейство $P^\xi$ может иметь скачки. Пусть $c \equiv 1$, $\varepsilon \equiv 1$. Предположим, что при некотором критическом значении $\xi$ эквидистанта $\Gamma^\xi$ имеет слипшиеся части. Именно, существует такой открытый шар $B$, $\overline{B} \subset \Omega$ и два открытых (непересекающихся) полушара $B_+$, $B_- \subset B$, $\overline{B} = \overline{B_+} \cup \overline{B_-}$ такие, что $\Omega^\xi \cap B = B_+ \cup B_-$. Такая ситуация возможна, если граница $\Gamma$ имеет параллельные плоские участки. Для такого $\xi$ будет выполнено

$$\dim \operatorname{Ran}(P^{\xi+0} - P^\xi) = \infty. \tag{24}$$

В самом деле, пусть на диске $D := \overline{B_+} \cap \overline{B_-} \subset \Gamma^\xi$ определена гладкая функция $\phi$, аннулирующаяся у края диска. Рассмотрим следующую краевую задачу в $\Omega^\xi$:

$$\begin{aligned} &\Delta p = 0, && p\,|_\Gamma = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial \nu}\,|_{\Gamma^\xi \setminus D} = 0, && \frac{\partial p}{\partial \nu}\,|_{D_+} = \phi, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu}\,|_{D_-} = -\phi. \end{aligned}$$

Здесь $D_+$ и $D_-$ суть верхняя и нижняя стороны диска. В точной постановке задачи ищется функция $p \in H^1(\Omega^\xi)$, такая что

$$p\,|_\Gamma = 0, \quad (\nabla p, \nabla \eta)_{\Omega^\xi} = \int\limits_D d\sigma\, \phi\,(\eta_+ - \eta_-)$$
$$\forall \eta \in H^1(\Omega^\xi) : \eta\,|_\Gamma = 0, \tag{25}$$

где $\eta_+$ и $\eta_-$ – следы на $D$ сужений $\eta\,|_{B_+}$ и $\eta\,|_{B_-}$ соответственно. Можно установить существование и единственность решения $p$. Положим

$$y(x) := \begin{cases} \nabla p(x), & x \in \Omega^\xi \\ 0, & x \in \Omega^T \setminus \Omega^\xi. \end{cases}$$

В силу включения (7) имеем $y \perp J^\xi$. Теперь пусть $s \in (\xi, T]$. Из интегрального тождества (25) легко заключить, что $\operatorname{div} y = 0$ в $\Omega^T$, а так как $\operatorname{supp} y \subset \Omega^s \cup \Gamma$, то по (2) получаем $y \in J^s$. Следовательно, $y \in \operatorname{Ran}(P^{\xi+0} - P^\xi)$. Поскольку существует бесконечный набор линейно независимых функций $\phi$ на $D$, порождающих линейно независимые поля $y$, то справедливо (24).

Данный пример вместе с теоремой 3 показывает, что оператор $M^T$ может иметь нетривиальное ядро.

## 6. Послойное представление $M^T$

В этом параграфе мы получим формулу, показывающую согласованность нашего определения $M^T$ с определением, данным в работах [1–3]. Отметим, что эта формула необходима для использования оператора $M^T$ в решении динамической обратной задачи для системы Максвелла ВС-методом (см. [2]).

Для формулировки результата мы используем семейство операторов $\{Q^\xi\}$, действующих по следующему правилу. Пусть $\psi$ – ограниченная функция в $\overline{\Omega^T}$, гладкая вне любой окрестности множества $\omega$, а для $\xi \in (0, T]$ выполнено (3). Тогда существует единственное решение $p^\xi \in H^1(\Omega^\xi)$ краевой задачи в $\Omega^\xi$:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla p^\xi) = 0, \quad p^\xi \mid_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial p^\xi}{\partial \nu} \mid_{\Gamma^\xi} = \psi \mid_{\Gamma^\xi} . \tag{26}$$

Оператор $Q^\xi$ сопоставляет функции $\psi$ функцию в $\Omega^\xi$ следующим образом

$$Q^\xi \psi := p^\xi.$$

Теперь опишем действие проектора $P^\xi$ на поле $y \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T}) \cap J_\varepsilon^T$, попрежнему предполагая, что для $\xi$ выполнено (3). Согласно (7) имеем:

$$(X^\xi - P^\xi)\, y\big|_{\Omega^\xi} = \nabla h^\xi, \quad h^\xi \in H^1(\Omega^\xi), \quad h^\xi\big|_\Gamma = 0. \tag{27}$$

Из равенства $X^\xi y - \nabla h^\xi = P^\xi y$, выполненного в $\Omega^\xi$, следует, что

$$(\varepsilon \nabla h^\xi, \nabla \eta)_{\Omega^\xi} = (\varepsilon y, \nabla \eta)_{\Omega^\xi} \quad \forall \eta \in H^1(\Omega^\xi) \,:\, \eta \mid_\Gamma = 0.$$

Если в правой части выполнить интегрирование по частям, то мы придем к краевой задаче (26) на функцию $h^\xi$ с граничным значением нормальной производной $\psi = \langle y, \nu \rangle$. Ясно, что функция $\langle y, \nu \rangle$ удовлетворяет тем требованиям, которые мы наложили на $\psi$, определяя $Q^\xi$. Таким образом, $h^\xi = Q^\xi \langle y, \nu \rangle$, и мы можем записать соотношение (27) в виде

$$(P^\xi y)(x) = \begin{cases} y(x) - (\nabla Q^\xi \langle y, \nu \rangle)(x), & x \in \Omega^\xi, \\ 0, & x \in \Omega^T \setminus \Omega^\xi. \end{cases} \tag{28}$$

Покажем, что поле $P^\xi y$ имеет разрыв на поверхности $\Gamma^\xi$:

$$\begin{aligned} &P^\xi y \mid_{\Gamma^\xi - 0} = [y - \nabla Q^\xi \langle y, \nu \rangle] \mid_{\Gamma^\xi} = [P_\theta y - P_\theta \nabla Q^\xi \langle y, \nu \rangle] \mid_{\Gamma^\xi}, \\ &P^\xi y \mid_{\Gamma^\xi + 0} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Убедимся сначала, что поле $\nabla Q^\xi\langle y,\nu\rangle$ имеет след на $\Gamma^\xi$. Для этого достаточно определить значение этого поля на $\Gamma^\xi \setminus \omega$, так как согласно (3) это множество полной поверхностной меры на $\Gamma^\xi$. Пусть для открытого шара $B \subset \Omega$ выполнено $B \cap \omega = \varnothing$, $D := B \cap \Gamma^\xi \neq \varnothing$. Множество $D$ образует гладкую поверхность, на которой в задаче (26) ставится условие Неймана с гладкой правой частью. Для решения по свойству эллиптичности имеем $Q^\xi\langle y,\nu\rangle \in C^\infty(\overline{B \cap \Omega^\xi})$, а значит, $\nabla Q^\xi\langle y,\nu\rangle$ имеет след на $D$. Более того, выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial\nu} Q^\xi\langle y,\nu\rangle \mid_D = \langle y,\nu\rangle \mid_D,$$

понимаемое в буквальном смысле. В силу произвольности выбора шара $B$ поле $\nabla Q^\xi\langle y,\nu\rangle$ имеет след на $\Gamma^\xi \setminus \omega$, и последнее равенство переносится на $\Gamma^\xi \setminus \omega$, чем мы и воспользовались в (29).

Перейдем к основному результату этого параграфа.

**Теорема 4.** *Пусть $y \in \vec{C}^\infty(\overline{\Omega^T}) \cap J^T_\varepsilon$. Тогда при почти всех $\xi \in (0,T]$ выполнено равенство*

$$M^T y \mid_{\Gamma^\xi} = [P_\theta y - P_\theta \nabla Q^\xi\langle y,\nu\rangle] \mid_{\Gamma^\xi} = P^\xi y \mid_{\Gamma^{\xi-0}}, \tag{30}$$

*понимаемое в том же смысле, что первое равенство в* (29).

**Доказательство.** Пусть $v \in \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \cap \vec{C}^\infty_0(\Omega^T \setminus \omega)$. Рассмотрим билинейную форму $(\varepsilon c N \operatorname{rot} K^T y, v)$, отвечающую второму слагаемому оператора $M^T$:

$$\begin{aligned}(\varepsilon c N \operatorname{rot} K^T y, v) &= -(\operatorname{rot} K^T y, \varepsilon c N v) = -(K^T y, \operatorname{rot}(\varepsilon c N v)) \\ &= -\int_0^T d\xi\, ((X^\xi - P^\xi)\, y, \operatorname{rot}(\varepsilon c N v)).\end{aligned} \tag{31}$$

Обозначим $\psi := \langle y,\nu\rangle$. Выберем срезку $\zeta \in C^\infty_0(\Omega^T \setminus \omega)$, равную единице в окрестности множества $\operatorname{supp} v$, и продолжим выкладку (31) с помощью (28):

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon cN \operatorname{rot} K^T y, v) &= -\int\limits_0^T d\xi \, (\nabla Q^\xi \psi, \operatorname{rot}(\varepsilon cNv))_{\Omega^\xi} \\
&= -\int\limits_0^T d\xi \, (\nabla(\zeta Q^\xi \psi), \operatorname{rot}(\varepsilon cNv))_{\Omega^\xi} \\
&= \int\limits_0^T d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\sigma \, \langle N \, \nabla(\zeta Q^\xi \psi), \varepsilon cNv \rangle \\
&= \int\limits_0^T d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\sigma \; c \, \langle \varepsilon P_\theta \nabla Q^\xi \psi, v \rangle.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

В силу произвольности $v$ полученное равенство вместе с (4) позволяет написать следующую формулу:

$$
cN \operatorname{rot} K^T y \mid_{\Gamma^\xi} = P_\theta \nabla Q^\xi \psi \mid_{\Gamma^\xi},
$$

справедливую для любого любого $\xi$, для которого выполнено (3), и понимаемую в том же смысле, что (29). Для завершения доказательства теоремы достаточно подставить полученное выражение в (15). $\square$

Формула (30) для $M^T$ в работах [1–3] была взята за определение этого оператора для $T < \sup\{\xi > 0 \mid \Omega^\xi \cap \omega = \varnothing\}$, и на ее основе была доказана унитарность $M^T$. Мы вместо этого использовали представление (15), позволившее нам корректно определить $M^T$ как ограниченный линейный оператор для произвольного $T \in (0, T_*]$ и установить его частичную изометричность. Заметим, что свойство унитарности $M^T$ не переносится на общий случай, что обсуждалось в конце п. 5.

## 7. Оператор Максвелла на поперечных полях

В этом параграфе мы подготавливаем использование оператора $M^T$ в решении обратной задачи электродинамики.

Динамика системы Максвелла в области $\Omega^T$ определяется оператором Максвелла $\mathcal{M}^T$, действующим на электрическое и магнитное поля $\{e, h\}$ по правилу

$$\mathcal{M}^T \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \\ -\mu^{-1} \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}.$$

Нам удобно рассматривать этот оператор на следующей области определения

$$D(\mathcal{M}^T) := \{\{e, h\} \in J^T_\varepsilon \oplus J^T_\mu \mid \{\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} h, -\mu^{-1} \operatorname{rot} e\} \in J^T_\varepsilon \oplus J^T_\mu \}.$$

Всюду далее фигурируют два веса: $\varepsilon$ и $\mu$, поэтому теперь в обозначениях операторов $M^T$, $K^T$, $Q^\xi$ и проекторов $P^\xi$ вес будет указываться нижним индексом.

В этом параграфе мы опишем оператор $\widetilde{\mathcal{M}}^T$, действующий в пространстве $\vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T) \oplus \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\mu}(\Omega^T)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}^T &:= \begin{pmatrix} M^T_\varepsilon & 0 \\ 0 & M^T_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \\ -\mu^{-1} \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (M^T_\varepsilon)^* & 0 \\ 0 & (M^T_\mu)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & M^T_\varepsilon \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(M^T_\mu)^* \\ -M^T_\mu \mu^{-1} \operatorname{rot}(M^T_\varepsilon)^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

Для того, чтобы задать область определения оператора $\widetilde{\mathcal{M}}^T$, введем обозначение

$$\mathcal{V}^T := \{v \in \vec{C}^\infty_0(\Omega^T \setminus \omega) \mid \langle v, \nu \rangle = 0\}$$

и положим

$$D(\widetilde{\mathcal{M}}^T) := \mathcal{V}^T \oplus \mathcal{V}^T \subset \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\varepsilon}(\Omega^T) \oplus \vec{\mathcal{L}}_{2,\,\mu}(\Omega^T).$$

Покажем, что $\widetilde{\mathcal{M}}^T$ корректно определен на $D(\widetilde{\mathcal{M}}^T)$. Пусть $u, v \in \mathcal{V}^T$, достаточно проверить, что $\operatorname{rot}(M^T_\varepsilon)^* u$, $\operatorname{rot}(M^T_\mu)^* v \in J^T$. Рассмотрим для примера второе включение. По формуле (16) имеем

$$(M^T_\mu)^* v = v + K^T_\mu \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v).$$

Поле $\mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v)$, очевидно, квадратично суммируемо, а тогда по следствию 1 второе слагаемое в последнем выражении (а значит, и вся сумма) имеет обобщенный ротор из $\vec{L}_2(\Omega^T)$. Теперь возьмем какое-нибудь $s < T$, для которого выполнено (3), такое что $\operatorname{supp} v \subset \Omega^s$, и применим сплетающее свойство (20):

$$(M_\mu^T)^* v = (M_\mu^T)^* X^s v = P_\mu^s (M_\mu^T)^* v \in J_\mu^s.$$

Поэтому $\operatorname{supp}(M_\mu^T)^* v$, $\operatorname{supp}\operatorname{rot}(M_\mu^T)^* v \subset \Omega^s \cup \Gamma$, а тогда по (2) получаем $\operatorname{rot}(M_\mu^T)^* v \in J^T$.

Мы сократим запись оператора $\widetilde{\mathcal{M}}^T$, введя обозначения:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{R}}^T := M_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(M_\mu^T)^*, \\
&\widetilde{\mathcal{R}}_*^T := M_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(M_\varepsilon^T)^*, \quad \widetilde{\mathcal{M}}^T = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{\mathcal{R}}^T \\ -\widetilde{\mathcal{R}}_*^T & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Области определения блоков $\widetilde{\mathcal{R}}^T$, $\widetilde{\mathcal{R}}_*^T$ должны быть согласованы с $D(\widetilde{\mathcal{M}}^T)$, поэтому

$$\widetilde{\mathcal{R}}^T : \vec{\mathcal{L}}_{2,\mu}(\Omega^T) \to \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T), \quad D(\widetilde{\mathcal{R}}^T) := \mathcal{V}^T,$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_*^T : \vec{\mathcal{L}}_{2,\varepsilon}(\Omega^T) \to \vec{\mathcal{L}}_{2,\mu}(\Omega^T), \quad D(\widetilde{\mathcal{R}}_*^T) := \mathcal{V}^T.$$

**Лемма 5.** *Оператор $\widetilde{\mathcal{M}}^T$ кососимметричен:*

$$\widetilde{\mathcal{M}}^T \subset -(\widetilde{\mathcal{M}}^T)^*.$$

**Доказательство.** Утверждение эквивалентно включениям: $\widetilde{\mathcal{R}}^T \subset (\widetilde{\mathcal{R}}_*^T)^*$, $\widetilde{\mathcal{R}}_*^T \subset (\widetilde{\mathcal{R}}^T)^*$. Докажем, например, первое из них. Для $u, v \in \mathcal{V}^T$ имеем:

$$\begin{aligned}
(\mu \widetilde{\mathcal{R}}_*^T v, u) &= (\mu M_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(M_\varepsilon^T)^* v, u) = (\operatorname{rot}(M_\varepsilon^T)^* v, (M_\mu^T)^* u) \\
&= (\operatorname{rot} v + \operatorname{rot} K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\varepsilon c N v), (M_\mu^T)^* u) \\
&= (v + K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(\varepsilon c N v), \operatorname{rot}(M_\mu^T)^* u) \\
&= ((M_\varepsilon^T)^* v, \operatorname{rot}(M_\mu^T)^* u) = (\varepsilon v, M_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(M_\mu^T)^* u) \\
&= (\varepsilon v, \widetilde{\mathcal{R}}^T u).
\end{aligned}$$

В четвертом переходе мы воспользовались соотношением (14). Из полученного равенства следует нужное включение. □

Из доказанной леммы следует замыкаемость оператора $\widetilde{\mathcal{M}}^T$.

Теперь мы опишем действие оператора $\widetilde{\mathcal{R}}^T$ на поле $v \in \mathcal{V}^T$. Имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}^T v &= (P_\theta - cN \operatorname{rot} K_\varepsilon^T)\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}(v + K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v)) \\ &= P_\theta \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v + P_\theta \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v) \\ &- cN \operatorname{rot} K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v - cN \operatorname{rot} K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v).\end{aligned} \tag{34}$$

Каждое слагаемое последней суммы квадратично суммируемо, что вытекает из следствия 1. Кроме того, последнее слагаемое равно нулю, что гарантирует следующая

**Лемма 6.** *Для любого поля $z \in \vec{L}_{2,\mu}(\Omega^T)$ выполнено*

$$P_\theta \operatorname{rot} K_\mu^T z = \operatorname{rot} K_\mu^T z, \quad K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} K_\mu^T z = 0. \tag{35}$$

**Доказательство.** Легко показать, что первое тождество равносильно тому, что для любого $w \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$, такого, что $Nw = 0$, выполнено $(\operatorname{rot} K_\mu^T z, w) = 0$. Покажем это с помощью (7) и (10):

$$(\operatorname{rot} K_\mu^T z, w) = (K_\mu^T z, \operatorname{rot} w) = \int_0^T d\xi \, ((X^\xi - P_\mu^\xi) z, \operatorname{rot} w). \tag{36}$$

По (7) при всех $\xi$, для которых выполнено (3), для подинтегрального выражения имеем

$$((X^\xi - P_\mu^\xi) z, \operatorname{rot} w) = (\nabla h^\xi, \operatorname{rot} w).$$

Согласно (8) найдется последовательность функций $\{h_n^\xi\} \subset C^\infty(\overline{\Omega^\xi})$, $h_n^\xi |_\Gamma = 0$, таких что $\nabla h_n^\xi \to \nabla h^\xi$ в $\vec{L}_{2,\mu}(\Omega^T)$ при $n \to \infty$. Для любого $n$ имеем

$$(\nabla h_n^\xi, \operatorname{rot} w) = \int_{\Gamma^\xi} d\sigma \, \langle \nabla h_n^\xi, Nw \rangle = 0,$$

а тогда и $(\nabla h^\xi, \operatorname{rot} w) = 0$, следовательно, подинтегральное выражение в (36) равно нулю при п.в. $\xi$.

Перейдем ко второму утверждению леммы. Положим

$$y := \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} K_\mu^T z$$

и покажем, что для точек $\xi \in (0,T]$, для которых выполнено (3), справедливо

$$X^\xi y = P_\varepsilon^\xi y. \tag{37}$$

Это равенство эквивалентно двум утверждениям:

$$y - X^\xi y \perp_\varepsilon J_\varepsilon^\xi, \quad X^\xi y \in J_\varepsilon^\xi,$$

первое из которых очевидно. Второе же мы установим в эквивалентной форме: $X^\xi y \perp_\varepsilon G^\xi$ (см. (7)). Для этого выберем последовательность гладких функций $\{f_n\}$ на отрезке $[0,\xi]$, таких что $f_n = 1$ на $[0,\xi - 2/n]$ и $f_n = 0$ на $[\xi - 1/n, \xi]$. Композиция $\psi_n := f_n \circ \tau$ липшицева в $\Omega^\xi$, поэтому для функции $h \in H^1(\Omega^\xi)$, $h\,|_\Gamma = 0$, будет выполнено $\nabla h, \nabla(\psi_n h) \in G^\xi$ и

$$(\varepsilon X^\xi y, \nabla(\psi_n h)) = (\varepsilon y, \nabla(\psi_n h)) = 0. \tag{38}$$

Равенство нулю получено из условия $y \in J_\varepsilon^T$. С другой стороны,

$$(\varepsilon X^\xi y, \nabla(\psi_n h)) = (\varepsilon X^\xi y, (f_n' \circ \tau)\cdot \nabla\tau \cdot h + \psi_n \nabla h).$$

Однако, доказанная первая часть леммы утверждает, что $P_\theta y = y$ или $\langle y, \nu\rangle = 0$ почти всюду в $\Omega^\xi$. А поскольку $\nabla\tau = c^{-1}\nu$, то во втором сомножителе полученного скалярного произведения первое слагаемое можно опустить. Поэтому

$$(\varepsilon X^\xi y, \nabla(\psi_n h)) = (\varepsilon X^\xi y, \psi_n \nabla h) \to (\varepsilon X^\xi y, \nabla h), \quad n \to \infty.$$

Тогда, учитывая (38), получаем

$$(\varepsilon X^\xi y, \nabla h) = 0.$$

Тем самым $X^\xi y \in J_\varepsilon^\xi$ и равенство (37) доказано. Воспользовавшись теперь формулой (9) для билинейной формы оператора $K_\varepsilon^T$, из (37) легко вывести, что $K_\varepsilon^T y = 0$. □

Продолжая выкладку (34), с помощью (35) получим

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}^T v = P_\theta \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v + \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v)\\ - cN \operatorname{rot} K_\varepsilon^T \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v.\end{aligned} \tag{39}$$

Это выражение можно переписать с использованием операторов $Q^\xi$, как это было сделано для $M^T$ в п. 6. Для этого рассмотрим билинейную форму, отвечающую второму члену в (39). Пусть $u, v \in \mathcal{V}^T$, тогда

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v), u) &= (K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v), \operatorname{rot} u) \\ &= \int_0^T d\xi \, ((X^\xi - P_\mu^\xi)\mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v), \operatorname{rot} u).\end{aligned}$$

По формуле (28) имеем

$$(X^\xi - P_\mu^\xi)\mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v) \,|_{\Omega^\xi} = \nabla Q_\mu^\xi \langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v), \nu\rangle.$$

С целью упростить это выражение покажем, что для $w \in \vec{C}_0^\infty(\Omega^T \setminus \omega)$ верно равенство

$$\langle \operatorname{rot} w, \nu\rangle = -c \operatorname{div}(c^{-1} N w).$$

В самом деле, так как $\nu = c\nabla\tau$, то по формуле для дивергенции векторного произведения имеем

$$-c \operatorname{div}(c^{-1} N w) = -c \operatorname{div}(\nabla\tau \times w) = c\,\langle \operatorname{rot} w, \nabla\tau\rangle = \langle \operatorname{rot} w, \nu\rangle.$$

Поэтому

$$(X^\xi - P_\mu^\xi)\mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v) \,|_{\Omega^\xi} = \nabla Q_\mu^\xi (c\mu^{-1} \operatorname{div}(\mu v)).$$

Далее можно сделать выкладку, аналогичную (32), которая приведет к равенству

$$(\operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v), u) = -\int_0^T d\xi \int_{\Gamma^\xi} d\sigma \, \langle N \nabla Q_\mu^\xi (c\mu^{-1} \operatorname{div}(\mu v)), u\rangle,$$

из которого согласно (4) следует, что

$$\operatorname{rot} K_\mu^T \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mu c N v) \,|_{\Gamma^\xi} = -c^{-1} N \nabla Q_\mu^\xi (c\mu^{-1} \operatorname{div}(\mu v)) \,|_{\Gamma^\xi} .$$

Таким же образом пересчитывается третий член в (39). Мы приводим результат сразу для оператора $\widetilde{\mathcal{R}}^T$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}^T v \,|_{\Gamma^\xi} &= P_\theta \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v - c^{-1}\varepsilon^{-1} N \nabla Q_\mu^\xi (c\mu^{-1} \operatorname{div}(\mu v)) \\ &\quad + P_\theta \nabla Q_\varepsilon^\xi (c\varepsilon^{-1} \operatorname{div}(c^{-1} N v)) \,|_{\Gamma^\xi} .\end{aligned} \tag{40}$$

Это равенство, как и предыдущее, нужно понимать с оговорками, сделанными в п. 6: поле $\widetilde{\mathcal{R}}^T v$ можно исправить на множестве меры нуль так, чтобы равенство выполнялось при п.в. $\xi \in (0,T]$ на $\Gamma^\xi \setminus \omega$. Аналогичная формула для $\widetilde{\mathcal{R}}_*^T$ получается из (40), если поменять ролями $\varepsilon$ и $\mu$.

Отметим важную особенность оператора $\widetilde{\mathcal{M}}^T$: в отличие от $\mathcal{M}^T$ этот оператор не является локальным, что видно из (40). Свойство локальности нарушается из-за присутствия $Q^\xi$.

Формула (40) обобщает результат, полученный в работе [1], на случай произвольного $T \in (0, T_*]$.

Автор благодарен М. И. Белишеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Н. Д. Филонову за полезные обсуждения.

## Литература

1. М. И. Белишев, В. М. Исаков, Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, *К реконструкции метрики по внешним электромагнитным измерениям.* — ДАН РАН **372(3)** (2000), 298–300.
2. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ **12(2)** (2000), 279–316.
3. М. И. Белишев, *Об унитарном преобразовании в пространстве* $L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)$*, связанном с разложением Вейля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 25–40.
4. R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.
5. H. Sohr, *The Navier–Stokes Equations: an Elementary Functional Analytic Approach.* Birkhäuser, Berlin, 2001.
6. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М., 1972.

Demchenko M. N. On a partially isometric transform of divergence free vector fields.

The paper deals with the so-called *M-transform* which maps divergence free vector fields in $\Omega^T := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < T\}$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$, to the space of transversal fields. The latter space consists of the vector fields in $\Omega^T$ tangential to the equidistant surfaces of boundary $\partial\Omega$. In papers devoted to the dynamical inverse problem for the Maxwell system, in the framework of the BC-method, the operator $M^T$ was defined for $T < T_\omega$, where $T_\omega$ depends on the geometry of $\Omega$. This paper provides the generalization for arbitrary $T$. It is proved that $M^T$ is partially isometric and its intertwining properties are established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 3 ноября 2009 г.