

С. А. Назаров

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЛОВУШЕЧНЫХ МОД В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Ловушечные моды. Абсолютное большинство спектральных эллиптических краевых задач в неограниченных областях обладают непрерывным спектром, разрешающим волновые процессы в определенных частотных диапазонах. Особенности протекания этих процессов связаны еще с одной специфической чертой строения спектра – вкраплением собственных чисел в непрерывный спектр. Собственные функции, порожденные “точечным спектром на непрерывном”, обладают конечной энергией и обычно с большой скоростью затухают на бесконечности, т.е. локализируются в ограниченном объеме и потому называются “ловушечными модами”. Именно возникновением ловушечных мод, препятствующих прохождению бегущих волн и способствующих накоплению энергии, обусловлены многие физические явления. С одной стороны, ловушечные моды могут приводить к нежелательным последствиям, например, к разрушению фрагментов волновода, около которых и концентрируются моды. С другой стороны, они могут быть использованы для нужд инженерной практики, например, для проектирования волновых демпферов и фильтров. Именно поэтому поиск ловушечных мод или доказательство их отсутствия представляет интерес во многих прикладных дисциплинах.

В данной статье приводятся достаточные условия существования ловушечных мод в двух задачах линейной теории волн на поверхности тяжелой жидкости (физические и математические основы теории можно найти во вводных главах монографий [1–3] и др.). В этом на-

Ключевые слова : собственные числа под порогом непрерывного спектра, ловушечные моды, поверхностные волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759).

правлении имеется много результатов и разработаны разнообразные методы поиска ловушечных мод (см. работы [4–13], цитированные монографии и обзор [14], включающие обширные списки литературы). В первой из рассмотренных задач собственные числа располагаются левее непрерывного спектра, а во второй – на непрерывном спектре, т.е. принадлежат дискретному и точечному спектрам соответственно.

Отличительная черта задач линейной теории поверхностных волн – появление спектрального параметра в краевых условиях на горизонтальной поверхности жидкости (спектральное условие Стеклова). С одной стороны, это обстоятельство препятствует непосредственному применению результатов теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [15]), но с другой стороны побудило к созданию специальных и весьма продвинутых методов поиска ловушечных мод (см., в частности, обзор [14]), которые требуют отсутствия спектрального параметра в дифференциальных уравнениях.

Предложенный в [11, 13] прием образования специфического скалярного произведения в пространстве Соболева позволяет свести задачу Стеклова к абстрактному уравнению в гильбертовом пространстве и воспользоваться общими теоремами спектральной теории операторов. Иногда благодаря возможности проводить локальный анализ на этом пути удается получить результаты, мало чувствительные к общей геометрии тела (см. [11, 13], а также последние абзацы в п. 2 и п. 3 §1).

В статье [16] (см. также статьи [17, 18] и обзор [19]) был сформулирован вариационный метод поиска ловушечных мод с частотами, расположенными ниже точки отсечки непрерывного спектра (“под порогом”). Упомянутый выше операторный подход позволил в данной статье приспособить этот метод к задачам дифракции поверхностных волн. Именно, удалось найти достаточные условия появления ловушечных мод в плоской задаче о косом набегании волны на цилиндрическое тело (см. п. 2 §1 и §2) и в трехмерной задаче о симметричном бесконечном прямом канале (см. п. 3 §1 и §3). В первой задаче непрерывный спектр имеет положительную точку отсечки, и частота обнаруженной ловушечной моды лежит ниже нее, а потому попадает на дискретный спектр. Отметим, что для полностью погруженного тела результат безусловный (предложение 1.1): любая форма порождает ловушечную моду. Этот результат известен [4, 7], однако в §2 представлено значительно более простое доказательство. Для полупо-

груженного тела в теореме 2.1 сформулировано достаточно простое геометрическое условие существования такой моды, которое оказывается полностью новым.

Во второй задаче непрерывный спектр занимает всю замкнутую вещественную положительную полуось, и для отыскания ловушечных мод используется прием [20] постановки искусственных краевых условий на продольной плоскости симметрии. В результате прежние выкладки и доводы указывают достаточные условия существования точечного спектра на непрерывном (теорема 3.12), причем в затребованных условиях геометрической симметрии ловушечная мода имеется при любых формах сечения у полностью погруженного тела (предложение 1.2).

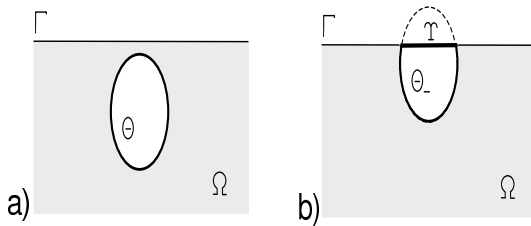


Рис. 1. Погруженное и полупогруженное тела.

Часть результатов статьи анонсирована в заметке [21].

2. Задача о косом набегании волны на бесконечный цилиндр. Пусть Θ – непустое открытое, не обязательно связное множество на плоскости \mathbb{R}^2 с липшицевой границей $\partial\Theta$ и компактным замыканием $\overline{\Theta} = \Theta \cup \partial\Theta$ (см. рис. 1). Предположим, что множество $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Theta}$ является липшицевой областью; здесь $\mathbb{R}^2_- = \{x = (y, z) : y \in \mathbb{R}, z < 0\}$ и $\Theta_- = \Theta \cap \mathbb{R}^2_- \neq \emptyset$. Рассмотрим спектральную задачу Стеклова

$$-\Delta_x \Phi(x) + k^2 \Phi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\partial_z \Phi(x) = \lambda \Phi(x), \quad x \in \Gamma = (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \overline{\Theta}, \quad (1.2)$$

$$\partial_\nu \Phi(x) = 0, \quad x \in \Sigma = \partial\Omega \setminus \Gamma. \quad (1.3)$$

При этом Δ_x – оператор Лапласа, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, определенная при почти всех $x \in \partial\Omega$ и совпадающая с $\partial_z = \partial/\partial z$ на горизонтальной линии Γ , а λ – спектральный параметр. Двумерная задача (1.1)–(1.3) описывает (см. [1–3] и др.) волны

на поверхности тяжелой жидкости, занимающей полупространство, в котором находится бесконечный цилиндр $\Theta_- \times \mathbb{R}$; при этом Φ – скоростной потенциал. Волна принудительно распространяется в направлении оси цилиндра с волновым числом $k \in \mathbb{R}_+$, которое масштабированием сводится к единице, и далее считаем, что $k = 1$ в уравнении Гельмгольца (1.1).

Известно (см. [22], а также, например, [2, 3]), что непрерывный спектр задачи (1.1) заполняет луч $[1, +\infty)$ на вещественной оси \mathbb{R} в комплексной плоскости \mathbb{C} , а на отрезке $(0, 1)$ может располагаться дискретный спектр (точный смысл этим сведениям будет придан в п. 1 §2).

Из-за возможных особенностей решения в иррегулярных точках границы задачу (1.1)–(1.3) следует понимать как интегральное тождество [23]

$$(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_\Omega + (\Phi, \Psi)_\Omega = \lambda(\Phi, \Psi)_\Gamma, \quad \Psi \in H^1(\Omega), \quad (1.4)$$

где ∇_x – градиент, $(,)$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, а $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева. Спектральная задача (1.4) состоит в отыскании числа λ и нетривиальной функции $\Phi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющей соотношению (1.4) при любой пробной функции $v \in H^1(\Omega)$.

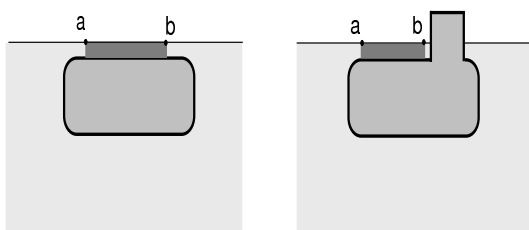


Рис. 2. Тела с тонким слоем жидкости над частью их поверхности.

В §2 будет установлено достаточное условие появления собственных чисел задачи (1.4) ниже точки отсечки $\lambda_+ = 1$ непрерывного спектра, которое в случае погруженного тела Θ гарантирует существование собственного числа при любой его форме.

Предложение 1.1. Если $\bar{\Theta} \subset \mathbb{R}_-^2$ и, в частности, $\Theta_- = \Theta$, то задача (1.4) имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, 1)$, которому отвечает нетривиальное решение $\Phi_1 \in H^1(\Omega)$, порождающее ловушечную моду.

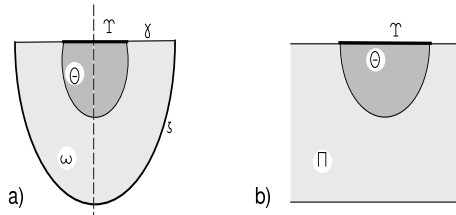


Рис. 3. Поперечное (а) и продольное (б) сечения канала с полупогруженным телом с тонким слоем жидкости над частью их поверхности.

Можно убедиться в том, что решение $\Phi \in H^1(\Omega)$ однородной задачи (1.1)–(1.3) экспоненциально затухает на бесконечности (этот простой факт, обеспеченный, например, методом Фурье, в статье не востребован). Отметим, что собственных чисел и соответственно лувущечных мод может быть несколько. Упомянем один из результатов [13]. Пусть граница фигуры Θ такова, что область Ω , заполненная жидкостью, содержит прямоугольник

$$Q = (a, b) \times (0, -d) \quad (1.5)$$

с малой высотой $d > 0$ и фиксированной длиной $b - a > 0$, причем нижнее основание прямоугольника лежит целиком на $\partial\Theta$ (см. рис. 2, где прямоугольник (1.5) глубоко тонирован). Тогда для любых $\delta \in (0, 1)$ и $N \in \{1, 2, \dots\}$ найдется такая величина $d(\delta, N) > 0$, что при $d < d(\delta, N)$ на интервале $(0, \delta)$ расположено не менее N собственных чисел задачи (1.1)–(1.3), каждое из которых порождает свою лувущечную моду.

3. Задача о препятствии в цилиндрическом канале. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni x' = (x_2, x_3)$, ограниченная отрезком γ длиной $2r > 0$ с концами $P^\pm = (\pm r, 0)$ и липшицевой кривой ζ , соединяющей точки P^+ и P^- в нижней полуплоскости $\mathbb{R}_-^2 = \{x' : x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = z < 0\}$ (см. рис. 3, (а)). Трехмерный цилиндр $\Pi = \mathbb{R} \times \omega \ni x$ заполнен жидкостью и в нем имеется препятствие $\Theta \subset \mathbb{R}^3$ – тело, ограниченное липшицевой поверхностью, плавающее или погруженное. Положим

$$\Omega = \Pi \setminus \bar{\Theta}, \quad \Theta_\Pi = \Theta \cap \Pi, \quad \Gamma = (\mathbb{R} \times \gamma) \setminus \bar{\Theta} \quad (1.6)$$

(см. рис. 4). Считая, что Ω – липшицева область, рассмотрим спектральную задачу Стеклова

$$\begin{aligned} -\Delta_x \Phi(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_\nu \Phi(x) = 0, \\ x \in \Sigma = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}, \quad \partial_z \Phi(x) &= \lambda \Phi(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь обозначения вполне аналогичны использованным в двумерной задаче (1.1)–(1.3), а вариационная формулировка задачи (1.7) апеллирует к интегральному тождеству [23]

$$(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_\Omega = \lambda(\Phi, \Psi)_\Gamma, \quad \Psi \in H^1(\Omega). \quad (1.8)$$

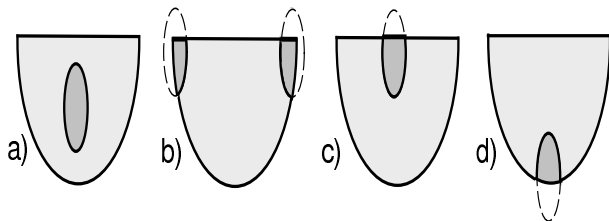


Рис. 4. Возможные положения тел в канале.

Известно, что спектр задачи (1.8) заполняет замкнутую положительную вещественную полуось $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и является непрерывным (см. конец п. 1 §3). Воспользуемся приемом [20] постановки искусственных краевых условий для образования положительной точки отсечки непрерывного спектра. Именно, предположим, что цилиндр Π и тело Θ симметричны относительно плоскости $\{x : x_2 = 0\}$, – формально условие симметрии выглядит так:

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, -x_2, x_3) \in \Omega\} \quad (1.9)$$

(см. рис. 3, на штрих-пунктирной линией обозначена срединная плоскость). Положим $\Omega^+ = \{x \in \Omega : x_2 > 0\}$, $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma : x_2 > 0\}$ и т.п. (ср. (1.6)). Рассмотрим смешанную спектральную задачу Стеклова

$$-\Delta_x \Phi^+(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad \partial_\nu \Phi^+(x) = 0, \quad x \in \Sigma^+, \quad (1.10)$$

$$\partial_z \Phi^+(x) = \lambda^+ \Phi^+(x), \quad x \in \Gamma^+, \quad (1.11)$$

$$\Phi^+(x) = 0, \quad x \in \Upsilon, \quad (1.12)$$

с (искусственными) условиями Дирихле на части $\Upsilon = \{x \in \Omega : x_2 = 0\}$ срединной плоскости. Теперь непрерывный спектр задачи

$$(\nabla_x \Phi^+, \nabla_x \Psi^+)_{\Omega^+} = \lambda^+ (\Phi^+, \Psi^+)_{\Gamma^+}, \quad \Psi^+ \in \mathring{H}^1(\Omega^+; \Upsilon), \quad (1.13)$$

занимает луч $[\rho_1, +\infty) \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C}$ (см. п. 1 §3), а точка отсечки $\rho_1 > 0$ – первое собственное число вспомогательной задачи на сечении ω^+ цилиндра Π^+ (без тела Θ)

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'} \varphi(x') &= 0, \quad x' \in \omega^+, \quad \partial_\nu \varphi(x') = 0, \quad x' \in \zeta^+, \\ \partial_z \varphi(x') &= \rho \varphi(x'), \quad x' \in \gamma^+, \quad \varphi(x') = 0, \quad x' \in v. \end{aligned} \quad (1.14)$$

В соответствующем интегральном тождестве

$$(\nabla_{x'} \varphi, \nabla_{x'} \psi)_{\omega^+} = \rho (\varphi, \psi)_{\gamma^+}, \quad \psi \in \mathring{H}^1(\omega^+; v), \quad (1.15)$$

символ $\mathring{\circ}$ означает, что пробная функция $\psi \in H^1(\omega^+)$ обращается в нуль на средней линии $v = \{x' \in \omega : x_2 = 0\}$ сечения ω цилиндра Π . Согласно минимальному принципу (см., например, [15, теорема 10.2.1]) имеем

$$\rho_1 = \min_{\varphi \in \mathring{H}^1(\omega^+; v) \setminus \mathring{H}^1(\omega^+; v \cup \gamma^+)} \frac{\|\nabla_{x'} \varphi; L_2(\omega^+)\|^2}{\|\varphi; L_2(\gamma^+)\|^2} > 0. \quad (1.16)$$

Предложение 3.1 указывает условие, использующее спектральную пару $\{\rho_1, \varphi_1\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathring{H}^1(\omega^+; v)$ задачи (1.15) и обеспечивающее существование собственного числа $\lambda_1^+ \in (0, \rho_1)$ задачи (1.13). После этого по стандартной схеме [20] нечетным образом продолжаем соответствующую собственную функцию $\Phi_1^+ \in \mathring{H}^1(\Omega^+; \Upsilon)$ через срединную плоскость канала и обнаруживаем собственное число $\lambda_1 = \lambda_1^+$ задачи (1.8) (или задачи (1.7)) на ее непрерывном спектре.

В упрощенном виде установленное достаточное условие непустоты точечного спектра приводит к следующему утверждению.

Предложение 1.2. *Если канал Π и погруженное в него тело $\bar{\Theta} \subset \Pi$ симметричны относительно плоскости $\{x : x_2 = 0\}$, то задача (1.7)*

имеет собственное число $\lambda_1 > 0$, которому отвечает нетривиальное решение $\Phi_1 \in H^1(\Omega)$, порождающее ловушечную моду.

Упомянем еще результат [11, 13] о концентрации ловушечных мод в примитивном исполнении. Пусть по-прежнему выполнено требование симметрии (1.9) и дополнительно в $\Omega = \Pi \setminus \bar{\Theta}$ имеется параллелепипед

$$Q = (a, b) \times (0, l) \times (-d, 0),$$

нижнее основание которого лежит на поверхности тела Θ (ср. предположение (1.5) в плоском случае и см. рис. 2). Тогда для любых $\delta \in (0, 1)$ и $N \in \{1, 2, \dots\}$ найдется такая величина $d(\delta, N) > 0$, что при $d < d(\delta, N)$ на участке $(0, \delta)$ непрерывного спектра задачи (1.8) найдется не менее N ее собственных чисел, т.е. элементов точечного спектра, порождающих различные ловушечные моды. Иными словами, вариацией формы погруженного или притопленного тела можно добиться любого количества ловушечных мод в низкочастотном диапазоне непрерывного спектра.

2. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

1. Операторская формулировка задачи. Пусть \mathcal{H} – пространство Соболева $H^1(\Omega)$ с естественным скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = (\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_\Omega + (\Phi, \Psi)_\Omega. \quad (2.1)$$

В гильбертовом пространстве \mathcal{H} введем оператор \mathcal{T} формулой

$$\langle \mathcal{T}\Phi, \Psi \rangle = (\Phi, \Psi)_\Gamma, \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{H}. \quad (2.2)$$

Благодаря прямолинейности границы Γ около бесконечности и согласно вложению $H^1(\Omega) \subset L_2(\Gamma)$ (см., например, [23]) оператор \mathcal{T} непрерывный. Он симметричен, а значит, самосопряжен. Кроме того, \mathcal{T} – положительный оператор. Поэтому множество $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_+}$ (комплексная плоскость с вырезанной замкнутой вещественной положительной полуосью) содержится в резольвентном множестве оператора \mathcal{T} .

Вариационная формулировка (1.4) задачи (1.1)–(1.3) равносильна абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}\Phi = \mu\Phi \in \mathcal{H} \quad (2.3)$$

с новым спектральным параметром

$$\mu = 1/\lambda. \quad (2.4)$$

При такой интерпретации задачи (1.1)–(1.3) результаты [11, 13, 21] означают, что непрерывный спектр $\sigma_c(T)$ представляет собой сегмент $(0, 1]$ вещественной оси \mathbb{R} комплексной плоскости \mathbb{C} , точка $\mu = 0$ является бесконечнократным собственным числом с корневым подпространством $\mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)$ (функции из класса Соболева $H^1(\Omega)$, обращающиеся в нуль на Γ), а на сегменте $(1, T] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ может располагаться дискретный спектр $\sigma_d(T)$; здесь T – норма оператора T . Луч $(T, +\infty)$ вместе с $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_+}$ лежит в резольвентном множестве. Наконец, сегмент $[0, 1]$ – существенный спектр $\sigma_e(T)$.

Если норма $T = \|T; \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\|$ равна единице, дискретный спектр заведомо отсутствует. С другой стороны, в случае $T > 1$,

$$T = \sup_{u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\langle Tu, u \rangle}{\|u; \mathcal{H}\|^2}, \quad (2.5)$$

дискретный спектр не может быть пустым. Иными словами, точка $\mu = T$ в случае $T = 1$ оказывается верхней гранью непрерывного спектра $\sigma_c(T)$ оператора T , но $\mu = T$ – собственное число в случае $T > 1$. Учитывая связь (2.4) спектральных параметров, видим, что при $T > 1$ задача (1.4) (или задачи (1.1)–(1.3)) имеет хотя бы одно собственное число ниже точки отсечки $\lambda_{\dagger} = 1$ непрерывного спектра задачи.

2. Промежуточные вычисления. В качестве пробных функций в формуле (2.5) возьмем

$$\Phi_\varepsilon(x) = \exp(z - \varepsilon|y|), \quad (2.6)$$

где ε – малый положительный параметр. Ясно, что непрерывные кусочно-гладкие функции (2.6) затухают на бесконечности с экспоненциальной скоростью и потому попадают в пространство Соболева \mathcal{H} . В соответствии с определениями (2.1) и (2.2) имеем

$$T_\varepsilon := \frac{\langle T\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon \rangle}{\|\Phi_\varepsilon; \mathcal{H}\|^2} = \frac{\int_\Gamma \exp(-2\varepsilon|y|) dy}{(2 + \varepsilon^2) \int_\Omega \exp(2z - 2\varepsilon|y|) dx}. \quad (2.7)$$

Поскольку $\exp(-2\varepsilon|y|) = 1 + O(\varepsilon)$ на конечном участке $\Lambda = \partial\mathbb{R}_-^2 \setminus \Gamma$ горизонтальной границы полуплоскости \mathbb{R}_-^2 (см. рис. 1, (b)), числитель дроби (2.7) равен

$$\frac{1}{\varepsilon} - |\Lambda| + O(\varepsilon),$$

где $|\Lambda|$ — длина отрезка Λ (или суммарная длина отрезков, составляющих множество Λ), причем $|\Lambda| = 0$ в случае погруженного тела Θ (рис. 1, (a)). По аналогичной причине для знаменателя получаем выражение

$$\begin{aligned} & (2 + \varepsilon^2) \int_{\mathbb{R}_-^2} \exp(2z - 2\varepsilon|y|) dx - (2 + \varepsilon^2) \int_{\Theta_-} \exp(2z - 2\varepsilon|y|) dx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}(2 + \varepsilon^2) - (2 + \varepsilon^2) \left(\frac{1}{2} |\Theta_{\log}| + O(\varepsilon) \right) = \frac{1}{\varepsilon} - |\Theta_{\log}| + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$|\Theta_{\log}| := 2 \int_{\Theta_-} \exp(2z) dy dz = \int_{\Theta_{\log}} dy d\zeta, \quad (2.9)$$

т.е. $|\Theta_{\log}|$ — площадь фигуры $\Theta_{\log} = \{(y, \zeta) : (y, -\frac{1}{2} \ln |\zeta|) \in \Theta_-\}$, полученной из погруженной части Θ_- тела преобразованием Эйлера (см. рис. 5).

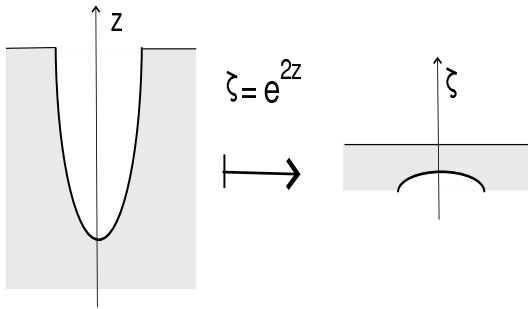


Рис. 5. Преобразование Эйлера сечения Θ .

Собирая приведенные формулы, обнаруживаем, что

$$T_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon^{-1} - |\Lambda| - c\varepsilon}{\varepsilon^{-1} - |\Theta_{\log}| + c\varepsilon} \geq 1 + \varepsilon(|\Theta_{\log}| - |\Lambda|) - C\varepsilon^2. \quad (2.10)$$

3. Дискретный спектр. Соотношения (2.10) и (2.5) обеспечивают следующее утверждение.

Теорема 2.1. Если справедливо неравенство

$$|\Theta_{\log}| > |\Lambda|, \quad (2.11)$$

связывающее взвешенную площадь (2.9) погруженной части и длину сечения Λ тела Θ горизонтальной прямой $\partial\mathbb{R}_-^2$, то оператор \mathcal{T} , определенный формулой (2.2), имеет хотя бы одно собственное число $\mu_1 > 1$.

Связь (2.4) спектральных параметров μ и λ позволяет пересказать теорему 2.1 применительно к задаче (1.4) (или задаче (1.1)–(1.3)), причем ее собственное число $\lambda_1 = 1/\mu_1 < 1$ располагается ниже точки отсечки $\lambda_{\dagger} = 1$ и порождает ловушечную моду $u_1 \in H^1(\Omega)$. Если тело погружено и $|\Lambda| = 0$, то условие (2.11), разумеется, выполнено и предложение 1.1 очевидно.

4. Обсуждение. Поскольку $2 \int_{-\infty}^0 \exp(2z) dz = 1$, при включении

$$\Theta_- \subset \varpi_\Lambda = \{(y, z); y \in \Lambda, z < 0\} \quad (2.12)$$

(см. рис. 6, (а)) неравенство (2.11) нарушено, и теорема 2.1 не может гарантировать существование собственного числа. Включение (2.12) коррелирует с известным условием Джона [24], обеспечивающим однозначную разрешимость задачи при $\lambda \in (0, 1)$. Отметим, что при этом условии точечного спектра у задачи нет вообще – при постановке правильных условий излучения задача становится однозначно разрешимой и на непрерывном спектре. Для соблюдения требования (2.11) нужно, чтобы фигура Θ_- выступала за пределы полуполосы ϖ_Λ (см. рис. 6, (б)).

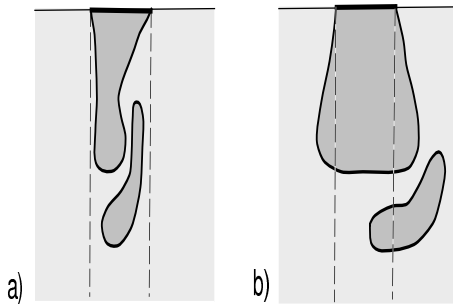


Рис. 6. Условие Джона выполнено (а) и нарушено (б).

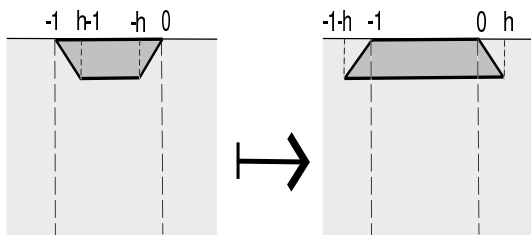


Рис. 7. Плавающие трапециевидные тела, зависящие от параметра $h > -1/2$.

При эволюции трапеции $\Theta(h)$, намеченной на рис. 7, т.е. при фиксированной глубине H и при увеличении параметра h от $-1/2$ до $+\infty$, наблюдаем следующую картину: в силу [24] при $h < 0$ собственных чисел у задачи (1.4) нет, но при большом $h > 0$ такие числа появляются в силу теоремы 2.1, так как $|\Lambda| = 1$ и $|\Theta_{\log}| = (1 + H^{-1}h)(1 - \exp(-2H)) \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow +\infty$. В связи с этим наблюдением возникает вопрос о вычислении порога h_1 : собственные числа на интервале $(0, 1)$ отсутствуют в случае $h \leq h_1$, но имеются в случае $h > h_1$. Подход, развитый в [11, 13] и обеспечивающий обнаружение концентрации дискретного спектра, помогает убедиться в том, что количество собственных чисел на интервале $(0, 1)$ неограниченно возрастает при $h \rightarrow +\infty$. Таким образом, можно изучать следующие пороги h_2, h_3, \dots и исследовать поведение последовательности $\{h_j\}$ при $j \rightarrow +\infty$. Отметим, что тело Θ может быть бесконечным (рис. 8 (a)).

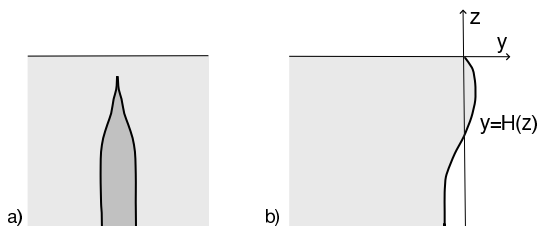


Рис. 8. Подводный хребет и крутой берег обрыва.

Рассмотрим еще задачу (1.1)–(1.3) в третьем квадрате Ω с возмущенной границей (см. рис. 8 (b)), т.е.

$$\Omega = \{x = (y, z) : z < 0, y < H(z)\}, \quad \Gamma = \{x : z = 0, y < 0\}. \quad (2.13)$$

Здесь H – ограниченная непрерывно-дифференцируемая функция на полуоси $(-\infty, 0]$, причем $H(0) = 0$. Очередное утверждение проверяется при помощи незначительного изменения выкладки из п. 2 §2.

Теорема 2.2. *Если*

$$\int_{-\infty}^0 \exp(2z)H(z) dz < 0, \quad (2.14)$$

то задача (1.4) в области Ω из (2.12) имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, 1)$.

Обращаем внимание на то, что, во-первых, $\Lambda = \emptyset$ благодаря выбору начала координат, т.е. линейный интеграл отсутствует, и, во-вторых, в неравенстве (2.14) знак поменян на обратный (по сравнению с неравенством (2.11)). Последнее вызвано тем, что, например, в случае $H \geq 0$ интеграл

$$\int_{\Theta_-} 2 \exp(-2z) dy dz = 2 \int_{-\infty}^0 \exp(2z)H(z) dz$$

в аналогичной (2.8) выкладке теперь не вычитается, а прибавляется.

Пусть Θ^\sharp – ограниченная область в полуплоскости \mathbb{R}_-^2 , причем $\Theta \subset \Theta^\sharp$, $\Theta \neq \Theta^\sharp$ и $\Lambda^\sharp = \partial\Theta^\sharp \cap \partial\mathbb{R}_-^2 = \Lambda$, а область $\Omega^\sharp = \mathbb{R}_-^2 \setminus \overline{\Theta^\sharp}$ по-прежнему имеет липшицеву границу. Предположим, что норма T оператора \mathcal{T} из (2.2) строго больше 1, а значит, супремум в формуле (2.5) достигается на собственной функции $\Phi_1 \in \mathcal{H}$, отвечающей собственному числу $\mu_1 = T$. Норма T^\sharp оператора \mathcal{T}^\sharp в пространстве \mathcal{H}^\sharp , которые определены аналогично \mathcal{T} и \mathcal{H} , удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} T^\sharp &= \sup_{\Psi \in \mathcal{H}^\sharp \setminus \{0\}} \frac{(\Psi, \Psi)_{\Gamma^\sharp}}{(\nabla\Psi, \nabla\Psi)_{\Omega^\sharp} + (\Psi, \Psi)_{\Omega^\sharp}} \\ &\geq \frac{(\Phi_1, \Phi_1)_{\Gamma}}{(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_1)_{\Omega^\sharp} + (\Phi_1, \Phi_1)_{\Omega^\sharp}} \\ &> \frac{(\Phi_1, \Phi_1)_{\Gamma}}{(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_1)_{\Omega} + (\Phi_1, \Phi_1)_{\Omega}} = \mu_1 > 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пояснение: заменив область интегрирования Ω^\sharp более широкой областью Ω , увеличиваем знаменатель, но уменьшаем саму дробь, а нетривиальное решение уравнения Гельмгольца не может обратиться в нуль

на множестве положительной меры. Следовательно, при разрастании погруженной части сечения цилиндра, но сохранении части Λ его границы, лежащей на поверхности жидкости, первое собственное число λ_1^\sharp задачи (1.1)–(1.3) в Ω^\sharp существует, остается в интервале $(0, 1)$ и оказывается строго меньше собственного числа $\lambda_1 = \mu_1^{-1}$ той же задачи в расширенной области Ω . Это утверждение известно (см. [12], а также [7] для погруженного тела) и носит название принципа сравнения. Его проверка (2.15), опирающаяся на свойства следового оператора, несоизмеримо проще, чем оригинальные доказательства [7, 12].

В заключение параграфа покажем, как вариационный метод [17] позволяет усилить результат теоремы 2.1. Пусть справедливо равенство

$$|\Theta_{\log}| = |\Lambda|, \quad (2.16)$$

т.е. условие (2.11) теоремы 2.1 нарушено. Предположим, что теперь дискретный спектр отсутствует, а значит, согласно формуле (2.5) справедливо неравенство

$$\|u; \mathcal{H}\|^2 \geq \langle \mathcal{T}u, u \rangle, \quad u \in \mathcal{H}. \quad (2.17)$$

Следуя [17], изменим определение (2.6) пробной функции и положим

$$\Phi_\varepsilon(x) = \exp(z - \varepsilon|y|) + \varepsilon^{1/2}\Psi(y, z).$$

Здесь Ψ – какая-то гладкая функция с компактным носителем в $\overline{\mathbb{R}^2} \setminus \Theta$. Продолжив вычисления (2.7)–(2.10), находим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon \rangle &= \int_{\Gamma} \exp(-2\varepsilon|y|) dy + 2\varepsilon^{1/2} \int_{\Gamma} \Psi(y, 0) dy + O(\varepsilon), \\ \|\Phi_\varepsilon; \mathcal{H}\|^2 &= 2 \int_{\Omega} \exp(2z - 2\varepsilon|y|) dx \\ &\quad + 2\varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} \exp(z)(\partial_z \Psi(y, z) + \Psi(y, z)) dx + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставим соотношения (2.18) в неравенство (2.17). В силу предположения (2.16) и вычислений из п. 2 §2 первые интегралы из правых

частей (2.18) равны. Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} C\varepsilon &\geq 2\varepsilon^{1/2} \left(\int_{\Gamma} \Psi(y, 0) dy - \int_{\Omega} \exp(z)(\partial_z \Psi(y, z) + \Psi(y, z)) dx \right) \\ &= -2\varepsilon^{1/2} \int_{\partial\Theta \cap \mathbb{R}_-^2} \exp(z) \nu_z(y, z) \Psi(y, z) dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Если проекция ν_z нормали ν на ось z не равна нулю тождественно на погруженной поверхности тела $\partial\Theta \cap \mathbb{R}_-^2 = \partial\Theta_- \setminus \Lambda$, то при надлежащем выборе пробной функции Ψ выражение из правой части (2.19) можно сделать равным $c\varepsilon^{1/2}$, где $c > 0$, и тем самым придти к противоречию, означающему, что неравенство (2.17) и отсутствие дискретного спектра невозможны. Отметим, что $\nu_z = 0$ почти всюду на $\partial\Theta_- \setminus \Lambda$ тогда и только тогда, когда Θ_- – объединение отрезков, параллельных оси y . Сформулируем результат.

Предложение 2.1. *Если $\nu_z(y, z) \neq 0$ почти всюду на некоторой непустой открытой дуге в $\partial\Theta \cap \mathbb{R}_-^2$ и справедливо равенство (2.16), то задача (1.4) в области $\Omega = \mathbb{R}_-^2 \setminus \bar{\Theta}$ имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, 1)$.*

3. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

1. Операторная формулировка задачи. Пусть \mathcal{H}^+ – гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}^1(\Omega^+; \Upsilon)$ со скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_+ = (\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_{\Omega^+}. \quad (3.1)$$

Подчеркнем, что благодаря условию Дирихле на Υ и обеспеченному им неравенством Фридрихса билинейная форма (3.1) оказывается скалярным произведением в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}^1(\Omega^+; \Upsilon)$ (в §2 такое упрощение невозможно: без последнего слагаемого билинейная форма (2.1) скалярным произведением в $H^1(\Omega)$ не является). После расстановки верхних индексов $^+$ формулы (2.2) и (2.3) определяют самосопряженный положительный оператор \mathcal{T}^+ и новый спектральный параметр μ^+ , для которых спектральная вариационная задача (1.13) эквивалентна абстрактному уравнению (2.3) с понятными изменениями. В статье [13] проверено, что непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{T}^+)$ представляет собой сегмент $(0, \rho_1^{-1}]$, где ρ_1 – величина (1.16), а точка

$\mu^+ = 0$ – бесконечнократное собственное число оператора T^+ с корневом подпространством $\overset{\circ}{H}^1(\Omega^+; \Upsilon \cup \Gamma^+)$. Наконец, норма T^+ оператора вычисляется по формуле

$$T^+ = \max_{\Phi^+ \in \mathcal{H}^+ \setminus \{0\}} \frac{\langle T^+ \Phi^+, \Phi^+ \rangle}{\|\Phi^+; \mathcal{H}^+\|^2}, \quad (3.2)$$

и существование собственного числа в дискретном спектре равносильно соотношению

$$T^+ > \rho_1^{-1}. \quad (3.3)$$

2. Промежуточные вычисления. Пусть φ_1 – собственная функция задачи (1.15), отвечающая ее первому собственному числу ρ_1 , – на ней достигается минимум в правой части (1.16). Подставим пробную функцию

$$\Phi^+(x) = \exp(-\varepsilon|x_1|)\varphi_1(x')$$

в формулу (3.2) и получим, что числитель фигурирующей в ней дроби равен

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^+} \exp(-2\varepsilon|y_1|)|\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 - \int_{\Lambda^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

причем $\Lambda = (\mathbb{R} \times \gamma) \setminus \bar{\Gamma}$ – сечение тела Θ продолжением водной поверхности (на рис. 4 (с) и (b)), оно помечено полужирной линией и $\Lambda = \emptyset$ на рис. 4 (с) и (d)). Для знаменателя при учете соотношения (1.16) получаем выражение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_1(x')|^2) \exp(-2\varepsilon|x_1|) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\omega^+} (|\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_1(x')|^2) \exp(-2\varepsilon|x_1|) dx' dx_1 \\ & - \int_{\Theta^+} (|\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 + \varepsilon^2 |\varphi_1(x')|^2) \exp(-2\varepsilon|x_1|) dx' dx_1 \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \rho_1 \int_{\gamma^+} |\varphi_1(x_2, 0)|^2 dx_2 - \int_{\Theta_{\Pi}^+} |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
T &\geq \frac{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\gamma^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 - \int_{\Lambda^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 - c\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} \rho_1 \int_{\gamma^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 - \int_{\Theta_-^+} |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx + c\varepsilon} \\
&\geq \frac{1}{\rho_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_1} \left(\int_{\gamma^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 \right)^{-1} \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\rho_1} \int_{\Theta_-^+} |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx - \int_{\Lambda^+} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 \right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Отметим, что собственную функцию φ_1 можно подчинить условию нормировки $\|\varphi_1; L_2(\gamma^+)\|^2 = 1$ и упростить последнюю формулу, однако это не влияет на результат в очередном разделе.

3. Точечный спектр. Продолжим собственную функцию по нечетности через среднюю линию v сечения ω и сохраним обозначение φ_1 за продолжением. Если выполнено неравенство

$$\rho_1 \int_{\Lambda} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 < \int_{\Theta_-} |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx, \tag{3.5}$$

где Λ – верхняя горизонтальная поверхность $\{x = (y, z) \in \overline{\Theta}_{\Pi} : z = 0\}$ погруженной части $\Theta_{\Pi} = \Theta \cap \Pi \ni x$ тела Θ (см. (1.16) и рис. 4), а $\{\rho, \varphi_1\}$ – первая собственная пара задачи (1.15) (или задачи (1.14)), то из формулы (3.4) с малым $\varepsilon > 0$ вытекает соотношение (3.3), а значит, справедливо

Предложение 3.1. При выполнении неравенства (3.7) оператор T^+ имеет собственное число $\mu_1^+ > \rho_1^{-1}$, принадлежащее его дискретному спектру.

По построению оператора T^+ число $\lambda_1^+ = 1/\mu_1^+$ и собственный вектор $\Phi_1^+ \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega^+; \Upsilon)$, отвечающий μ_1^+ , образует спектральную пару вариационной (1.13) или дифференциальной (1.10)–(1.12) задачи на половине Ω^+ области Ω с искусственными краевыми условиями Дирихле (1.12) на рассекающей поверхности Υ . Гармоническая функция

Φ_1^+ гладко продолжается через Υ по нечетности (относительно переменной $x_2 = y_2$) на всю область Ω , и это продолжение $\Phi_1 \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет задаче (1.8) (или задаче (1.7)), а следовательно, $\lambda_1 = \lambda_1^+$ – собственное число упомянутой задачи в Ω .

Теорема 3.1. Пусть верны предположение (1.9) о симметрии канала Π и тела Θ , а также неравенство (3.5), в котором фигурирует первое собственное число ρ_1 и соответствующая собственная функция φ_1 вспомогательной задачи (1.15) (или задачи (1.14)). Тогда задача (1.8) (или задача (1.7)) имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, \rho_1)$, лежащее на ее непрерывном спектре.

4. Обсуждение. Собственная функция $\varphi_1 \in \mathring{H}^1(\omega^+; v)$ задачи (1.14) также допускает гладкое нечетное продолжение с половины ω^+ на все сечения ω . Иными словами, число ρ_1 и названное продолжение $\varphi_1 \in H^1(\omega)$ образует спектральную пару задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_{x'}\varphi(x') &= 0, & x' \in \omega, & \quad \partial_\nu\varphi(x') = 0, \\ x' \in \gamma_1, & \quad \partial_z\varphi(x') = \rho\varphi(x'), & x' \in \gamma. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ясно, что $\rho_0 = 0$ – собственное число задачи (3.6), а соответствующая собственная функция φ_0 постоянна. Нетрудно построить пример, в котором ρ_1 не является первым положительным собственным числом задачи (3.6), и именно поэтому в теореме 3.1 достаточное условие непустоты точечного спектра задачи (1.7) написано в терминах задачи (1.14) на половине сечения и с искусственным краевым условием.

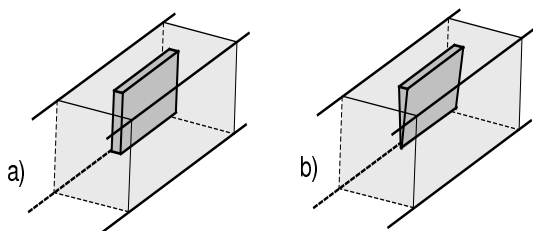


Рис. 9. Тонкие тела, порождающие ловушечные моды в канале.

Если сечение ω – прямоугольник $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, -H)$ (масштабированием зафиксировали его ширину), то

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_2, x_3) &= (\exp(2H + x_3) + \exp(-x_3)) \sin x_2, \\ \rho_1 &= (\exp(2H) + 1)^{-1}(\exp(2H) - 1). \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x_2, 0)|^2 &= (\exp(2H) + 1)^2 (\sin x_2)^2, \\ |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 &= (\exp(2H + x_3) + \exp(-x_3))^2 (\cos x_2)^2 \\ &\quad + (\exp(2H + x_3) - \exp(-x_3))^2 (\sin x_2)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В случае параллелепипеда (рис. 9 (а))

$$\Theta = (-L, L) \times (-l, l) \times (0, -h)$$

с размерами $L > 0$, $l \in (0, \pi)$, $h \in (0, H)$, выводим из формул (3.7), что при малом $l \in (0, \pi/4)$ левая часть (3.5) мажорируется величиной Cl^2 , а правая больше $c > 0$; здесь c и C – величины, зависящие от параметров H , h и L , но не от l . Таким образом, согласно теореме 3.1 при зафиксированных L , H , h и малом l условие (3.5) выполнено и точечный спектр задачи (1.7) непустой. Тот же вывод можно сделать и для узкого клиновидного тела (рис. 9 (б)). Более того, он справедлив и при достаточно произвольной форме симметрического сечения ω , так как благодаря (строгому) принципу максимума производная $\partial\varphi_1/\partial y_1$ не обращается в нуль всюду на v . В любом случае понятно, что условие Джона [24] не имеет никакого отношения к задаче (1.7) в канале.

Заметим еще, что

$$\begin{aligned} \rho_1 \left| \varphi_1 \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) \right|^2 &= \frac{\exp(2H) + 1}{\exp(2H) - 1}, \\ \left| \nabla_{x'} \varphi_1 \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) \right|^2 &= \exp(4H) + 1, \end{aligned}$$

а значит, при расположении компонент связности Θ^\pm тела $\Theta_- \subset \Pi$ в R -окрестностях точек $(\pm\pi/4, 0)$ условие (3.5) нарушено, если размеры R и H малы. Отсюда вытекает, что предложенное достаточное условие не может быть необходимым. Контрпример нетрудно построить на основе результатов [11, 13] о концентрации собственных чисел при всплытии контейнера с плоской крышкой (см. схему на рис. 10).

Теперь сформулируем результат, получающийся по прежней схеме, для задачи (1.7) в полуцилиндре с искривленным торцом (рис. 11), т.е.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x : x' \in \omega, x_3 < H(x')\}, \\ \Gamma &= \{x : |x_2| < r, x_3 = 0, x_1 < H(x_1, 0)\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь H – непрерывно-дифференцируемая функция на множестве $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$.

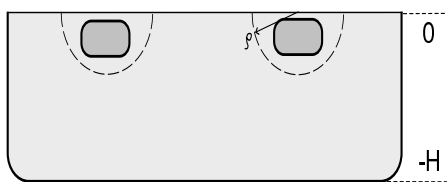


Рис. 10. Тела, обеспечивающие ловушечные моды, но не удовлетворяющие полученному достаточному условию.

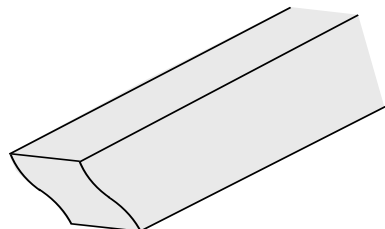


Рис. 11. Полубесконечная призма с искривленным торцом.

Теорема 3.2. Пусть сечение ω симметрично относительно прямой $\{x' : x_2 = 0\}$, а H – функция, четная относительно переменной x_2 . При условии

$$\rho_1 \int_0^r H(y_2, 0) |\varphi_1(x_2, 0)|^2 dx_2 > \int_{\omega^+} H(x') |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx', \quad (3.9)$$

где $\{\rho_1, \varphi_1\}$ – первая собственная пара задачи (1.14), задача (1.7) в области Ω , определенной формулой (3.8), имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, \rho_1)$ на непрерывном спектре.

Если H – неположительная в ω функция, обращающаяся в нуль на отрезке $\gamma = \{x' : x_3 = 0, |x_2| < r\}$, то требование (3.9) выполнено и ловушечная мода существует. Если

$$\partial_\nu H(x') = 0, \quad x' \in \gamma \cup \zeta, \quad (3.10)$$

то, подставив в интегральное тождество (1.15) для собственной пары $\{\rho_1, \varphi_1\}$ пробную функцию $\psi = H\varphi_1$, получаем, что

$$\int_{\omega^+} H(x') |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx' - \rho_1 \int_{\gamma^+} H(x_2, 0) |\varphi_1(x_1, 0)|^2 dx_2$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\omega^+} \varphi_1(x') \nabla_{x'} \varphi_1(x') \cdot \nabla_{x'} H(x') dx' \\
&= - \frac{1}{2} \int_{\omega^+} \nabla_{x'} H(x') \cdot \nabla_{x'} (\varphi_1(x')^2) dx' = \frac{1}{2} \int_{\omega^+} \varphi_1(x')^2 \Delta_{x'} H(x') dx'.
\end{aligned}$$

Следовательно, для субгармонической функции H , подчиненной условию (3.10) неравенство (3.9) также имеет место.

Наконец, сформулируем утверждение, которое вполне аналогично предложению 2.1 и требует тех же рассуждений для проверки.

Предложение. Пусть верны предположение (1.9) о симметрии канала Π и тела Θ , а также равенство

$$\rho_1 \int_{\Lambda} |\varphi_1(y_2, 0)|^2 dy_2 = \int_{\Theta_-} |\nabla_{x'} \varphi_1(x')|^2 dx,$$

в котором фигурирует первое собственное число ρ_1 и соответствующая собственная функция φ_1 вспомогательной задачи (1.15) (или задачи (1.14)). Если нормальная производная $\partial_\nu \varphi_1$ отлична от нуля почти всюду на некотором непустом открытом подмножестве погруженной части $\partial\Theta \cap \Pi$ поверхности тела, задача (1.8) (или задача (1.7)) имеет собственное число $\lambda_1 \in (0, \rho_1)$, лежащее на ее непрерывном спектре.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Stoker, *Water waves. The Mathematical Theory with Applications*. Reprint of the 1957 original. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
2. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
3. Д. А. Индейцев, Н. Г. Кузнецов, О. В. Мотыгин, Ю. А. Мочалова, *Локализация линейных волн*. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та (2007).
4. F. Ursell, *Trapping modes in the theory of surface waves*. — Proc. Camb. Phil. Soc. **47** (1951), 347–358.
5. D. S. Jones, *The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains*. — Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), 668–684.
6. R. M. Garipov, *On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness*. — Arch. Rat. Mech. Anal. **24** (1967), 352–362.
7. F. Ursell, *Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves*. — J. Fluid Mech. **183** (1987), 421–437.
8. P. McIver, *Trapping of surface water waves by fixed bodies in channels*. — Q. J. Mech. Appl. Maths. **44** (1991), 193–208.

9. A.-S. Bonnet-Ben Dhia, P. Joly, *Mathematical analysis of guided water-waves*. — SIAM J. Appl. Math. **53** (1993), 1507–1550.
10. N. Kuznetsov, R. Porter, D. V. Evans, M. J. Simon, *Uniqueness and trapped modes for surface-piercing cylinders in oblique waves*. — J. Fluid Mech. **365** (1998), 351–368.
11. С. А. Назаров, *О сгущении точечного спектра на непрерывном в задачах линейной теории волн на поверхности идеальной жидкости*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **348** (2007), 99–126.
12. O. V. Motygin, *On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel*. — Wave Motion. **45** (2008), 940–951.
13. С. А. Назаров, *Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости*. — Мат. сб. 2008 **199**, No. 12 (2008), 53–78.
14. C. M. Linton, P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acoustics*. — Wave motion **45** (2007), 16–29.
15. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. — Л.: изд-во Ленингр.ун-та, 1980.
16. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов*. — Доклады РАН **368**, No. 6 (1999), 771–773.
17. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке*. — Матем. заметки **73**, No. 1 (2003), 138–140.
18. И. В. Камоцкий, *О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина*. — Алгебра и анализ **20**, No. 1 (2008), 86–92.
19. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domain*. — Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series **9** (2008), 261–309.
20. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes*. — J. Fluid Mech. **261** (1994), 21–31.
21. С. А. Назаров, *Простой способ обнаружения ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн*. — Доклады РАН **429**, No. 1 (2009).
22. T. H. Navelock, *Forced surface waves*. — Phil. Mag. **8** (1929), 569–576.
23. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики* Наука, М., 1973.
24. F. John, *On the motion of floating bodies*. I. — Comm. Pure Appl. Math. **2**, No. 1 (1949), 13–57; II. *ibid* **3**, No. 1 (1950), 45–101.

Nazarov S. A. Sufficient conditions of the existence of trapped modes in problems of the linear theory of surface waves.

A new method is proposed for searching for trapped modes in several problems of the linear water-wave theory. In the case of submerged bodies the method gives simple proofs of known results and in the case of surface piercing bodies the observed condition is completely new.

ИПМаш РАН

Поступило 15 сентября 2009 г.

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk