

С. А. Назаров

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ С КОНТРАСТНЫМИ ЖЕСТКОСТЯМИ

1. Задача с контрастными жесткостями. Пусть Ξ и ω – области на плоскости \mathbb{R}^2 , ограниченные простыми гладкими замкнутыми контурами Σ и Γ соответственно, причем $\bar{\omega} \subset \Xi$ и $\Omega = \Xi \setminus \bar{\omega}$ – двусвязная область (см. рис. 1). В составной области $\Omega \cup \omega$ рассмотрим задачу Неймана с условиями сопряжения на разделительной дуге Γ

$$-\Delta_x u_\varepsilon^\Omega = 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n u_\varepsilon^\Omega(x) = g(x), \quad x \in \Sigma, \quad (1)$$

$$-\varepsilon \Delta_x u_\varepsilon^\omega(x) = 0, \quad x \in \omega, \quad (2)$$

$$u_\varepsilon^\Omega(x) = u_\varepsilon^\omega(x), \quad \partial_n u_\varepsilon^\Omega(x) = \varepsilon \partial_n u_\varepsilon^\omega(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь ε – малый положительный параметр, u_ε^Ω и u_ε^ω – сужение функции u_ε на множества Ω и ω соответственно, g – гладкая (для простоты) функция с нулевым средним на Σ , а ∂_n – производная вдоль внешней нормали к границе $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ области Ω . Существует обобщенное решение $u_\varepsilon \in H^1(\Xi)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее интегральному тождеству [1]

$$(\nabla_x u_\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon)_\Omega + \varepsilon (\nabla_x u_\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon)_\omega = (g, v_\varepsilon)_\Sigma, \quad v_\varepsilon \in H^1(\Xi), \quad (4)$$

и определенное с точностью до постоянного слагаемого. Здесь $(\cdot, \cdot)_\Xi$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi)$, а $H^l(\Omega)$ – пространство Соболева с показателем гладкости $l \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. В силу введенного условия

$$\bar{g} = \int_\Sigma g(x) ds = 0 \quad (5)$$

Ключевые слова : асимптотика, сингулярно возмущенная граница с уступами, энергетический функционал, моделирование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759).

функционал энергии

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) = \frac{1}{2}(\nabla_x u_\varepsilon, \nabla_x u_\varepsilon)_\Omega + \frac{1}{2}\varepsilon(\nabla_x u_\varepsilon, \nabla_x u_\varepsilon)_\omega - (g, u_\varepsilon)_\Sigma = -\frac{1}{2}(g, u_\varepsilon)_\Sigma \quad (6)$$

не зависит от выбора решения u_ε , и поэтому далее всегда считаем, что $\bar{u}_\varepsilon = 0$. При помощи результатов о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач и задач сопряжения (см., например, [2]) можно проверить, что обобщенное решение $u_\varepsilon^\varepsilon$ становится классическим, т.е. $u_\varepsilon^\Omega \in H^2(\Omega)$, $u_\varepsilon^\omega \in H^2(\omega)$ и верна оценка

$$\|u_\varepsilon^\Omega; H^2(\Omega)\| + \|u_\varepsilon^\omega; H^2(\omega)\| \leq c_\varepsilon \|g; H^{1/2}(\Sigma)\|.$$

Здесь $H^{1/2}(\Sigma)$ – пространство Соболева–Слободецкого. Множитель c_ε в правой части в приведенной оценке, вообще говоря, зависит от параметра ε , но можно убедиться в том, что он равномерно относительно $\varepsilon \in (0, 1]$ ограничен благодаря однородности условий сопряжения (3) и уравнения (2). Впрочем, этот результат востребован в статье не будет (ср. теорему 8).

Построить асимптотику решения u_ε задачи (1)–(3) несложно, несмотря на то, что возмущение в ней сингулярное (см., например, [3]). Приведем конструкцию двух асимптотических членов, которые будут обоснованы в п. 7,

$$u_\varepsilon^\Omega(x) = v(x) + \varepsilon v'(x) + \dots, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u_\varepsilon^\omega(x) = V(x) + \varepsilon V'(x) + \dots, \quad x \in \omega. \quad (8)$$

Подставляя анзацы (7) и (8) в уравнения (1) и (2) соответственно, а также в условия сопряжения (3), получаем рекуррентную последовательность краевых задач в областях Ω и ω :

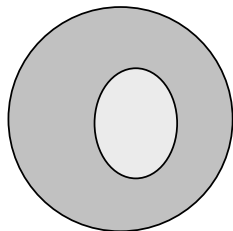


Рис. 1. Составная область.

$$\begin{aligned} -\Delta_x v(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n v(x) = g(x), \\ &x \in \Sigma, \quad \partial_n v(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \end{aligned} \quad (9)$$

$$-\Delta_x V(x) = 0, \quad x \in \omega, \quad V(x) = v(x), \quad x \in \Gamma; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\Delta_x v'(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n v'(x) = 0, \\ &x \in \Sigma, \quad \partial_n v'(x) = \partial_n V(x), \quad x \in \Gamma; \end{aligned} \quad (11)$$

$$-\Delta_x V'(x) = 0, \quad x \in \omega, \quad V'(x) = v'(x), \quad x \in \Gamma. \quad (12)$$

Задача Неймана (9) разрешима в силу условия ортогональности (5), а задача Неймана (11) – в силу формулы Остроградского–Гаусса

$$\int_{\Gamma} \partial_n V(x) ds = \int_{\omega} \Delta_x V(x) dx = 0. \quad (13)$$

Последовательно решая задачи (9)–(12), находим члены асимптотических разложений (7) и (8). При этом для энергетического функционала (6) выводим формулы

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) &= -\frac{1}{2}(g, v)_\Sigma - \frac{\varepsilon}{2}(g, v')_\Sigma + \dots, \quad (14) \\ (g, v')_\Sigma &= (\partial_n v, v')_\Sigma = (v, \partial_n v')_\Gamma = (V, \partial_n V)_\Gamma = -(\nabla_x V, \nabla_x V)_\omega \leq 0. \end{aligned}$$

В п. 7 (следствие 9) будет проверена оценка

$$\left| E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) - E(v, g; \Omega) + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla_x V; L_2(\omega)\|^2 \right| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|^2, \quad (15)$$

в которой множитель c не зависит ни от параметра $\varepsilon \in (0, 1]$, ни от функции g . Из нее, в частности, вытекает, что при малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) \geq E(v, g; \Omega).$$

2. Обсуждение. В статье [4] сформулирована концепция асимптотического моделирования сингулярно возмущенных краевых задач при помощи подходящего регулярного возмущения границы области (см. рис. 2). Более точно, перенося результаты [4] на краевые условия Неймана и ссылаясь на последующие публикации [5–7] и др. по этой

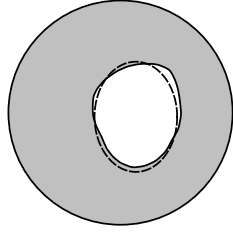


Рис. 2. Регулярное возмущение области.

тематике, укажем, что при правильном выборе гладкой “профильной” функции H на контуре Γ решение задачи Неймана в регулярно возмущенной области $\Omega(\varepsilon)$

$$-\Delta_x v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Omega(\varepsilon), \quad \partial_n v_\varepsilon(x) = g(x), \quad x \in \Sigma, \quad (16)$$

$$\partial_\nu v_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon), \quad (17)$$

доставляет двучленную, т.е. обеспечивающую повышенную точность $O(\varepsilon^2)$, асимптотику решений многих сингулярно возмущенных задач, в частности, смешанной краевой задачи для оператора $\varepsilon^2 \Delta_x^2 - \Delta_x$ с малым параметром при старших производных, задачи с краевыми условиями Вентцеля

$$\partial_n v_\varepsilon(x) = -\varepsilon \partial_s \alpha(x) \partial_s v_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma, \quad (18)$$

задач Неймана в плоской области с быстроосциллирующей границей или в трехмерной тонкой пластине $\Omega \times (0, \varepsilon)$ и т.д.

Поясим принятые обозначения. В окрестности \mathcal{U} контура $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ введена система криволинейных координат (n, s) , где n – ориентированное расстояние до Γ , $n < 0$ внутри $\Omega \cap \mathcal{U}$ и s – длина дуги на Γ . Далее, несколько вольно, пишем $s \in \Gamma$, не различая в обозначениях точку и ее координату. Возмущенный контур $\Gamma(\varepsilon)$ задан формулой

$$\Gamma(\varepsilon) = \{x \in \mathcal{U} : s \in \Gamma, n = \varepsilon H(s)\}, \quad (19)$$

а область $\Omega(\varepsilon)$ заключена между контурами Σ и $\Gamma(\varepsilon)$ (см. рис. 2, на котором базовый контур $\Gamma = \Gamma(0)$ изображен штрих-пунктирной линией). Наконец, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали к компоненте (19) границы $\partial\Omega(\varepsilon)$.

Цель настоящей статьи – построить аналогичную асимптотическую модель для задачи (1)–(3) и определить область $\Omega(\varepsilon)$, для которой решение v_ε задачи (16), (17) предоставляет асимптотическое приближение повышенной точности к сужению u_ε^Ω решения u_ε на область Ω , и одновременно энергетический функционал

$$E(v_\varepsilon, g; \Omega(\varepsilon)) = \frac{1}{2}(\nabla_x v_\varepsilon, \nabla_x v_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} - (g, v_\varepsilon)_\Sigma = -\frac{1}{2}(g, v_\varepsilon)_\Sigma,$$

обслуживающий задачу (16), (17), служит “хорошим” приближением к функционалу (6).

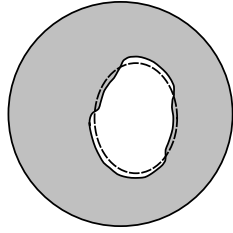


Рис. 3. Возмущение области с уступами.

Оказывается, что регулярное (профиль H гладкий) возмущение (19) контура Γ недостаточно для поставленных целей и приходится использовать кусочно сингулярное возмущение с “уступами” (ср. рис. 3 и см. далее п. 4).

Вопрос о моделировании краевой задачи (1)–(3) с контрастными жесткостными¹ свойствами возникает при численной реализации алгоритмов *оптимизации формы* (the shape optimization). Так, при допустимых вариациях жесткостных характеристик внутри области Ξ стандартные вычислительные схемы приводят зачастую к возникновению зоны ω , в которой назначены весьма малые коэффициенты дифференциальных операторов, что следует понимать как тенденцию к возникновению отверстия. Вместе с тем, внутри самой схемы сделать это невозможно, т.е. требуется применение иных процедур и, в частности, полная переподготовка данных. При этом полное удаление материала из подобласти ω может неблагоприятно сказаться на

¹Множители при лапласиане Δ_x в уравнениях (1) и (2) можно интерпретировать как жесткости скручиваемого композитного изотропного стержня с сечением $\Omega \cap \omega$ (см., например, [8]).

достигнутом значении *функционала формы* (the shape functional) – например, согласно асимптотическим формулам (14), (15) энергетический функционал (6) уменьшается на величину $O(\varepsilon)$ (таким образом, в силу формулы (14) нежелательное изменение функционала происходит при изучении вопроса об его максимизации). Поэтому обычно для образования отверстия применяют другой аппарат теории оптимизации форм, а именно, при помощи понятия *топологической производной*² [9, 23] отыскивают наиболее выгодное положение *малого* отверстия внутри подобласти ω , а затем увеличивают это отверстие, опираясь на классические алгоритмы, использующие *материальную производную* функционала (см., например, книги [9, 24]).

У описанного подхода есть очевидные изъяны. Во-первых, процессу увеличения отверстия и придания ему надлежащей формы требует значительных вычислительных затрат. Во-вторых, этот процесс приходится проводить внутри зоны малых жесткостей, что не способствует повышению точности вычислений. В-третьих, до сих пор не создано сколь-нибудь приемлемых процедур для оптимизации формы *малого* отверстия. Предлагаемый в настоящей статье метод асимптотического моделирования, имеющий свои недостатки, лишен первых двух из перечисленных выше изъянов. Именно, удастся сразу же перейти к вычислению и обработке материальных производных функционала в зоне жесткости единичного порядка. Третий изъян сохраняется – автору известна лишь одна публикация [25], в которой изучается возмущение области уступами, но ни о какой оптимизации формы в ней речи нет, и этот вопрос еще предстоит исследовать. К дополнительным недостаткам следует отнести уже упоминавшиеся уступы, однако их появление вызвано существом вопроса и без образования таких *сглаженных иррегулярностей* границы обойтись нельзя.

²Само понятие топологической производной введено в статье [9], однако асимптотические разложения решений краевых задач в областях с сингулярными возмущениями границы (малые и тонкие отверстия, сглаженные угловые точки и пр.) и основных функционалов, вычисленных на решениях, были получены гораздо ранее и в более общей постановке (см. работы [10–13], монографии [14–16] и др.). В значительной степени современный аппарат оптимизации форм использует уже известные результаты асимптотического анализа. Необходимые разъяснения по поводу *внутренних топологических производных* приведены в [17], однако в статьях [18, 19], посвященных *внешним топологическим производным*, нет ссылок на предшествующие публикации [20–22] и др. по асимптотикам в областях с тонкими перемычками, и связь упомянутых результатов все еще нуждается в описании.

3. Регулярное возмущение контура. Приведем краткое описание процедуры построения членов асимптотического анзаца

$$v_\varepsilon(x) = v(x) + \varepsilon \mathbf{v}(x) + \dots \quad (20)$$

для решения задачи (16), (17) в области $\Omega(\varepsilon)$ с регулярно возмущенной границей $\partial\Omega(\varepsilon) = \Sigma \cup \Gamma(\varepsilon)$, т.е. профиль H в определении (19) – гладкая функция на контуре Γ . Понятно, что в качестве главного асимптотического члена v следует взять решение задачи (9), и что поправочный член \mathbf{v} должен удовлетворять соотношениям

$$-\Delta_x \mathbf{v}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n \mathbf{v}(x) = 0, \quad x \in \Sigma. \quad (21)$$

Осталось найти краевое условие для \mathbf{v} на базовом контуре Γ . Подчеркнем, что в случае непустого множества $\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega$ (ср. рис. 2) требуется гладко продолжить функции v и \mathbf{v} с Ω на $\Omega \cup \mathcal{U} \supset \Omega(\varepsilon)$. Сохраним за продолжениями прежние обозначения и, кроме того, будем писать $v(n, s)$ и $\mathbf{v}(n, s)$ при использовании системы криволинейных координат в окрестности \mathcal{U} контура Γ .

Поскольку в координатах n, s градиент ∇_x имеет вид

$$(\partial_n, (1 + n\kappa(s))^{-1} \partial_s),$$

где $\partial_s = \partial/\partial s$ и $\kappa(s)$ – кривизна дуги Γ в точке s , справедлива формула

$$\partial_\nu = N(\varepsilon H(s), s)^{-1/2} (\partial_n - \varepsilon(1 + \varepsilon H(s)\kappa(s))^{-2} (\partial_s H(s)) \partial_s), \quad (22)$$

причем $N(n, s) = 1 + \varepsilon^2(1 + n\kappa(s))^{-1} |\partial_s H(s)|^2$ – нормирующий множитель. Отметим еще, что оператор Лапласа Δ_x в криволинейных координатах выглядит следующим образом:

$$\Delta_x = \frac{1}{(1 + n\kappa)} \left(\frac{\partial}{\partial n} (1 + n\kappa) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1 + n\kappa)} \frac{\partial}{\partial s} \right). \quad (23)$$

Для того чтобы краевое условие (2) было соблюдено в главном, величина

$$\left(\partial_n - \varepsilon(1 + \varepsilon n\kappa(s))^{-2} (\partial_s H(s)) \partial_s \right) \left(v(n, s) + \varepsilon \mathbf{v}(n, s) \right) \Big|_{n=\varepsilon H(s)} \quad (24)$$

должна приобрести порядок ε^2 при всех $s \in \Gamma$. Применим формулу Тейлора

$$\partial_n v(n, s) = \partial_n v(0, s) + n \partial_n^2 v(0, s) + O(n^2)$$

и обнаружим, что величина (24) равна сумме

$$\partial_n v(0, s) + \varepsilon \left(H(s) \partial_n^2 v(0, s) - (\partial_s H(s)) \partial_s v(0, s) + \partial_n \mathbf{v}(0, s) \right) + O(\varepsilon^2). \quad (25)$$

Первый член обращается в нуль благодаря краевому условию из задачи (9). Согласно формуле (23) и уравнению Лапласа из той же задачи получаем, что при $n = 0$

$$\partial_n^2 v(0, s) + \kappa(s) \partial_n v(0, s) + \partial_s^2 v(0, s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_n^2 v(0, s) = -\partial_s^2 v(0, s).$$

Таким образом, в формуле (25) исчезает и второй член, если только сформировано краевое условие

$$\partial_n \mathbf{v}(0, s) = \partial_s H(s) \partial_s v(0, s), \quad s \in \Gamma. \quad (26)$$

Подчеркнем, что в правой части (26) появился оператор второго порядка

$$\partial_s H(s) \partial_s v(0, s) = H(s)^2 \partial_s^2 v(0, s) + (\partial_s H(s)) \partial_s v(0, s), \quad (27)$$

аналогичный оператору из краевого условия Вентцеля (18), и дифференцирование в (27) производится вдоль контура Γ .

Итак, требуемое краевое условие (26) построено, а задача Неймана (21), (26) имеет решение \mathbf{v} , так как среднее выражения (27) по Γ равно нулю по очевидной причине.

Оправдание асимптотического разложения обеспечено выкладками, проведенными в п. 8 для значительно более сложного случая уступчатой профильной функции H_ε .

4. Наводящие соображения. Попробуем подобрать профильную функцию H в определении (19) так, чтобы решения v' и \mathbf{v} задач (11) и (21), (24) совпали. Если это удалось и, к тому же, асимптотические разложения (7) и (20) оказались обоснованными, разность $u_\varepsilon^\Omega(x) - v_\varepsilon(x)$ решений задач (1)–(3) и (16), (17) приобретет порядок ε^2 . Такое наблюдение – отправной момент в концепции [4] асимптотического моделирования. Равенство $v' = \mathbf{v}$ имеет место лишь при условии

$$\partial_s H(s) \partial_s v(0, s) = \partial_n V(s), \quad s \in \Gamma. \quad (28)$$

Интегрируя соотношение (28), находим, что

$$H(s)\partial_s v(0, s) = \mathbf{V}(s) + c, \quad s \in \Gamma; \quad (29)$$

здесь c – произвольная постоянная и \mathbf{V} – какая-нибудь первообразная функции $s \mapsto \partial_n V(0, s)$ (равенство (13) обеспечивает непрерывность и, следовательно, гладкость первообразной).

Если $\partial_s v(0, s) \neq 0$ при всех $s \in \Gamma$, то можно положить

$$H(s) = (\partial_s v(0, s))^{-1}(\mathbf{V}(s) + c), \quad s \in \Gamma, \quad (30)$$

и тем самым закончить моделирование задачи с контрастными жесткостями. К сожалению, производная гладкой функции на замкнутом контуре обращается в нуль по крайней мере в двух точках, в которых профильная функция (30) может приобрести сингулярности, лишаящие ее совершенно необходимых свойств для асимптотического моделирования. Последнее не происходит лишь тогда, когда слагаемое c в формуле (29) получилось подобрать так, что

$$\partial_s v(0, s^j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}(s^j) + c = 0.$$

Выполним это требование при помощи искусственного приема.

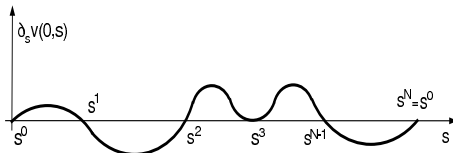


Рис. 4. Эскиз графика производной.

Предположим, что производная $\partial_s v(0, s)$ обращается в нуль на конечном наборе точек $s^0, s^1, \dots, s^{N-1}, s^N = s^0$, в которых

$$\partial_s v(0, s) = a_j(s - s^j) + O(|s - s^j|^2), \quad a_j \neq 0. \quad (31)$$

Отметим, что условие (31) гарантирует четность числа N (ср. рис. 4, на котором изображен прототип графика функции $\partial_s v$, – точка s^3 не удовлетворяет условию (31) и только поэтому $N = 5$). Изменим

способ (19) возмущения границы. Именно допустим в формуле (30) кусочно-постоянную функцию

$$\begin{aligned} c(s) &= \mathbf{V}(s_j), \quad s \in (s^{j-}, s^{j+}), \\ c(s) &= 0, \quad s \in (s^{j-1+}, s^{j-}), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{32}$$

а точки $s^{1\pm}, s^{2\pm}, \dots, s^{N-1\pm}, s^{N\pm}$ зафиксируем так, чтобы

$$s^{j-1+} < s^{j-} < s^j < s^{j+} < s^{j+1-}, \quad j = 1, \dots, N$$

(ср. рис. 5). Введем удобное обозначение t^1, \dots, t^{2N} для точек $s^{j\pm}$; при этом $t^j < t^{j+1}$. В соответствии с формулами (30) и (32) определим “уступчатую профильную” функцию H_0 равенствами

$$\begin{aligned} H_0(s) &= (\partial_s v(0, s))^{-1} (\mathbf{V}(s) - \mathbf{V}(s^j)), \quad s \in (s^{j-}, s^{j+}), \\ H_0(s) &= (\partial_s v(0, s))^{-1} \mathbf{V}(s), \quad s \in \Gamma \setminus \bigcup_{j=1}^N [s^{j-}, s^{j+}], \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{33}$$

Подчеркнем, что на множестве $\Gamma \setminus \bigcup [s^{j-}, s^{j+}]$ величина $\partial_s v(0, s)$ отделена от нуля, а величина $H_0(s)$ ограничена на (s^{j-}, s^{j+}) благодаря требованию (31).

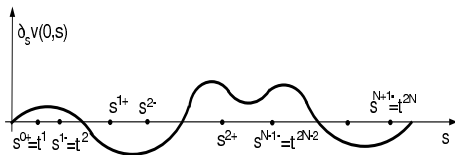


Рис. 5. Размещение дополнительных точек t^j .

Функция (33) оказалась кусочно гладкой с разрывами первого рода в точках t^1, \dots, t^{2N} . Сгладим разрывы в малых, размером $O(\varepsilon)$, окрестностях точек— это можно сделать многими способами, например, в окрестности \mathcal{U}^j точки t^j положим

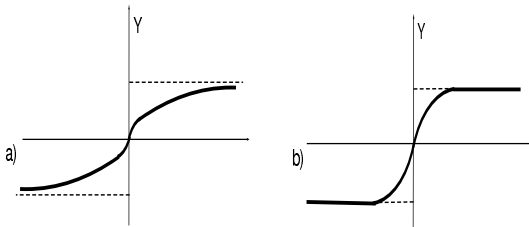


Рис. 6. Графики возможной и выбранной сглаживающих функций.

$$H_\varepsilon(s) = H_0(s)(1 - \chi_\Gamma(\varepsilon^{-1}(s - t^j)) + \chi_\Gamma(\varepsilon^{-1}(s - t^j))(\mathbf{H}_j^+ + \mathbf{H}_j^- Y(\varepsilon^{-1}(s - t^j))), \quad (34)$$

где χ_Γ — гладкая срезающая функция, причем $0 \leq \chi_\Gamma \leq 1$, $\chi_\Gamma(t) = 1$ при $|t| \leq 1$ и $\chi_\Gamma(t) = 0$ при $|t| \geq 2$,

$$\mathbf{H}_j^\pm = \frac{1}{2} \left(H_0(t^j + 0) \pm H_0(t^j - 0) \right), \quad (35)$$

а Y — какая-то гладкая монотонная функция на оси \mathbb{R} , подчиненная соотношениями

$$Y(\tau) = \pm 1 + O(\tau^{-2}), \quad \tau \rightarrow \pm\infty \quad (36)$$

(рис. 6, а). Можно, например, взять $Y(\tau) = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg} \tau$, но для простоты изложения усилим требование (36) и предположим, что

$$Y(\tau) = \pm 1 \quad \text{при} \quad \pm \tau \geq 1 \quad (37)$$

(рис. 6, б). Одна из таких функций определена равенством

$$Y(\tau) = \left(\int_{-1}^1 \exp(-(1-t^2)^{-1}) dt \right)^{-1} \int_{-1}^{\tau} \exp(-(1-t^2)^{-1}) dt, \quad \tau \in (-1, 1). \quad (38)$$

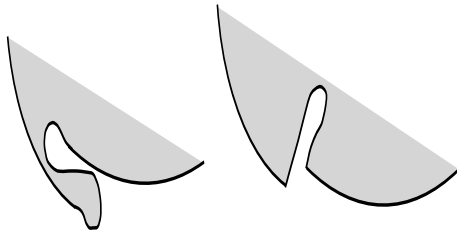


Рис. 7. Уступы усложненной формы.

В следующих разделах контур $\Gamma(\varepsilon)$, внутреннюю границу области $\Omega(\varepsilon)$ (рис. 3), зададим аналогичной (19) формулой

$$\Gamma(\varepsilon) = \{x \in \mathcal{U} : s \in \Gamma, n = \varepsilon H_\varepsilon(s)\}, \quad (39)$$

в которой вместо гладкой профильной функции H фигурирует функция, введенная формулами (33) и (34). Отметим, что в принципе допустимы более сложные формы уступов, например, изображенные на рис. 7. Все последующие результаты сохраняют силу, однако подобные экзотические формы вряд ли нужны.

5. Пограничный слой вблизи уступа. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [26, 16], а также [10, 27], [15, гл. 2] и др.). В окрестности $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}$ точки $t^j \in \Gamma$ сделаем замену координат

$$(n, s) \mapsto \xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j) = \varepsilon^{-1}(s - t^j, n) \quad (40)$$

и будем искать *внутреннее*, пригодное в непосредственной близости от точки t^j , разложение решения $u_\varepsilon(x)$ в виде

$$v_\varepsilon(x) \sim w_0^j(\xi) + \varepsilon w_1^j(\xi) + \dots \quad (41)$$

Это разложение нужно срастить с *внешним* разложением (20). Если предположить, что слагаемое \mathbf{v} гладкое в $\bar{\Omega}$, то в окрестности \mathcal{U}_j справедливо представление

$$\begin{aligned} v(x) + \varepsilon \mathbf{v}(x) &= v(0, t^j) + n \partial_n v(0, t^j) + (s - t^j) \partial_s v(0, t^j) + \dots \\ &+ \varepsilon (\mathbf{v}(0, t^j) + \dots) = v(0, t^j) + \varepsilon (\xi_1^j \partial_s v(0, t^j) + \mathbf{v}(0, t^j)) + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что следует положить

$$w_0^j(\xi) = v_0(0, t^j). \quad (43)$$

При замене (40) и последующем формальном подходе к $\varepsilon = 0$ множество $\Omega(\varepsilon) \cap \mathcal{U}_j$ трансформируется согласно определениям (34), (35) и (39) в часть полуплоскости Π^j с криволинейной границей (рис. 8)

$$\Pi^j = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 < \mathbf{H}_j^+ + \mathbf{H}_j^- Y(\xi_1)\}. \quad (44)$$

Кроме того, делая замену (40) в дифференциальном операторе (23), находим, что его главный асимптотической частью служит $\varepsilon^{-2} \Delta_{\xi^j}$, т.е.

$$\Delta_x = \partial_n^2 + \partial_s^2 + \mathcal{L}(x, \nabla_x) = \varepsilon^{-2} \Delta_{\xi^j} + \mathcal{L}(x, \nabla_x). \quad (45)$$

Точно так же главной асимптотической частью производной вдоль внешней нормали (22) к дуге $\Gamma(\varepsilon) \cap \mathcal{U}_j$ является дифференциальное выражение $\varepsilon^{-1} \partial_{\nu^j}$, где

$$\partial_{\nu^j} = (1 + (\mathbf{H}_j^- \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j))^2)^{-1/2} (-\mathbf{H}_j^- \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j) \partial_{\xi_1^j} + \partial_{\xi_2^j}). \quad (46)$$

Понятно, что (46) – производная вдоль внешней нормали к искривленной границе $\partial\Pi^j$ полуплоскости (44). Итак, в силу формул (45), (46) и (41), (42) слагаемое w_1^j внутреннего разложения является решением однородной задачи Неймана

$$-\Delta_{\xi^j} w_1^j(\xi^j) = 0 \quad \xi^j \in \Pi^j, \quad \partial_{\nu^j} w_1^j(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \partial\Pi^j, \quad (47)$$

и обладает таким поведением на бесконечности в соответствии с общей процедурой срачивания (см. [26, 16]):

$$w_1^j(\xi^j) = \xi_1^j \partial_s v(0, t^j) + o(|\xi^j|), \quad \xi^j \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Это решение следует искать в виде

$$w_1^j(\xi^j) = \xi_1^j \partial_s v(0, t^j) + \widehat{w}_1^j(\xi^j), \quad (49)$$

где \widehat{w}_1^j – решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi^j} \widehat{w}_1^j(\xi^j) &= 0, \quad \xi^j \in \Pi^j, \\ \partial_{\nu^j} \widehat{w}_1^j(\xi_1^j, \mathbf{H}_j^+ + \mathbf{H}_j^- Y(\xi_1^j)) & \\ = \mathbf{H}_j^- \partial_s v(0, t^j) (1 + (\mathbf{H}_j^- \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j))^2)^{-1/2} \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j), & \quad \xi_1^j \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (50)$$

Подчеркнем, что в силу формулы (46) и требования (37), означающего, что $\partial_\tau Y(\tau) = 0$ при $|\tau| > 1$, носитель правой части краевого условия в задаче (50) компактен. Поэтому и, в частности, согласно методу Фурье задача (50) имеет решение, допускающее представление

$$\widehat{w}_1^j(\xi^j) = c_1 \ln |\xi^j| + c_0 + O(|\xi^j|^{-1}), \quad \xi^j \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Постоянную c_0 , разумеется, можно зафиксировать произвольно. Вычислим постоянную c_1 .

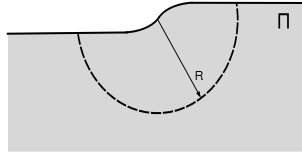


Рис. 8. Полушпоскость с искривленной границей.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$c_1 = -\frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j), \quad (52)$$

где $[H_0](t^j) = H^0(t^j + 0) - H_0(t^j - 0)$ – скачок функции H_0 в точке t^j .

Доказательство. Применяя формулу Остроградского–Гаусса в области $\Pi^j(R) = \{\xi^j \in \Pi^j : |\xi^j| < R\}$ с границей, составленной из дуг $(\partial\Pi^j)(R)$ и $\theta_R^j = \{\xi^j \in \Pi^j : |\xi^j| = R\}$ (см. рис. 8), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_j^- \partial_s v(0, t_j) \int_{-1}^1 (1 + (\mathbf{H}_j^- \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j))^2)^{-1/2} \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j) ds_{\xi^j} \\ = -c_1 \int_{\theta_R^j} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \rho ds_{\xi} + O(R^{-1}). \end{aligned} \quad (53)$$

Поскольку $ds_{\xi^j} = (1 + (\mathbf{H}_j^- \partial_{\xi_1^j} Y(\xi_1^j))^2)^{1/2} d\xi_1^j$ на $\partial\Pi^j$, при учете формул (35) и (37) обнаруживаем, что левая часть (53) равна

$$\mathbf{H}_j^- \partial_s v(0, t^j)(Y(1) - Y(-1)) = (H_0(t_j + 0) - H_0(t_j - 0))\partial_s v(0, t^j).$$

С другой стороны, длина дуги θ_R^j составляет $\pi R + O(1)$, т.е. формула (52) получается предельным переходом $R \rightarrow +\infty$. \square

Итак, в силу соотношений (41), (43) и (50), (51) находим

$$\begin{aligned} w_0^j(\xi^j) + \varepsilon w_1^j(\xi^j) &= v(0, t^j) + \varepsilon \left(\xi_1^j \partial_s v(0, t^j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j) \ln |\xi^j| + c_0 + O(|\xi^j|^{-1}) \right) \\ &= v(0, t^j) + (s - t^j)\partial_s v(0, t^j) \\ + \varepsilon \left(-\frac{1}{2\pi}[H_0](y^j)\partial_s v(0, t^j) \ln(n^2 + (s - t^j)^2) + C_0(\ln \varepsilon) \right) \\ &\quad + O(\varepsilon^2(n^2 + (s - t^j)^2)^{-1/2}). \end{aligned} \quad (54)$$

При этом постоянное слагаемое

$$C_0(\ln \varepsilon) = c_0 + \frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j) \ln \varepsilon \quad (55)$$

можно сделать любым за счет выбора c_0 . Производя сращивание внутреннего разложения (41) с внешним разложением (20), видим, что первые два слагаемых в правой части (54) суть члены формулы Тейлора для функции v вблизи точки $t^j \in \Gamma$, а третье предписывает следующее поведение функции \mathbf{v} в окрестности этой точки:

$$\mathbf{v}(x) = -\frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j) \ln|x - t^j| + O(1), \quad x \rightarrow t^j \in \Gamma. \quad (56)$$

Подчеркнем, что величина $(n^2 + (s - t^j)^2)^{1/2}$ и расстояние $|x - t^j|$ между точками $x = (n, s) \in \Omega \cap \mathcal{U}$ и $t^j \in \Gamma$ – эквивалентные бесконечно малые, а \mathbf{v} – решение краевой задачи (21), (26) с видоизмененным условием на контуре Γ

$$\partial_n \mathbf{v}(x) = \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s), \quad s \in \Gamma \setminus \{t^1, \dots, t^J\}. \quad (57)$$

Несмотря на то, что предположение об ограниченности функции \mathbf{v} , использованное в формуле (42), оказалось неверным, процедура сращивания внешнего разложения с внутренним по-прежнему приводит к соотношению (48) из-за медленного роста логарифмического слагаемого в (56).

6. Обобщенная функция Грина и асимптотика энергетического функционала. Несколько изменяя классическое определение [28] обобщенной функции Грина, введем функцию $x \mapsto G(x, t)$ с параметром $t \in \Gamma$ как решение следующей задачи в классе обобщенных функций:

$$\begin{aligned} -\Delta_x G(x, t) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad \partial_n G(x, t) = -|\Sigma|^{-1}, \quad x \in \Sigma, \\ \partial_n G(0, s, t) &= \delta(s - t), \quad s \in \Gamma, \quad \int_{\Sigma} G(x, t) ds_x = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $|\Sigma|$ – длина дуги Σ и δ – функция Дирака. Последнее условие ортогональности в (58) однозначно фиксирует функцию Грина. Она является гладкой в $\bar{\Omega} \setminus t$, а в окрестности точки $t \in \Gamma$ представима в виде

$$G(x, t) = -\frac{1}{\pi} \ln|x - t| + G^0(t, t) + O(|x - t|(1 + |\ln|x - t||)), \quad x \rightarrow t. \quad (59)$$

Сравнивая формулы (59) и (56), видим, что второй член $\mathbf{v}(x)$ внешнего разложения (20), служащий решением задачи (20), (57), (56), логично искать в виде суммы

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}^0(x) + \sum_{j=1}^{2N} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) G(x, t^j). \quad (60)$$

При этом \mathbf{v}^0 – ограниченное решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_x \mathbf{v}^0(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \partial_n \mathbf{v}^0(x) &= -\frac{1}{|\Sigma|} \sum_{j=1}^{2N} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j), \quad x \in \Sigma, \end{aligned} \quad (61)$$

с краевым условием Неймана (57), в котором согласно определению (33) правая часть является кусочно гладкой функцией и имеет скачки первого рода в точках t^1, \dots, t^{2N} . Вместе с тем, данные Неймана на $\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma$ попадают в $L_2(\partial\Omega)$ и благодаря понятной формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s) ds &= \sum_{j=1}^N \int_{s^{j-}}^{s^{j+}} \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s) ds \\ &= \sum_{j=1}^{2N} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \end{aligned}$$

обладают нулевым средним на $\partial\Omega$. Следовательно, задача (61), (57) имеет (обобщенное) решение $\mathbf{v}^0 \in H^1(\Omega)$ (см. учебник [1]).

Замечание 2. Сумма (58) принадлежит пространству Лебега $L_2(\Omega)$, но не попадает в пространство Соболева $H^1(\Omega)$ из-за логарифмических особенностей обобщенной функции Грина. Этот факт не препятствует обоснованию асимптотики в п. 8, а для вычисления энергетического функционала включение $\mathbf{v} \in L_2(\Sigma)$ достаточно. \square

Теорема о локальном повышении гладкости решений эллиптических краевых задач в областях с гладкими границами (см., например, [2]) устанавливает, что \mathbf{v}^0 – гладкая функция всюду в $\bar{\Omega}$, за исключением точек t^1, \dots, t^{2n} . Свойства решения \mathbf{v}^0 вблизи этих точек можно

исследовать при помощи теории эллиптических краевых задач в областях с коническими и угловыми особенностями границ (см. ключевые работы [29–31] и, например, монографию [32]), интерпретируя t^j как вершины углов с раствором π . Не останавливаясь на подробностях, укажем вытекающие из названной теории оценки

$$|\nabla_x^k \mathbf{v}^0(x)| \leq c_k |x - t^j|^{1-k} (1 + |\ln |x - t^j||),$$

$$x \in \Omega \cap \mathcal{U}_j, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (62)$$

где $\nabla_x^k \mathbf{v}^0$ – совокупность всех производных функции \mathbf{v}^0 порядка k . Отметим, что символ $O(|x - t|(1 + |\ln |x - t||))$ в соотношении (59) следует понимать именно в смысле формулы (62).

Для вычисления асимптотики энергетического функционала $E(v_\varepsilon, g; \Omega(\varepsilon))$ понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\int_{\Sigma} g(x) \mathbf{v}(x) ds_x = - \int_{\Gamma} H_0(s) |\partial_s v(0, s)|^2 ds. \quad (63)$$

Доказательство. Применим метод [30] и подставим функции v и \mathbf{v} в формулу Грина на области

$$\Omega_\delta^\bullet = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2N} \overline{\mathbb{B}_\delta(t^j)},$$

где $\mathbb{B}_\delta(t^j) = \{x : |x - t^j| < \delta\}$ – круг с центром $t^j \in \Gamma$ и радиусом $\delta > 0$. В силу краевых условий (9) и (21) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} g(x) \mathbf{v}(x) ds_x &= \int_{\Sigma} (\mathbf{v}(x) \partial_n v(x) - v(x) \partial_n \mathbf{v}(x)) ds_x \\ &= - \int_{\Gamma \cap \overline{\Omega_\delta^\bullet}} (\mathbf{v}(x) \partial_n v(x) - v(x) \partial_n \mathbf{v}(x)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2N} \int_{\partial \mathbb{B}_\delta(t^j) \cap \Omega} \left(\mathbf{v}(x) \frac{\partial v}{\partial r_j}(x) - v(x) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r_j}(x) \right) ds_x. \end{aligned}$$

Отметим, что производная по радиусу $r_j = |x - t^j|$ оказывается производной вдоль *внутренней* относительно Ω_δ^\bullet нормали на дуге $\partial\mathbb{B}_\delta(t^j) \cap \Omega$ окружности длиной $\pi\delta + O(\delta^2)$ (если граница Γ прямая вблизи точки t^j , то $\partial\mathbb{B}_\delta(t^j) \cap \Omega$ – полуокружность радиусом δ). Поэтому интегралы $I_j(\delta)$ в сумме по $j = 1, \dots, J$ вычисляются при помощи формул (56), (60) и (59), (62). Именно, заменяя функцию \mathbf{v} ее главным асимптотическим членом и учитывая, что $|\nabla_x v(x)| \leq \text{const}$, находим, что

$$I_j(\delta) = -\frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j)\delta \int_0^\pi \left(\ln r_j \frac{\partial v}{\partial r_j}(n, s) - v(n, s) \frac{1}{r_j} \right) \Big|_{r_j=\delta} d\varphi$$

$$+ O(\delta(1 + |\ln \delta|)) = [H_0](t^j)v(0, t^j)\partial_s v(0, t^j) + O(\delta(1 + |\ln \delta|)).$$

Принимая во внимание краевые условия для функций v и \mathbf{v} на контуре Γ , получаем, что предел при $\delta \rightarrow +0$ интеграла (со знаком минус) по $\Gamma \cap \overline{\Omega_\delta^\bullet}$ равен

$$\int_\Gamma v(0, s)\partial_s H_0(s)\partial_s v(0, s) ds = - \int_\Gamma H_0(s)|\partial_s v(0, s)|^2 ds$$

$$- \sum_{j=1}^{2N} v(0, t^j)[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j).$$

Искомая формула (63) выводится из указанных формул предельным переходом $\delta \rightarrow +0$. □

7. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса и обоснование асимптотики решения задачи с контрастными свойствами. Оценки асимптотических остатков будут получены при помощи различных вариантов неравенств Пуанкаре и Фридрихса. Далее под $H_\perp^1(\Omega)$ подразумеваем подпространство функций из соболевского класса $H^1(\Omega)$, подчиненных условию ортогональности (5).

Лемма 4. *Если $u \in H_\perp^1(\Xi)$, то верны оценки*

$$\|u^\Omega; L_2(\Omega)\|^2 + \|u^\Omega; L_2(\partial\Omega)\|^2 \leq c_\Omega \|\nabla_x u^\Omega; L_2(\Omega)\|^2, \quad (64)$$

$$\varepsilon \|u^\omega; L_2(\Omega)\|^2 \leq c_\Xi (\varepsilon \|\nabla_x u^\omega; L_2(\omega)\|^2 + \|\nabla_x u^\Omega; L_2(\Omega)\|^2), \quad (65)$$

причем множители c_Ω и c_Ξ не зависят от функции u и параметра $\varepsilon \leq 1$.

Доказательство. Оба соотношения вытекает из известного неравенства (см., например, [1])

$$\|u; L_2(\Theta)\|^2 \leq c \left(\|\nabla_x u; L_2(\Theta)\|^2 + \left| \int_\theta u(x) ds_x \right|^2 \right), \quad (66)$$

где Θ – ограниченная область на плоскости \mathbb{R}^2 , а θ – непустая открытая дуга на ее липшицевой границе $\partial\Theta$. Для вывода оценки (64) достаточно положить $\Theta = \Omega$, $\theta = \Sigma$, а для оценки второго слагаемого слева применить следовое неравенство [1]

$$\|u^\Omega; L_2(\partial\Omega)\| \leq c_{\partial\Omega} \|u^\Omega; H^1(\Omega)\|. \quad (67)$$

При проверке оценки (65) нужно дополнительно воспользоваться формулой (66) с $\Theta = \omega$ и $\theta = \Gamma$. \square

Лемма 5. Функция $u \in H^1_\perp(\Omega(\varepsilon))$ в области $\Omega(\varepsilon)$, ограниченной контурами Σ и $\Gamma(\varepsilon)$ (см. формулу (39)), удовлетворяет оценкам

$$\|u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|u; L_2(\partial\Omega(\varepsilon))\|^2 \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2, \quad (68)$$

$$\|u; L_2(\gamma(\varepsilon))\|^2 \leq c\varepsilon \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2, \quad (69)$$

где $\gamma(\varepsilon) = \{x \in \mathcal{U} : s \in \Gamma, \varepsilon H_\varepsilon(s) > n > -\gamma_0\varepsilon\}$ – тонкая пограничная полоска, а γ_0 – некоторое положительное число. В обеих оценках множители c не зависят ни от функции u , ни от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем величину $\tilde{\gamma} > 0$ так, чтобы линия уровня $\{x : n = -\tilde{\gamma}\}$ лежала внутри окрестности \mathcal{U} . Тогда найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ область $\tilde{\Omega} = (\Omega \setminus \mathcal{U}) \cup \tilde{\mathcal{U}}$, где $\tilde{\mathcal{U}} = \{x \in \mathcal{U} : n > -\tilde{\gamma}\}$, содержится в $\Omega(\varepsilon)$. Неравенство (66) с $\Theta = \tilde{\Omega}$, $\theta = \Gamma$ вместе со следовым неравенством (67) после замены $\Omega \mapsto \tilde{\Omega}$ показывают, что

$$\begin{aligned} \|u; L_2(\tilde{\Gamma})\|^2 + \|u; L_2(\tilde{\Omega})\|^2 &\leq \tilde{c} \|\nabla_x u; L_2(\tilde{\Omega})\|^2 \\ &\leq \tilde{c} \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2, \end{aligned} \quad (70)$$

где $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega} \setminus \Sigma = \{x \in \mathcal{U} : n = -\tilde{\gamma}\}$. Уменьшив при необходимости величины $\tilde{\gamma}$ и ε_0 , считаем, что $2 \geq |1 - n\kappa(s)| \geq 1/2$ при $x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \tilde{\Omega}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Поскольку якобиан ограничен и отделен от нуля, справедливы соотношения

$$\|u; L_2(\tilde{\Gamma})\|^2 \geq c \int_{\tilde{\Gamma}} |u(-\gamma_0, s)|^2 ds,$$

$$\|u; L_2(\Omega(\varepsilon) \setminus \tilde{\Omega})\|^2 \leq C \int_{\Gamma} \int_{-\gamma_0}^{\varepsilon H_\varepsilon(s)} |u(n, s)|^2 dnds, \quad (71)$$

$$\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon) \setminus \tilde{\Omega})\|^2 \geq c \int_{\Gamma} \int_{-\gamma_0}^{\varepsilon H_\varepsilon(s)} (|\partial_n u(n, s)|^2 + |\partial_s u(n, s)|^2) dnds$$

с положительными постоянными c и C . По формуле Ньютона–Лейбница

$$u(n, s) = \int_{-\tilde{\gamma}}^n \partial_n u(\nu, s) d\nu + u(-\tilde{\gamma}, s) \quad (72)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{-\tilde{\gamma}}^{\varepsilon H_\varepsilon(s)} |u(n, s)|^2 dnds \\ & \leq c \left(\int_{\Gamma} \int_{-\tilde{\gamma}}^{\varepsilon H_\varepsilon(s)} |\partial_n u(n, s)|^2 dnds + \int_{\Gamma} |u(-\tilde{\gamma}, s)|^2 ds \right). \end{aligned}$$

В силу соотношений (71) и (70) оценка (68) установлена.

Пусть теперь число $\gamma_0 > 0$ таково, что $H_\varepsilon(s) > -\gamma_0$ при $s \in \Gamma$. Формулы (71) и (72) выдерживают замену $\tilde{\gamma} \mapsto \varepsilon\gamma_0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon\gamma_0}^{\varepsilon H_{\varepsilon}(s)} |u(n, s)|^2 dnds \\
& \leq 2 \int_{\Gamma} \left(\int_{-\varepsilon\gamma_0}^{\varepsilon H_{\varepsilon}(s)} \left(\int_{-\varepsilon\gamma_0}^n \partial_n u(\nu, s) d\nu \right)^2 dn + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon H_{\varepsilon}(s)} dn |u(-\varepsilon\gamma_0, s)|^2 \right) ds \\
& \leq 2\varepsilon \max_{s \in \Gamma} (\gamma_0 + |H_{\varepsilon}(s)|) \left(\int_{\Gamma} \int_{-\varepsilon\gamma_0}^{\varepsilon H_{\varepsilon}(s)} |\partial_n u(n, s)|^2 dnds + \int_{\Gamma} |u(-\varepsilon\gamma_0, s)|^2 ds \right).
\end{aligned}$$

Подчеркнем, что $|H_{\varepsilon}(s)| < c_H$ согласно определению (33)–(38) ступенчатой профильной функции. Для вывода оценки (69) осталось заметить, что по прежним причинам

$$\int_{\Gamma} |u(-\varepsilon\gamma_0, s)|^2 ds \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2. \quad \square$$

Далее понадобится весовое неравенство, формулируемое в очередной лемме. Его доказательство можно найти в [15], и поэтому ограничимся краткими комментариями к одному из способов его проверки.

Лемма 6. Для функции $u \in H^1(\Omega(\varepsilon))$ выполнено соотношение

$$\|(\varepsilon + r_j)^{-1} (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1} u; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c \|u; H^1(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (73)$$

в котором $r_j = |x - t^j|$, $j = 1, \dots, 2N$, а множитель c не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и u .

Доказательство. В области Ω , не зависящей от параметра ε , справедлива весовая оценка

$$\|r_j^{-1} (1 + |\ln r_j|)^{-1} u; L_2(\Omega)\| \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|, \quad u \in H_{\perp}^1(\Omega),$$

вытекающая из одномерного неравенства Харди с логарифмом

$$\int_0^1 r^{-1} |\ln r|^{-2} |U(r)|^2 dr \leq 4 \int_0^1 r \left| \frac{dU}{dr}(r) \right|^2 dr, \quad U \in C_c^1[0, 1]. \quad (74)$$

Действительно, нужно умножить u на подходящую срезку, перейти к системе координат (ρ_j, φ_j) (“полярной” для криволинейных координат $n = \rho_j \sin \varphi_j$ и $s - t^j = \rho_j \cos \varphi_j$) и применить неравенство (74) относительно “радиальной” переменной ρ_j , проинтегрированное дополнительно по “угловой” переменной φ_j . Подмена непрерывно дифференцируемых функций функциями из соболевского класса производится по замыканию оценки.

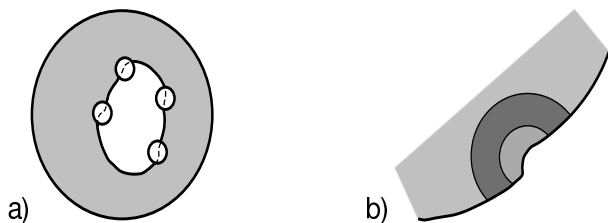


Рис. 9. Пояснение к применению формулы Грина.

Неравенство (74) сохраняется для функции $V \in C_c^1[h, 1]$ при замене нижнего предела интегрирования $0 \mapsto h \in (0, 1)$. Поэтому прежние рассуждения годятся для проверки соотношения

$$\left\| r_j^{-1} (1 + |\ln r_j|)^{-1} u; L_2 \left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2N} \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j) \right) \right\| \leq c \left\| \nabla_x u; H^1 \left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{2N} \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j) \right) \right\|. \quad (75)$$

Удаление из области Ω кругов $\mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j) = \{x : |x - t^j| < R\varepsilon\}$ с малыми радиусами $R\varepsilon > 0$ позволяет без изменения аргументации перенести соотношение (75) на область $\Omega(\varepsilon) \setminus \bigcup \mathbb{B}_{R(\varepsilon)}(t^j)$ с вырезанными уступами (рис. 9, а). Наконец, распространение модифицированной оценки на малые множества $\Omega(\varepsilon) \cap \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)$ (см. рис. 9, б) производится при помощи формулы

$$\varepsilon^{-2} \|u; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j))\|^2 \leq c (\|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathbb{B}_{2R\varepsilon}(t^j))\|^2 + \varepsilon^{-2} \|u; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathbb{B}_{2R\varepsilon}(t^j))\|^2). \quad (76)$$

Для вывода этой формулы нужно растянуть координаты $x \mapsto \varepsilon^{-1}(x - t^j)$ и применить стандартное неравенство типа Пуанкаре. Поскольку

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2}(1 + |\ln \varepsilon|^{-2}) \|u; L_2((\Omega(\varepsilon) \setminus \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)) \cap \mathbb{B}_{2R\varepsilon}(t^j))\|^2 \\ & \leq c_R \|r_j^{-1}(1 + |\ln r_j|)^{-1} u; L_2((\Omega(\varepsilon) \setminus \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)) \cap \mathbb{B}_{2R\varepsilon}(t^j))\|^2, \end{aligned} \quad (77)$$

после умножения на $(1 + |\ln \varepsilon|)^{-2}$ левая часть (76) мажорирует квадрат нормы

$$\|(\varepsilon + r_j)^{-1}(1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1} u; L_2(\Omega(\varepsilon) \cap \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j))\|,$$

а правая не превосходит $c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2$ в силу оценки (75), написанной для области $\Omega(\varepsilon) \setminus \bigcup \mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)$. Таким образом, заканчиваем проверку искомого неравенства (73), причем применение формулы (77) поясняет появление весового множителя $(\varepsilon + r_j)^{-1}(1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1}$. Подчеркнем еще раз, что общая процедура вывода аналогичных и более сложных весовых неравенств разработана в книге [15]. \square

Следствие 7. Для следа функции $u \in H^1_{\perp}(\Omega(\varepsilon))$ на контуре $\Gamma(\varepsilon)$ верна весовая оценка

$$\|(\varepsilon + r_j)^{-1/2}(1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1/2} u; L_2(\Gamma(\varepsilon))\| \leq c \|\nabla_x u; L_2(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (78)$$

в которой обозначения аналогичны использованным в (73).

Доказательство. Весовое следовое неравенство (78) выводится из установленного неравенства (73) по стандартной схеме (см. [1] и, например, [15] для кусочно гладких границ). \square

Обоснование построенной в п. 1 асимптотики решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1)–(3) примитивно – приведем краткие комментарии.

Теорема 8. Справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon^\Omega - v - \varepsilon v'; H^1_2(\Omega)\| + \varepsilon^{1/2} \|u_\varepsilon^\omega - V - \varepsilon V'; H^1(\omega)\| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|, \quad (79)$$

в которой v, V и v', V' – решения задач (9)–(12), а множитель c не зависит ни от параметра $\varepsilon \in (0, 1]$, ни от правой части g краевых условий Неймана на внешнем контуре Σ .

Доказательство. В силу локальных оценок решений эллиптических краевых задач (см. [2] и др.) обобщенное решение $v \in H^1(\Omega)$ задачи

(9) обладает повышенной гладкостью вне любой окрестности контура Σ , в частности, на множестве $\Omega \cap \mathcal{U}$, а значит, гладкость сначала передается решению V задачи (10), а затем и решениям задач (11) и (12). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \|v; H^1(\Omega)\| + \|v; H^2(\Omega \cap \mathcal{U})\| + \|V; H^2(\omega)\| \\ & + \|v'; H^2(\Omega)\| + \|V'; H^2(\omega)\| \leq c\|g; L_2(\Sigma)\|. \end{aligned} \quad (80)$$

Положим $\mathcal{R}_\varepsilon = \{\mathcal{R}_\varepsilon^\Omega, \mathcal{R}_\varepsilon^\omega\}$,

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\Omega = u_\varepsilon^\Omega - v - \varepsilon v', \quad \mathcal{R}_\varepsilon^\omega = u_\varepsilon^\omega - V - \varepsilon V',$$

причем каждую из функций u_ε и v, v' подчиним условиям ортогональности (5) (это можно сделать, так как решение задачи Неймана определено с точностью до постоянного слагаемого). Благодаря краевым условиям в (10), (12) и условиям сопряжения (3) функция \mathcal{R}_ε принадлежит подпространству $H_{\perp}^1(\Xi)$ и может быть взята в качестве пробной функции в интегральном тождестве (4). Кроме того, согласно формулам (9)–(12) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (-\Delta_x(v + \varepsilon v'), \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega)_\Omega + \varepsilon(-\Delta_x(V + \varepsilon V'), \mathcal{R}_\varepsilon^\omega)_\omega \\ &= (\nabla_x(v + \varepsilon v'), \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega)_\Omega + \varepsilon(\nabla_x(V + \varepsilon V'), \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\omega)_\omega \\ &\quad - (g, \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega)_\Sigma - (\partial_n v + \varepsilon \partial_n v', \mathcal{R}_\varepsilon)_\Gamma + \varepsilon(\partial_n V + \varepsilon \partial_n V', \mathcal{R}_\varepsilon)_\Gamma \\ &= (\nabla_x(u_\varepsilon^\Omega - \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega), \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega)_\Omega + \varepsilon(\nabla_x(u_\varepsilon^\omega - \mathcal{R}_\varepsilon^\omega), \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\omega)_\omega \\ &\quad - (g, \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega)_\Sigma + \varepsilon^2(\partial_n V', \mathcal{R}_\varepsilon)_\Gamma. \end{aligned}$$

Вычитая из равенства (4) с $v_\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon$ последнее равенство, при учете соотношений (64) и (80) получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\Omega; L_2(\Omega)\|^2 + \varepsilon \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\omega; L_2(\omega)\|^2 = \varepsilon^2 (\partial_n V', \mathcal{R}_\varepsilon)_\Gamma \\ & \leq \varepsilon^2 \|\partial_n V'; L_2(\Gamma)\| \|\mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Gamma)\| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\| \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает нужная оценка (79). \square

Следствие 9. Для энергетического функционала (1.6) верна формула

$$\left| E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) + \frac{1}{2}(g, v)_\Sigma + \frac{\varepsilon}{2}(v, \partial_n V)_\Gamma \right| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|^2, \quad (81)$$

где множитель c не зависит от $\varepsilon \in (0, 1]$ и $g \in L_2(\Sigma)$, а v и V – решения задач (9) и (10) соответственно.

Доказательство. Остаток в асимптотическом разложении (14) равен $-\frac{1}{2}(g, \mathcal{R}_\varepsilon)_\Sigma$ и его модуль не превосходит величины $c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|^2$ в силу оценки (79) и следового неравенства (оценка второго слагаемого в левой части (64)). \square

8. Обоснование асимптотики решения задачи в области с уступами. Построим глобальное асимптотическое приближение к решению задачи (16), (17) на основе найденных внешнего (20) и внутренних (41) разложений. С этой целью воспользуемся конструкцией [33] (см. также книгу [15, гл. 2] и статью [27]), использующей срезающие функции с перекрывающимися носителями. Под X_ε понимаем гладкую функцию, равную единице в $\Omega \setminus \mathcal{U}$ и определенную в окрестности \mathcal{U} следующим образом:

$$X_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^{2N} \chi(\varepsilon^{-1}n, \varepsilon^{-1}(s - t^j)).$$

Здесь $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ – функция с малым носителем, причем ее выбор согласован со срезкой χ_Γ в формуле (34), а именно,

$$\chi(0, t)\chi_\Gamma(t) = \chi_\Gamma(t).$$

Кроме того, $\chi_j \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, $\chi_j = 1$ в окрестности точки t^j и $\chi_j\chi_k = 0$ при $j \neq k$. Положим

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(x) &= X_\varepsilon(x) \left(v(x) + \varepsilon \mathbf{v}(x) + \sum_{j=1}^{2N} \chi_j(x) (w_0^j + \varepsilon w_1^j(\varepsilon^{-1} - t^j), \varepsilon^{-1}n) + \varepsilon c^j(\ln \varepsilon) \right) \\ &- X_\varepsilon(x) \sum_{j=1}^{2N} \chi_j(x) \left(v(0, t^j) + (s - t^j) \partial_s v(0, t^j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon}{\pi} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \ln |x - t^j| + \varepsilon \mathbf{v}_0^j \right). \quad (82) \end{aligned}$$

Формула (82) нуждается в пояснениях.

Прежде всего, решение v задачи (9) гладко продолжено за контур Γ ввне области Ω и, таким образом, определено в области $\Omega(\varepsilon)$ (ср. рис. 3), а значит,

$$|\Delta_x v(x)| \leq cn \leq C\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \Omega. \quad (83)$$

Аналогичное продолжение решения \mathbf{v} задачи (21), (57), (56) является гладким вне точек t^1, \dots, t^{2N} , вблизи которых произведено при учете представления (56), а именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) &= -\frac{1}{\pi}[H_0](t^j)\partial_s v(0, t^j) \ln|x - t^j| + \mathbf{v}_0^j + \tilde{\mathbf{v}}^j(x), \\ |\nabla_x^k \tilde{\mathbf{v}}^j(x)| &\leq c_k |x - t^j|^{-k} (1 + |\ln|x - t^j||), \\ &x \in \mathcal{U}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (84)$$

Подчеркнем, что формулами (84) определено постоянное слагаемое \mathbf{v}_0^j в выражении (82). Таким образом, множителями $S_\varepsilon^j(x)$ при срезках $\chi_j(x)$ в последней сумме из (82) служат те составляющие представлений около точек t^j членов внешнего разложения (20), которые подверглись сращиванию в предыдущих разделах. Обратим внимание на то, что в силу формулы (84) для указанного продолжения \mathbf{v} верна оценка

$$|\Delta_x \mathbf{v}(x)| \leq cn \sum_{j=1}^{2N} |x - t^j|^{-1} (1 + |\ln|x - t^j||) \quad \text{при } x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \Omega. \quad (85)$$

Обсудим теперь члены внутренних разложений, фигурирующие в первой сумме по $j = 1, \dots, 2N$ из (82). Первый член w_0^j – постоянная (см. равенство (43)), а второй – решение задачи (47) с линейным ростом на бесконечности. Благодаря определениям (34), (39) и (44) границ областей $\Omega(\varepsilon)$ и Π^j функция $x \mapsto w_1^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n)$ определена на множестве $\{x \in \mathcal{U} : |s - t^j| \leq \varepsilon\}$ и, таким образом, согласно (40) нуждается в продолжении за пределы “искривленной полуплоскости” разве лишь при $|\xi_1^j| \geq 1$. Это продолжение можно сделать при учете представлений (49) и (51), (52), обнаружив, что

$$\begin{aligned} w_1^j(\xi^j) &= \partial_s v(0, t^j) \left(\xi_1^j - \frac{1}{\pi}[H_0](t^j) \ln|\xi^j| \right) + \tilde{w}_1^j(\xi^j), \\ |\nabla_{\xi^j}^k \tilde{w}_1^j(\xi^j)| &\leq c_k |\xi^j|^{-1-k}, \quad |\xi^j| > 1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (86)$$

При этом было зафиксировано постоянное слагаемое $c_0 = 0$ в представлении (51). С другой стороны, еще раз используя произвол в выборе решения задачи Неймана (47) (ср. формулу (55)), положим

$$c^j(\ln \varepsilon) = \mathbf{v}_0^j - \frac{1}{\pi} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \ln \varepsilon \quad (87)$$

с целью обеспечить полное сращивание двух членов внутреннего и внешнего разложений. Иными словами, благодаря определению (87) главные члены асимптотики при $|\xi^j| \rightarrow \infty$ суммы $w_0^j + \varepsilon w_1^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n)$ совпадают с выражением

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^j(x) &= v(0, t^j) + (s - t^j) \partial_s v(0, t^j) - \frac{\varepsilon}{\pi} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \ln |x - t^j| + \varepsilon \mathbf{v}_0^j \\ &= v(0, t^j) + \varepsilon \left(\xi_1^j \partial_s v(0, t^j) - \frac{1}{\pi} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \ln(\varepsilon |\xi^j|) \right) + \varepsilon \mathbf{v}_0^j + \dots \end{aligned}$$

В последней выкладке применены формулы (40) и (43), а также соотношение

$$(n^2 + (s - t^j)^2)^{1/2} = |x - t^j| (1 + O(|x - t^j|)).$$

Теперь вычислим и оценим невязки, оставленные глобальным асимптотическим приближением V_ε в уравнении Лапласа на области $\Omega(\varepsilon)$ и в условии Неймана на $\Gamma(\varepsilon)$. Подчеркнем, что по построению $\partial_n V_\varepsilon = g$ на внешнем контуре Σ . Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_x V_\varepsilon &= X_\varepsilon \Delta_x (v + \varepsilon \mathbf{v}) + [\Delta_x, X_\varepsilon] (v + \varepsilon \mathbf{v}) \\ &+ \sum_{j=1}^{2N} (\chi_j \Delta_x w_1^j + [\Delta_x, \chi_j] (w_0^j + \varepsilon w_1^j + \varepsilon c^j(\ln \varepsilon))) \\ &- \sum_{j=1}^{2N} (X_\varepsilon \chi_j \Delta_x S_\varepsilon^j + [\Delta_x, X_\varepsilon \chi_j] S_\varepsilon^j). \end{aligned} \quad (88)$$

Здесь $[\Delta_x, \chi_j]$ – коммутатор оператора Лапласа и оператора умножения на функцию χ_j , т.е. следующий дифференциальный оператор первого порядка:

$$[\Delta_x, \chi_j] u(x) = 2 \nabla_x \chi_j(x) \cdot \nabla_x u(x) + u(x) \Delta_x \chi_j(x). \quad (89)$$

По определению срезки X_ε носители коэффициентов коммутатора $[\Delta_x, X_\varepsilon]$ расположены в объединении $c\varepsilon$ -окрестностей точек t^1, \dots, t^{2N} , т.е. можно написать представление

$$[\Delta_x, X_\varepsilon] = \sum_{j=1}^{2N} [\Delta_x, X_\varepsilon^j],$$

которое интерпретировать несложно.

Основная идея [4] (см. также [15, гл. 2], [27] и др.) процедуры “склеивания” внутреннего и внешних разложений при помощи срезающих функций с перекрестывающимися носителями состоит в следующей перегруппировке слагаемых в выражении (88):

$$\begin{aligned} \Delta_x V_\varepsilon &= X_\varepsilon \Delta_x (v + \varepsilon \mathbf{v}) + \sum_{j=1}^{2N} \chi_j (\varepsilon \Delta_x w_1^j - X_\varepsilon \Delta_x S_\varepsilon^j) \\ &+ \sum_{j=1}^{2N} [\Delta_x, X_\varepsilon^j] (v + \varepsilon \mathbf{v} - S_\varepsilon^j) \\ &+ \sum_{j=1}^{2N} [\Delta_x, \chi_j] (w_0^j + \varepsilon w_1^j + \varepsilon c^j (\ln \varepsilon) - S_\varepsilon^j). \end{aligned} \quad (90)$$

Обращаем внимание на важное обстоятельство: благодаря процедуре сращивания все разности в последних двух суммах оказываются малыми при $|x - t^j| \leq c\varepsilon$ и $|\xi^j| \geq C\varepsilon^{-1}$, т.е. как раз в зонах, где расположены носители коэффициентов коммутаторов $[\Delta_x, X_\varepsilon^j]$ и $[\Delta_x, \chi^j]$ соответственно. Аналогичную запись допускает и след производной $\partial_n V_\varepsilon$ на контуре $\Gamma(\varepsilon)$.

Как и в предыдущем разделе, вычтем из интегрального тождества

$$(\nabla_x v_\varepsilon, \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} = (g, \mathcal{R}_\varepsilon)_\Sigma,$$

обслуживающего задачу (16), (17), равенство

$$(\nabla_x V_\varepsilon, \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} = (-\Delta_x V_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} + (\partial_n V_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon)_{\partial\Omega(\varepsilon)},$$

представляющее собой формулу Грина, и получим для разности $\mathcal{R}_\varepsilon = v_\varepsilon - V_\varepsilon$ соотношение

$$(\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon, \nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} = (\Delta_x V_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}. \quad (91)$$

Поскольку решения v_ε и v, \mathbf{v} задач Неймана, а значит, и функцию (82) можно подчинить условию ортогональности (5), лемма 5 показывает, что левая часть (91) мажорирует величину

$$c(\|\mathcal{R}_\varepsilon; H^1(\Omega(\varepsilon))\|^2 + \|\mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Gamma(\varepsilon))\|^2)$$

с положительной постоянной c . В результате остается обработать правую часть

Обозначим I^0 и I_j^1, I_j^2, I_j^3 выражения, появляющиеся при подстановке суммы (90) в первое скалярное произведение слева в (91). В силу оценок (83), (85) и (69) имеем

$$\begin{aligned} |I^0| &= |(X_\varepsilon \Delta_x (v + \varepsilon \mathbf{v}), \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}| = |(X_\varepsilon \Delta_x (v + \varepsilon \mathbf{v}), \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega}| \\ &\leq c \left(\int_{\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega} n^2 (1 + X_\varepsilon(x) \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{2N} |x - t^j|^2 (1 + |\ln |x - t^j||)^2) dx \right)^{1/2} \|\mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon) \setminus \Omega)\| \\ &\leq c \left(\varepsilon^3 + \varepsilon^5 \int_{c\varepsilon}^C \tau^{-2} (1 + |\ln \tau|)^2 d\tau \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathcal{R}_\varepsilon; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^2 \|\mathcal{R}_\varepsilon; H^1(\Omega(\varepsilon))\|. \end{aligned}$$

Степени ε^3 и $\varepsilon^5 = \varepsilon^2 \varepsilon^3$ возникли при интегрировании по переменной $n \in (0, c\varepsilon)$, а интеграл $\int_{c\varepsilon}^C \dots d\tau$ – при интегрировании по переменной $s \in \Gamma$, так как

$$|x - t^j|^{-1} (1 + |\ln |x - t^j||) \leq c |s - t^j|^{-1} (1 + |\ln |s - t^j||)$$

и $X_\varepsilon = 0$ в $c\varepsilon$ -окрестности точки t^j .

Граница $\partial\Pi^j$ гладкая (см. определение (44)), а значит, гладким оказывается и решение задачи (47), (48). Таким образом, после обработки старших членов асимптотики, растущих при $|\xi^j| \rightarrow +\infty$, производные асимптотических остатков можно оценивать по максимуму модуля; при этом следует помнить, что каждое дифференцирование привносит большой множитель ε^{-1} из-за использования быстрых переменных (40) во внутренних разложениях.

Учитывая формулу (23) для оператора Лапласа в криволинейных координатах n, s и соотношение (86) для функции w_1^j , которая была продолжена за пределы области Π^j , видим, что выполнено равенство

$$\chi_j(x) (\varepsilon \Delta_x w^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n) - X_\varepsilon(x) \Delta_x S_\varepsilon^j(x))$$

$$= \chi_j(x) \left(\varepsilon \mathcal{L}(x, \nabla_x) w_1^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n) \right. \quad (92)$$

$$\left. - \partial_s v(0, t^j) X_\varepsilon(x) \mathcal{L}(x, \nabla_x) \left((s - t^j) - \frac{\varepsilon}{\pi} [H_0](t^j) \ln |x - t^j| \right) \right).$$

Оператор \mathcal{L} , появившийся в формуле (45), имеет вид

$$\mathcal{L}(x, \nabla_x) = \frac{\varkappa(s)}{1 + n\varkappa(s)} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{n \partial_s \varkappa(s)}{(1 + n\varkappa(s))^3} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{n\varkappa(s)(2 + n\varkappa(s))}{(1 + n\varkappa(s))^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2},$$

а значит, во-первых, $|\mathcal{L}(x, \nabla_x)(s - t^j)| \leq c|n|$ и, во-вторых,

$$|\mathcal{L}(x, \nabla_x)W(x)| \leq c(|\nabla_x W(x)| + |n||\partial_s^2 W(x)|).$$

Таким образом, выражение (92) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \chi_j(x) |\partial_s v(0, t^j)| \left((1 - X_\varepsilon(x)) (|n| + \varepsilon|x - t^j|^{-1} + \varepsilon|n||x - t^j|^{-2}) \right. \\ & \left. + \varepsilon(\varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^{-1}r_j)^{-2} + |n|\varepsilon^{-2}(1 + \varepsilon^{-1}r_j)^{-3}) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\text{supp}(\chi_j(1 - X_\varepsilon)) \subset \mathbb{B}_{R\varepsilon}$ при некотором $R > 0$, применяя весовое неравенство (73) к функции \mathcal{R}_ε , выводим оценку

$$\begin{aligned} & |I_j^1| = \varepsilon |(\chi_j(\varepsilon \Delta_x w_1^j - X_\varepsilon \Delta_x S_\varepsilon^j), \mathcal{R}_\varepsilon)_\Omega(\varepsilon)| \\ & \leq c |\partial_s v(0, t^j)| \left(\int_{\mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)} (|n|^2 + \varepsilon^2|x - t^j|^{-2} + \varepsilon^2|n|^2|x - t^j|^{-4})(\varepsilon + r_j)^2 \right. \\ & \times (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^2 dx + c\varepsilon^2 \int_0^1 (\varepsilon^{-2}(1 + \varepsilon^{-1}r_j)^{-4} + r_j^2\varepsilon^{-4}(1 + \varepsilon^{-1}r_j)^{-6}) \\ & \left. \times (\varepsilon + r_j)^2 (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|^2) r_j dr_j \right)^{1/2} \\ & \times \|(\varepsilon + r_j)^{-1} (1 + \ln(\varepsilon + r_j))^{-1} \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \\ & \leq c |\partial_s v(0, t^j)| \left((\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^4)(1 + |\ln \varepsilon|)^2 \right) \quad (93) \end{aligned}$$

$$+c\varepsilon^2 \int_0^1 \left(\varepsilon^{-2} \varepsilon^4 (\varepsilon + r_j)^{-2} + \varepsilon^{-4} \varepsilon^6 r_j (\varepsilon + r_j)^{-4} (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^2 r_j dr_j \right)^{1/2} \\ \times \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c \|g; L_2(\Sigma)\| \varepsilon^2 (1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|.$$

Слагаемые I_j^2 и I_j^3 , возникшие в правой части (90), обработать значительно проще, несмотря на то, что коэффициенты при первых производных и свободный член в коммутаторе $[\Delta_x, X_\varepsilon^j]$ (ср. формулу (89)) имеют порядки ε^{-1} и ε^{-2} из-за быстрой изменяемости срезающей функции X_ε , — спасает то, что, как уже пояснялось, величины $v + \varepsilon \mathbf{v} - S_\varepsilon^j$ и $w_0^j + \varepsilon w_1^j + \varepsilon c^j (\ln \varepsilon) - S_\varepsilon^j$ с достаточной скоростью затухают при $x \rightarrow t^j$ и $\xi^j \rightarrow \infty$ соответственно. Так, в $R\varepsilon$ -окрестности точки t^j , где расположены носители коэффициентов дифференциального оператора $[\Delta_x, X_\varepsilon^j]$, справедливы оценки

$$|v(x) + \varepsilon \mathbf{v}(x) - S_\varepsilon^j(x)| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|, \\ |\nabla_x v(x) + \varepsilon \nabla_x \mathbf{v}(x) - \nabla_x S_\varepsilon^j(x)| \leq c\varepsilon \|g; L_2(\Sigma)\|,$$

и, следовательно,

$$|I_j^2| = |([\Delta_x, X_\varepsilon^j](v + \varepsilon \mathbf{v} - S_\varepsilon^j), \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}| \\ \leq c \left(\int_{\mathbb{B}_{R\varepsilon}(t^j)} (\varepsilon^{-2} |\nabla_x v(x) + \varepsilon \nabla_x \mathbf{v}(x) - \nabla_x S_\varepsilon^j(x)|^2 + \varepsilon^{-4} |v(x) + \varepsilon \mathbf{v}(x) - S_\varepsilon^j(x)|^2) (\varepsilon + r_j)^2 (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^2 dx \right)^{1/2} \\ \times \|(\varepsilon + r_j)^{-1} (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1} \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \\ \leq c\varepsilon^2 (1 + |\ln \varepsilon|) \|g; L_2(\Sigma)\| \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|.$$

По определению срезающей функции χ_j коэффициенты коммутатора (89) ограничены и их носители лежат вне круга $\mathbb{B}_R(t^j)$ некоторого зафиксированного радиуса $R > 0$, т.е. в той зоне, где $|\xi^j|^{-1} \leq c_{R\varepsilon}$. Таким образом, обсуждавшиеся ранее оценки

$$|w_0^j + \varepsilon w_1^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n) + \varepsilon c^j (\ln \varepsilon) - S_\varepsilon^j(x)| \leq c\varepsilon \|g; L_2(\Sigma)\| (1 + |\xi^j|)^{-1}, \\ \varepsilon |\varepsilon \nabla_x w_1^j(\varepsilon^{-1}(s - t^j), \varepsilon^{-1}n) - \nabla_x S_\varepsilon^j(x)| \leq \varepsilon \|g; L_2(\Sigma)\| (1 + |\xi^j|)^{-2}$$

обеспечивают соотношение

$$\begin{aligned} |I_j^3| &= |([\Delta_x, \chi_j](w_0^j + \varepsilon w^j + \varepsilon c^j (\ln \varepsilon) - S_\varepsilon^j), \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}| \\ &\leq c \|g; L_2(\Sigma)\| \sup_{x \in \Omega(\varepsilon) \setminus \mathbb{B}_R(t^j)} (\varepsilon(1 + |\xi^j|)^{-1} + (1 + |\xi^j|)^{-2}) \|\mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \\ &\leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\| \|\nabla_x \mathcal{R}; L_2(\Omega(\varepsilon))\|. \end{aligned}$$

Приступим к обработке второго скалярного произведения в правой части (91). Сначала рассмотрим интеграл по дуге $\tilde{\Gamma}_\varepsilon^j = \{x \in \Gamma(\varepsilon) : s^{j-} + \varepsilon < s < s^{j+} - \varepsilon\}$, которая согласно требованию (37) принимает вид

$$\tilde{\Gamma}_\varepsilon^j = \{x \in \mathcal{U} : s \in (s^{j-} + \varepsilon, s^{j+} - \varepsilon), n = \varepsilon H_0(s)\},$$

где H_0 – предельная профильная функция (33). На этом участке производная ∂_ν определена равенством (22) с $Y(s) = H_0(s)$, а значит, благодаря соотношению $N(n, s) = 1 + O(\varepsilon^2)$ для нормирующего множителя, краевому условию $\partial_n v(0, s) = 0$ и формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} &|\partial_\nu v(\varepsilon H_0(s), s) - \varepsilon H_0(s) \partial_n^2 v(0, s) + \varepsilon \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s)| \\ &\leq c\varepsilon^2 \sup_{x \in \Omega \cap \mathcal{U}} (|\nabla_x v(x)| + |\nabla_x^2 v(x)|) \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|. \end{aligned} \quad (94)$$

При учете соотношений (57) и (56) для функции \mathbf{v} , обладающей логарифмическими особенностями в точках t^1, \dots, t^{2N} , получаем, что

$$\begin{aligned} \min_{\pm} (|s - s^{j\pm}|) |\partial_\nu \mathbf{v}(\varepsilon H_0(s), s) - \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s)| \\ \leq c\varepsilon \|g; L_2(\Sigma)\|, \quad s \in (s^{j+} + \varepsilon, s^{j-} - \varepsilon). \end{aligned} \quad (95)$$

Поскольку

$$\partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s) = -H_0(s) \partial_n^2 v(0, s) + \partial_s H_0(s) \partial_s v(0, s),$$

оценки (94), (95) и весовое следовое неравенство (78) показывают, что

$$\begin{aligned} &|(\partial_\nu (v + \varepsilon \mathbf{v}), \mathcal{R}_\varepsilon)_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^j}| \leq c\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\| \\ &\times \left(\int_{s^{j-} + \varepsilon}^{s^{j+} - \varepsilon} (1 + \max_{\pm} |s - s^{j\pm}|^{-2}) (\varepsilon + r_j) (1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|) ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \|(\varepsilon + r_j)^{-1/2}(1 + |\ln(\varepsilon + r_j)|)^{-1/2} \mathcal{R}_\varepsilon; \Gamma(\varepsilon)\| \\ & \leq c\varepsilon^2(1 + |\ln \varepsilon|) \|g; L_2(\Sigma)\| \|\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon; L_2(\Omega(\varepsilon))\|. \end{aligned}$$

Остальные фрагменты скалярного произведения $(\partial_\nu V_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Gamma(\varepsilon)}$ допускают аналогичные оценки, которые выводятся по той же схеме и при помощи выкладок, похожих на приведенные при обработке скалярного произведения $(\Delta_x V_\varepsilon, \mathcal{R}_\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}$. При этом даже возникают упрощения, вызванные двумя обстоятельствами: ∂_ν – дифференциальный оператор первого порядка, а возмущенная граница (39) построена при соблюдении³ требования (37). Не останавливаясь на подробностях, которые уже обсуждались при выводе оценок выражений из правой части (90), сформулируем результат, заметив, что наихудшая мажоранта появилась в правой части (93).

Теорема 10. Пусть выполнены условия (31) и (37), а контур $\Gamma(\varepsilon)$, который вместе с Σ ограничивает область $\Omega(\varepsilon)$, определен по формулам (33)–(35). Тогда решение $v_\varepsilon \in H^1_\perp(\Omega(\varepsilon))$ задачи (16), (17) в возмущенной области $\Omega(\varepsilon)$ и его глобальное асимптотическое приближение (82), построенное по решениям v и \mathbf{v} задач (9) и (21), (57), (56) в области Ω , а также содержащее постоянные (43), (87) и решения w_1^j задач (47), (48) в областях (44), удовлетворяют неравенству

$$\|v_\varepsilon - V_\varepsilon; H^1(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^2(1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \|g; L_2(\Omega(\varepsilon))\|, \quad (96)$$

в котором множитель c не зависит ни от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, ни от правой части g краевого условия на внешнем контуре Σ .

Из-за логарифмических особенностей в точках t^1, \dots, t^{2N} составляющая \mathbf{v} не принадлежит пространству Соболева $H^1(\Omega)$, и поэтому приблизить v_ε суммой $v + \varepsilon \mathbf{v}$ по соболевской норме невозможно. Вместе с тем, для членов \tilde{w}_1^j типа пограничного слоя, определенных формулами (49), (50) и

$$\tilde{w}_1^j(\xi^j) = \hat{w}_1^j(\xi^j) + (1 - \chi_j(\xi^j)) \frac{1}{\pi} [H_0](t^j) \partial_s v(0, t^j) \ln |\xi^j|,$$

³При условии (36) оценки погрешностей остаются без изменений, но сопутствующие выкладки значительно усложняются, и автор не решился бы опустить их.

выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \|\varepsilon \chi_j w_1^j; L_2(\Omega(\varepsilon))\| &\leq c\varepsilon |\partial_s v(0, t^j)| \left(\int_0^R (1 + \varepsilon^{-1} r_j)^{-2} r_j dr_j \right)^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon^2 (1 + |\ln \varepsilon|)^{1/2} \|g; L_2(\Sigma)\|. \end{aligned}$$

Таким образом, удаляя из конструкции (82) члены внутренних разложений и упрощая оценку (96) до оценки $L_2(\Omega(\varepsilon))$ -нормы, приходим к очередному утверждению.

Следствие 11. В условиях теоремы 10 справедливо неравенство

$$\|v_\varepsilon - v - \varepsilon \mathbf{v}; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon^2 (1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \|g; L_2(\Sigma)\|,$$

причем, как и ранее, функции v и \mathbf{v} считаются продолженными на множество $\Omega(\varepsilon) \cup \Omega$.

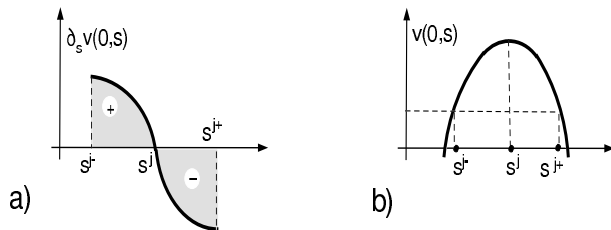


Рис. 10. Специальный выбор точек $s^{j\pm}$.

9. Асимптотика энергетического функционала и моделирование задачи с контрастными жесткостями. Поскольку в силу теоремы 10 решение v_ε задачи (16), (17) вблизи контура Σ приближено суммой решений v и \mathbf{v} задач (9) и (21), (57), (56), в силу формул (6), (5) и оценки (96) получаем соотношение

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon, g; \Omega(\varepsilon)) = -\frac{1}{2}(g; v)_\Sigma - \frac{\varepsilon}{2}(g, \mathbf{v})_\Sigma + O(\varepsilon^2 \|g; L_2(\Sigma)\|^2).$$

При учете леммы 3 и определения (29) находим, что

$$\begin{aligned} -(g, \mathbf{v})_\Sigma &= \int_\Gamma H_0(s) |\partial_s v(0, s)|^2 ds \\ &= \int_\Gamma \mathbf{V}(s) \partial_s v(0, s) ds - \sum_{j=1}^N \mathbf{V}(s^j) \int_{s^{j-}}^{s^{j+}} \partial_s v(0, s) ds. \end{aligned} \tag{97}$$

Вспомнив, что \mathbf{V} – первообразная функции $\Gamma \ni s \mapsto \partial_n V(0, s)$, видим, что первый интеграл в правой части (97) равен

$$-\int_{\Gamma} v(0, s) \partial_s \mathbf{V}(s) ds = -\int_{\Gamma} v(0, s) \partial_n V(0, s) ds$$

и совпадает с удвоенным поправочным асимптотическим членом в формуле (81) для энергетического функционала в задаче (1)–(3). Итак, для выполнения желанной оценки

$$|E_\varepsilon(u_\varepsilon, g; \Xi) - E_\varepsilon(v_\varepsilon, g; \Omega(\varepsilon))| \leq c\varepsilon^2(1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \|g; L_2(\Sigma)\|^2 \quad (98)$$

осталось аннулировать последнюю сумму в (97). Это можно сделать благодаря предположению (31). Именно, проходя через точку s^j , функция $s \mapsto \partial_s v(0, s)$ меняет знак, а значит, при надлежащем, но достаточно произвольном выборе точек $s^{j+} > s^j$ и $s^{j-} < s^j$ можно соблюсти равенство

$$-\int_{s^{j+}}^{s^j} \partial_s v(0, s) ds = \int_{s^j}^{s^{j+}} \partial_s v(0, s) ds, \quad (99)$$

обеспечивающее обращение в нуль каждого члена суммы по $j = 1, \dots, N$ в соотношении (97). Понятно, что требование (99) эквивалентно условию (ср. рис. 10)

$$v(s^{j+}) = v(s^{j-}).$$

Сформулируем основной результат работы о моделировании.

Теорема 12. Пусть контур $\Gamma(\varepsilon)$ определен формулой (39) с профильной функцией H_ε , заданный соотношениями (33)–(35). Тогда энергетические функционалы в задачах (1)–(3) и (16), (17) связаны неравенством (98), в котором множитель c не зависит от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и правой части $g \in L_2(\Sigma)$ краевого условия на внешнем контуре Σ .

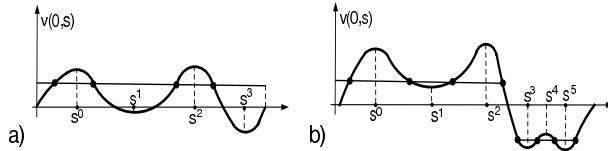


Рис. 11. Уменьшение количества уступов.

В п. 4 предполагалось, что $s^{j+} < s^{j+1-}$, т.е. между экстремальными точками s^j и s^{j+1} функции $\Gamma \ni s \mapsto v(0, s)$ появлялись два уступа. Небольшие изменения в определениях (33), (34) позволяют совместить точки s^{j+} и s^{j+1-} , уменьшив тем самым количество уступов. На рис. 11, а, приведен график функции v , требующий такое же количество уступов, как и число N экстремальных точек, а на рис. 11, б, — график, для которого количество уступов заведомо превосходит N .

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. Наука, М., 1973.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Мир, М., 1971.
3. J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods*. Heidelberg, Springer Verlag, 1989.
4. С. А. Назаров, *Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями*. — Матем. сборник **181** (1990), No. 3, 291–320.
5. С. А. Назаров, *Пограничные слои и условия шарнирного опирания для тонких пластин*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 228–287.
6. С. А. Назаров, *Асимптотика решения и моделирование задачи Дирихле в угловой области с быстроосциллирующей границей*. — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 183–225.
7. С. А. Назаров, *Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей*. — Известия РАН, Сер. матем. **72**, No. 3 (2008), 103–158.
8. Ю. Н. Работнов, *Механика деформируемого твердого тела*. Наука, М., 1988.
9. J. Sokolowski, J.-P. Zolesio, *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*. Berlin, Springer-Verlag, 1992.
10. А. М. Ильин, *Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием*. — Матем. сб. **103**, No. 2 (1977), 265–284.
11. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области*. — Проблемы матем. анализа. Вып. 8, изд-во ЛГУ, Л. (1981), 72–153.
12. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями*. — Известия АН СССР. Сер. матем. **48**, No 2 (1984), 347–371.
13. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, *Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек*. — Труды московского матем. общества **50** (1987), 79–129.
14. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области*. изд-во ТГУ, Тбилиси, 1981.

15. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1.* Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
16. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* Наука, М., 1989.
17. J. Sokolowski, A. Żochowski, *On topological derivative in shape optimization.* — SIAM Journal on Control and Optimization **37**, No. 4 (1999), 1251–1272.
18. С. А. Назаров, Я. Соколовский, *Топологическая производная интеграла Дирихле при образовании тонкой перемычки.* — Сиб. матем. ж. **45**, No. 2 (2004), 410–426.
19. S. A. Nazarov, A. S. Slutskiy, J. Sokolowski, *Topological derivative of the energy functional due to formation of a thin ligament on a spatial body.* — Folia Math. **12**, No. 1 (2005), 39–72.
20. J. T. Beale, *Scattering frequencies of resonators.* — Commun. Pure Appl. Math. **26**, No. 4 (1973), 549–563.
21. Sh. Jimbo, *The singularly perturbed domain and characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition.* — J. Differ. Eq. **77**, No. 2 (1989), 322–350.
22. Р. Р. Гадыйшин, *О собственных значениях “гантели с тонкой ручкой”.* — Изв. РАН. Сер. матем. **69**, No. 2 (2005), 45–110.
23. S. A. Nazarov, J. Sokolowski, *Asymptotic analysis of shape functionals.* — J. Math. Pures Appl. **82**, No. 2 (2003), 125–196.
24. M. C. Delfour, J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization.* Philadelphia, SIAM, Ser. Adv. Design and Control, (2001).
25. С. А. Назаров, М. В. Олюшин, *О возмущениях собственных значений задачи Неймана в следствии вариации границы области.* — Алгебра и анализ **5**, No. 2 (1993), 169–188.
26. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости.* Мир, М., 1967.
27. С. А. Назаров, *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений.* — Труды С.-Петербурга. матем. об-ва **5** (1996), 112–183.
28. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Том 2, Наука, М., 1967.
29. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
30. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
31. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.* — Math. Nachr. **77** (1977), 25–82.
32. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука М., 1991.
33. С. А. Назаров, Ю. А. Ромашев, *Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами.* — Изв. АН АрмССР. Механика No. 4 (1982), 30–40.

Nazarov S. A. Asymptotic modeling of a problem with contrasting stiffness.

An asymptotic model is found of the Neumann problem for second-order differential equation with piecewise constant coefficients in the composite domain $\Omega \cup \omega$ which are small of order $O(\varepsilon)$ in the subdomain ω . Namely a domain $\Omega(\varepsilon)$ with a singular perturbed boundary is constructed whose solution gives a two-term asymptotic, i.e., of the increased accuracy $O(\varepsilon^2)$, approximation solution for the restriction on Ω of the original problem. In contrast to other singularly perturbed problems, in the case of contrasting stiffness modeling requires for constructing the contour $\partial\Omega(\varepsilon)$ with ledges, i.e., boundary fragments with curvature $O(\varepsilon^{-1})$.

ИПМаш РАН

Поступило 15 сентября 2009 г.

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk