Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 369, 2009 г.

**О. В. Мотыгин**

# ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ ПОГРУЖЕННЫХ ТЕЛ

## 1. Постановка задачи и основные свойства решений

Рассмотрим задачу, описывающую движение идеальной несжимаемой неограниченной жидкости со свободной поверхностью в присутствии системы твердых, полностью погруженных тел. Предполагается, что движение жидкости – гармоническое по времени и, тем самым, описывается потенциалом скоростей

$$\mathrm{Re}\{\exp(-\mathrm{i}\,\omega t)u(x,y,z)\},$$

где $t$ – время, $\omega$ – частота колебаний. Будем считать, что $y$ – вертикальная координата (направление оси $y$ противоположно направлению действия силы тяжести), а $x$ и $z$ – горизонтальные координаты.

Рассмотрение линейного приближения теории поверхностных волн (см., например, введение книги [1]) приводит к следующим уравнениям для функции $u$ (которую также принято называть потенциалом скоростей):

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{в} \quad W, \tag{1.1}$$

$$\partial_y u - \nu u = 0 \quad \text{на} \quad F, \tag{1.2}$$

$$\partial_{\mathbf{n}} u = f \quad \text{на} \quad S, \tag{1.3}$$

где $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ – оператор Лапласа, $\nu = \omega^2/g$, $g$ – ускорение свободного падения, $W \subset \{y \le 0\}$ – область, занятая жидкостью, $F = \{y = 0\}$ – невозмущенная свободная поверхность, $S$ – смоченная поверхность погруженных препятствий, $\partial_{\mathbf{n}}$ – производная по нормали. Для определенности будем полагать, что единичная нормаль $\mathbf{n}$

---

*Ключевые слова* : волны на поверхности жидкости, краевая задача, однозначная разрешимость, пример неединственности, локализованные моды, граничные интегральные уравнения.

Работа поддержана фондом INTAS в рамках гранта YSF No. 06-1000014-6343.

на смоченной поверхности направлена внешним относительно препятствий образом.

Далее также будем рассматривать двумерную постановку, которая соответствует ситуации, когда фронт волны параллелен образующим системы бесконечно длинных вдоль оси $z$ цилиндрических тел. При этом задача ставится в сечении области, которое ортогонально образующим, и зависимость от $z$ исключается. В приведенной выше постановке $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, а $W$, $F$ и $S$ – сечения соответствующих пространственных областей. Далее $n$ ($n = 2, 3$) будет обозначать размерность задачи.

Будем полагать, что множество $S$ ограничено и каждая связная компонента $S$ (смоченная поверхность каждого тела) принадлежит классу Гёльдера $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Кроме того, будем рассматривать классическую постановку, предполагая, что $u \in C^2(W) \cap C(\overline{W})$ и потенциал $u$ имеет правильную нормальную производную на $\partial W$ (см., например, [2, ч. 1, §1]). Рассмотрение данных классов функций и контуров хорошо согласуется с методом интегральных уравнений теории потенциала (см. [2], а также [1, гл. 2] – применительно к задачам теории поверхностных волн).

Согласно линейной теории гидродинамической качки, для исследования поведения плавающего тела под действием набегающих волн необходимо решить радиационную и дифракционную задачи, соответственно о вынужденных колебаниях тела и рассеянии волн на неподвижном теле. Поскольку область $W$, занятая жидкостью, неограниченна, для описания указанных процессов задача (1.1)–(1.3) должна быть дополнена условиями, определяющими вид волнового движения на бесконечности

$$\int\limits_{W \cap \{\rho = r\}} \left|\partial_\rho u - \mathrm{i}\,\nu u\right|^2 \mathrm{d}\,s = o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{1.4}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ при $n = 3$ и $\rho = |x|$ при $n = 2$ (см., например, введение [1]).

От типа рассматриваемых колебаний (рассеяние или излучение волн) зависит вид функции $f$ в условии (1.3). Для дифракционной задачи $f$ представляет собой нормальную производную потенциала набегающей волны на $S$, для радиационной задачи $f = \sum\limits_{i=1}^{6} u_i v_i$, где $u_i$ – коэффициенты, $v_1 = \partial_{\mathbf{n}} x$, $v_2 = \partial_{\mathbf{n}} y$, $v_3 = \partial_{\mathbf{n}} z$, $v_4 = (y - y_0)v_3 - (z - z_0)v_2$,

$v_5 = (z-z_0)v_1 - (x-x_0)v_3$, $v_6 = (x-x_0)v_2 - (y-y_0)v_1$; здесь $(x_0, y_0, z_0)$ – точка, относительно которой осуществляются малые вращательные колебания. При рассмотрении этих физически осмысленных ситуаций $f \in C^{0,\alpha}$ при $S \in C^{1,\alpha}$; далее будем предполагать, что $f$ – произвольная функция класса $C(S)$.

В настоящей работе изучается вопрос об однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4). Укажем некоторые важные для данного исследования свойства. Одним из них является связь краевой задачи с граничными интегральными уравнениями теории потенциала. Рассмотрим уравнение

$$-\mu(P) + \big(T\mu\big)(P) = 2f, \quad P \in S, \tag{1.5}$$

где

$$\big(T\mu\big)(P) = 2\int_S \mu(Q)\partial_{\mathbf{n}(P)} G(P,Q)\,\mathrm{d}\,s_Q. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $P = (x, y, z)$, $Q = (x_0, y_0, z_0)$ при $n = 3$, $P = (x, y)$, $Q = (x_0, y_0)$ при $n = 2$, а $G$ – функция Грина задачи (1.1)–(1.4), удовлетворяющая условиям (1.2), (1.4), а также $\nabla_P^2 G(P,Q) = -\delta_Q(P)$, где $\delta_Q(P)$ – дельта-функция Дирака с носителем в точке $Q$.

Обозначим $r_\pm = \big[(x-x_0)^2 + (y \pm y_0)^2 + (n-2)(z-z_0)^2\big]^{1/2}$. Для трехмерной задачи (см., например, [1]) имеем

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right] + \frac{1}{2\pi}\int_{\ell_-} \frac{k}{k-\nu}\,\mathrm{e}^{\,k(y+y_0)}\, J_0\big(k\sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}\big)\,\mathrm{d}\,k,$$

где $J_0$ – функция Бесселя первого рода (см., например, §8.40 в [4]), $\ell_-$ – путь на комплексной плоскости, проходящий из 0 в $+\infty$ под точкой $k = \nu$ (такой выбор обеспечивает выполнение условия (1.4)). Для двумерной задачи функция Грина может быть записана в виде

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\big[\log r_+ - \log r_-\big] + \frac{1}{\pi}\int_{\ell_-} \frac{\mathrm{e}^{\,k(y+y_0)}}{k-\nu}\cos k(x-x_0)\,\mathrm{d}\,k.$$

Отсюда несложно заметить, что $G(P,Q) = G(Q,P)$. Кроме того, ввиду этих представлений для оператора $T$ справедливы основные результаты теории потенциалов двойного слоя. В частности, $T$ является компактным оператором со слабой особенностью (для ядра имеет место оценка $O(\|P-Q\|^{-n+1+\alpha})$ при $\|P-Q\| \to 0$, где $\|P-Q\|$ – расстояние между точками $P$ и $Q$, и уравнение (1.5) является фредгольмовым.

Доказано (см. [1, гл. 2]), что при $S \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и в плоском, и в трехмерном случае уравнение (1.5) однозначно разрешимо в $L_2(S)$ для почти всех значений $\nu$ (при этом $\mu \in C(S)$, если $f \in C(S)$), кроме некоторого, не более чем конечного (возможно пустого) набора значений $\Xi$. При $\nu \notin \Xi$ потенциал

$$u(P) = \big(V\mu\big)(P) = \int\limits_S \mu(Q) G(P,Q)\,\mathrm{d}\,s_Q, \quad P \in W.$$

доставляет единственное решение краевой задачи (1.1)–(1.4). В то же время, при $\nu \notin \Xi$ след решения краевой задачи на $S$ является решением интегрального уравнения

$$-u(P) + \big(\overline{T^*}u\big)(P) = 2\big(Vf\big)(P), \quad P \in S,$$

где

$$\big(\overline{T^*}u\big)(P) = 2\int\limits_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}(Q)} G(P,Q)\,\mathrm{d}\,s_Q.$$

Таким образом, при $S \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и в плоском, и в трехмерном случае краевая задача (1.1)–(1.4) однозначно разрешима ($\nu \notin \Xi$) тогда и только тогда, когда в $L_2(S)$ существует только тривиальное решение однородных уравнений

$$-\mu(P) + \big(T\mu\big)(P) = 0, \quad -u(P) + \big(T^*u\big)(P) = 0, \quad P \in S. \tag{1.8}$$

(Здесь $\big(T^*u\big)(P) = 2\int\limits_S u(Q)\overline{\partial_{\mathbf{n}(Q)} G(P,Q)}\,\mathrm{d}\,s_Q$.) Согласно [1, §2.1.2] при $\nu \in \Xi$ количество линейно независимых решений уравнений (1.8) совпадает с количеством линейно независимых решений однородной краевой задачи, а между собственными пространствами имеется взаимно-однозначное соответствие. А именно, для $\nu \in \Xi$ все решения второго интегрального уравнения (1.8) являются следами на $S$ решений однородной краевой задачи (1.1)–(1.4). В то же время, все решения однородной краевой задачи могут быть получены в виде $V\mu$, где $\mu$ – решение первого уравнения (1.8).

Следующим важным свойством является конечность энергии решения однородной задачи. Известно (см., например, [1, §2.2.1]), что решение задачи (1.1)–(1.4) имеет представление

$$u(x,y,z) = A(\theta)\rho^{-1/2}\mathrm{e}^{\nu y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\rho} + \varphi(x,y,z),$$

где $(\rho,\theta,y)$ – цилиндрические координаты и

$$|\varphi| + |\nabla\varphi| = O\big(\mathrm{e}^{\nu y}(1+\rho)^{-3/2} + (\rho^2+y^2)^{-1}\big) \quad \text{при} \quad \rho^2+y^2 \to \infty.$$

Для плоской задачи

$$u(x,y) = A_\pm \mathrm{e}^{\nu y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu|x|} + \varphi_\pm(x,y) \quad \text{при} \quad x^2+y^2\to\infty, \quad \pm x > 0,$$

где

$$|\varphi_\pm| + |\nabla\varphi_\pm| = O\big([x^2+y^2]^{-1/2}\big) \quad \text{при} \quad x^2+y^2\to\infty.$$

В [1, §2.2.1] приведено доказательство утверждения о том, что для решения однородной задачи (1.1)–(1.4), удовлетворяющего условию

$$\partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{1.9}$$

волновые слагаемые в асимптотике решения на бесконечности отсутствуют ($A(\theta) = 0$ при $n = 3$ и $A_\pm = 0$ при $n = 2$).

Таким образом, без потери общности можно полагать, что решение однородной задачи – вещественнозначная функция. Кроме того, учитывая оценки остаточных членов в асимптотиках, можем заключить, что для решений однородной задачи выполняется условие

$$\int\limits_W |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z < \infty \tag{1.10}$$

($\int\limits_W |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y < \infty$ в плоской задаче) и эти решения представляют собой так называемые локализованные или по терминологии [3] “ловушечные” (“trapped”) моды – невынужденные колебания жидкости, имеющие конечную энергию.

Известно (см., например, [1, §1.2.1]), что для фиксированного $Q$ для функции Грина плоской задачи имеет место асимптотическое представление

$$G(P,Q) = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\nu(y+y_0+\mathrm{i}\,|x-x_0|)} + g(P,Q),$$

где $|g| + |\nabla g| = O\bigl(|x + \mathrm{i}\, y|^{-1}\bigr)$ при $|x + \mathrm{i}\, y| \to \infty$. Воспользовавшись представлением Грина для решения однородной задачи (1.1)–(1.4)

$$u(P) = \int_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}(Q)} G(P, Q)\, \mathrm{d}\, s_Q.$$

несложно заметить, что это решение удовлетворяет условию ортогональности (которое будет использоваться далее в §4)

$$\int_S u(x, y)\partial_{\mathbf{n}}\bigl(\mathrm{e}^{\,\nu(y \pm \mathrm{i}\, x)}\bigr)\, \mathrm{d}\, s = 0. \tag{1.11}$$

В заключение данного раздела обсудим существующие результаты, связанные с однозначной разрешимостью задачи (1.1)–(1.4). Отметим, что упомянутое выше доказательство однозначной разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.4) [1], основанное на интегральном уравнении (1.5) и теореме [5] об обратимости оператор-функции, аналитически зависящей от параметра (оператор $T$ зависит аналитически от $\nu$), имеет существенный недостаток. А именно, в рамках метода невозможно получить информацию о значениях $\nu_i$, составляющих множество $\Xi$, кроме конечности этого множества. (Важно отметить, что, как показано численно в [6], по крайней мере для некоторых тел $\Xi \neq \emptyset$.) Поэтому в рамках метода [1] для заданной геометрии невозможно гарантировать однозначную разрешимость задачи в любом заданном интервале значений $\nu$.

В тоже время, известный прием (см., например, [1, §2.1.2.3]) позволяет доказать однозначную разрешимость интегрального уравнения (1.5) и, тем самым, краевой задачи (1.1)–(1.4) при наличии теоремы единственности для решения краевой задачи. Обзор известных теорем единственности (в основном основанных на двух схемах [7, 8] и [9]) может быть найден в книге [1]. Недавно в работе [10] предложен подход, позволяющий получать теоремы единственности в форме простых оценок параметров задачи, для которых возможно нарушение свойства единственности. Однако следует отметить, что набор известных результатов, относящихся к вопросу о единственности, весьма ограничен. Кроме того, недостатком всех этих утверждений являются существенные ограничения на геометрию препятствий и параметр $\nu$, для которых удается доказать отсутствие локализованных мод.

Также достаточно ограничены и существующие методы для нахождения примеров неединственности. Большинство известных примеров для линейных задач теории поверхностных волн получено при помощи так называемой обратной процедуры, предложенной М. Мак-Айвер в 1996 г. [11] и развитой в ряде последующих работ (см., например, [6]). При использовании этой схемы для заданного потенциала разыскивается форма тел, для которых этот потенциал является решением однородной задачи. Отметим, что, по всей видимости, на данный момент не существует подходов, позволяющих найти локализованные моды для *заданной* конфигурации тел. В работе [12] был предложен метод, предназначенный для поиска двумерных мод колебаний, локализованных заданными, симметричными относительно оси $y$ телами (для трехмерной задачи метод развивается в [13]). Однако, в работе [12] не доказана достаточность используемых условий существования локализованных мод.

Целью настоящей работы является развитие более совершенных методов для исследования вопроса о единственности решения задачи (1.1)–(1.4) (и, тем самым, вопроса об однозначной разрешимости данной задачи). В развитие идей [14] предложены новые критерии (необходимые и достаточные условия) единственности, пригодные для произвольной геометрии препятствий и $\nu > 0$. На основе этих критериев получены достаточные условия единственности, а кроме того, найдены достаточные условия существования локализованных мод, позволяющие обнаруживать такие моды для заданной конфигурации погруженных препятствий. В качестве иллюстрации теоретических положений приведены результаты численных исследований.

## 2. Критерий единственности (I)

Как было отмечено выше, оператор $T$, определенный формулой (1.6), — компактный и его спектр представляет собой дискретное множество $\{\alpha_i\}$, не имеющее предельных точек, кроме, быть может, $\alpha = 0$ (см., например, [15, §VI.5]). Свойство однозначной разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.4) нарушается тогда и только тогда, когда имеется равное единице собственное значение оператора $T$. Однако такой критерий неудобен, в частности, для численной реализации, поскольку оператор $T$ не является самосопряженным, а значит возникают трудности при оценке близости его собственных значений и значений, полученных при численной аппроксимации оператора.

Следуя [14], сформулируем критерий единственности в терминах самосопряженных операторов. Для этого применим оператор $I - T^*$ к первому из уравнений (1.8). Получим

$$-\mu + \mathfrak{T}\mu = 0, \quad \mathfrak{T} = T + T^* - T^*T. \tag{2.1}$$

Очевидно, что если уравнения (1.8) имеют нетривиальные решения, то и уравнение (2.1) имеет нетривиальное решение.

При этом справедливо и обратное утверждение – если уравнение (2.1) имеет нетривиальные решения, то имеются нетривиальные решения уравнений (1.8). Действительно, предположим обратное – уравнения (1.8) имеют только тривиальное решение. Это, в частности, означает, что существует ограниченный оператор $(I - T^*)^{-1}$, поскольку вследствие компактности $T$ и $T^*$ имеет место альтернатива Фредгольма (см., например, [15, §VI.5]). Применив оператор $(I-T^*)^{-1}$ к уравнению (2.1), приходим к равенству $(I - T)\mu = 0$ с некоторым $\mu \neq 0$, что очевидно противоречит нашему предположению. Таким образом, однородная задача (1.1)–(1.4) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение уравнения (2.1).

Интегральный оператор $\mathfrak{T}$ является компактным и самосопряженным. Кроме того, можно заметить, что для произвольной функции $v \in L_2(S)$ имеет место неравенство

$$\langle (I - T^*)(I - T)v, v\rangle = \langle (I - T)v, (I - T)v\rangle \geq 0$$

(здесь и далее $\langle v, w\rangle = \int\limits_S v\,\overline{w}\,\mathrm{d}\,s$ обозначает скалярное произведение $v$ и $w$ в $L_2(S)$). Таким образом, $\langle \mathfrak{T}v, v\rangle \leq \langle v, v\rangle$ и с учетом возможности определения собственных значений при помощи вариационных принципов можем заключить, что все собственные значения $\lambda_i$, составляющие $\sigma(\mathfrak{T})$ – спектр оператора $\mathfrak{T}$, подчинены неравенству $\lambda_i \leq 1$.

Приведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Однозначная разрешимость задачи* (1.1)–(1.4) *эквивалентна условию*

$$\lambda_1 < 1, \quad \text{где} \quad \lambda_1 = \max\{\lambda_i\}, \tag{2.2}$$

*а локализованные моды существуют при значениях* $\nu$*, принадлежащих множеству* $\Xi = \{\nu : \lambda_1 = 1\}$.

Данный критерий также можно сформулировать в терминах операторных норм. Известно, что для самосопряженного оператора $\mathfrak{T}$

имеет место равенство

$$\|P(\mathfrak{T})\| = \sup\bigl\{|P(\lambda)| : \lambda \in \sigma(\mathfrak{T})\bigr\},$$

где $P$ – произвольный полином (см., например, лемму 2 в [15, ч. VII]). В частности, имеем $\|\mathfrak{T}\| = \sup\bigl\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathfrak{T})\bigr\}$. Пусть $P(\lambda) = \lambda + c$, где $c = \|\mathfrak{T}\|$. Очевидно, для $\lambda \in \sigma(\mathfrak{T})$, $P(\lambda) \geq 0$ и

$$\bigl\|\mathfrak{T} + c\,I\bigr\| = \lambda_1 + c.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** *Однозначная разрешимость задачи* (1.1)–(1.4) *эквивалентна условию*

$$\bigl\|\mathfrak{T} + \|\mathfrak{T}\|\,I\bigr\| - \|\mathfrak{T}\| < 1,$$

*а локализованные моды существуют при значениях* $\nu$, *принадлежащих множеству* $\Xi = \{\nu : \bigl\|\mathfrak{T} + \|\mathfrak{T}\|\,I\bigr\| - \|\mathfrak{T}\| = 1\}$.

В приведенных выше рассуждениях можно было бы исходить из второго уравнения (1.8), для симметризации применяя к нему оператор $I - T$. Тогда те же рассуждения приводят к выводу о том, что однородная задача (1.1)–(1.4) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение уравнения

$$-u + \mathfrak{T}'u = 0, \quad \mathfrak{T}' = T + T^* - TT^*. \tag{2.3}$$

Очевидно, утверждения теорем 2.1 и 2.2 остаются в силе при замене $\mathfrak{T}$ на $\mathfrak{T}'$ и $\lambda_1$ на $\lambda_1'$, где $\lambda_1' = \max\{\lambda_i'\}$ и $\lambda_i'$ – собственные значения $\mathfrak{T}'$. Связь между собственными пространствами операторов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ будет обсуждаться в следующем разделе.

Заметим, что из теорем 2.1 и 2.2 могут быть выведены достаточные условия единственности в терминах собственных значений конечномерных операторов и некоторых оценок интегралов. Такие условия удобны для применения в численных алгоритмах, где используются аппроксимации операторов, построенные, например, при помощи метода коллокации. (Достаточно подробное исследование такого рода аппроксимаций для многомерных интегральных операторов со слабой особенностью может быть найдено в книге [17].)

Рассмотрим некоторую конечномерную аппроксимацию $\widehat{T}$ интегрального оператора $T$. Удобно определить соответствующую аппроксимацию оператора $\mathfrak{T}$ следующим образом $\widehat{\mathfrak{T}} = \widehat{T} + \widehat{T}^* - \widehat{T}^*\widehat{T}$.

Такой оператор является самосопряженным и при таком определении, очевидно, $\widehat{\lambda}_i \le 1$, где $\widehat{\lambda}_i$ – собственные значения $\widehat{\mathfrak{T}}$. Предположим, что $\delta$ – некоторая оценка сверху величины $\bigl|\lambda_1 - \widehat{\lambda}_1\bigr|$, где $\widehat{\lambda}_1 = \max\{\widehat{\lambda}_i\}$. Тогда из (2.2) следует, что неравенство

$$\widehat{\lambda}_1 < 1 - \delta \tag{2.4}$$

является достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1.1)–(1.4). При помощи теоремы 4.10 [16, гл. V, §4.3], оценивающей расстояние между спектрами самосопряженных операторов, находим

$$\bigl|\lambda_1 - \widehat{\lambda}_1\bigr| \le \bigl\|\mathfrak{T} - \widehat{\mathfrak{T}}\bigr\|. \tag{2.5}$$

Примеры численной проверки условия (2.4), включающие вычисление оценок $\|\mathfrak{T} - \widehat{\mathfrak{T}}\|$, представлены в работе [14]. Оценка сводится к вычислению двойных интегралов по $S$ и является довольно трудоемкой, особенно в пространственном случае ($n = 3$). Поэтому при проверке свойства единственности для задачи (1.1)–(1.4) может быть предложено использовать достаточное условие единственности (2.2), где $\lambda_1 \approx \tilde{\lambda}_1$, а $\tilde{\lambda}_1$ – численный предел $\widehat{\lambda}_1(h)$ при $h \to 0$, где $h = \max\{\operatorname{diam} \gamma_i\}$, $S = \cup\gamma_i$. С учетом (2.5) и возможности построения схем коллокации, гарантирующих оценку $\|\mathfrak{T} - \widehat{\mathfrak{T}}\| = O(h)$ при $h \to 0$ (см. [17, гл. 5–7]), можно предположить, что значение численного предела $\tilde{\lambda}_1$ находится достаточно надежно с помощью известных экстраполяционных методов (см., например, [18]).

## 3. Критерий единственности (II)

Отметим недостаток, присущий критериям единственности, составляющим утверждения теорем 2.1 и 2.2. Очевидно, эти критерии единственности не позволяют находить значения $\nu \in \Xi$ при помощи численных методов, поскольку $\lambda_1 \le 1$ и кривая $\lambda_1(\nu)$ касается линии $\lambda = 1$ при $\nu \in \Xi$, но не может пересекать эту линию, а в отсутствие пересечения невозможно надежно удостовериться в том, что $\lambda_1$ принимает значение 1.

Это наблюдение можно проиллюстрировать с помощью результатов вычислений [14] для плоской задачи и двух эллипсов с горизонтальной и вертикальной полуосями $a$ и $b$, соответственно; центры фигур расположены на расстоянии $l$ от оси $y$ и на глубине $d$. На рис. 1 представлена зависимость $\lambda_1(\nu)$ для $b/a = 0.08$, $d/a = 0.25$, $l/a = 2.34$

(для этой конфигурации в [12] численно показано выполнение некоторых необходимых условий существования локализованных мод). Несмотря на то, что кривая $\lambda_1(\nu)$ очень близка к единице при $\nu a \approx 0.584$, это не гарантирует существования примера неединственности.

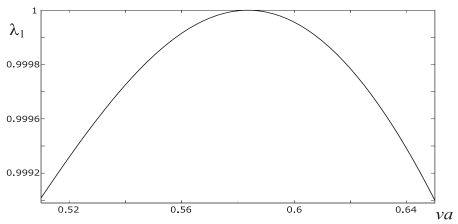


Рис. 1. Пример вычисления $\lambda_1$ для двух погруженных эллипсов.

В настоящем разделе будет предложен другой критерий единственности, также основанный на уравнениях (2.1), (2.3) и получены достаточные условия существования локализованных мод. Как будет показано в следующем разделе, на основе этих результатов можно построить численный алгоритм, позволяющий обнаруживать значения $\nu \in \Xi$.

Начнем вывод со следующего вспомогательного утверждения.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\nu \notin \Xi$. Собственные значения операторов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ совпадают, $\lambda_i = \lambda_i'$, $i = 1, 2, \ldots$. Размерности $N_i$ и $N_i'$ собственных пространств $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_i'$, соответствующих собственному значению $\lambda_i$ для $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$, одинаковы.*

**Доказательство.** Рассмотрим собственное значение $\lambda_i$ оператора $\mathfrak{T}$. Согласно определению собственного значения и принимая во внимание определение $\mathfrak{T}$, для $\mu_i \in \mathcal{E}_i$ можем записать

$$(I - T^*)(I - T)\mu_i = (1 - \lambda_i)\mu_i.$$

Применяя к последнему равенству оператор $I - T$, приходим к соотношению

$$(I - T)(I - T^*)(I - T)\mu_i = (1 - \lambda_i)(I - T)\mu_i,$$

или

$$(I - \mathfrak{T}')u_i = (1 - \lambda_i)u_i,$$

где $u_i = (I-T)\mu_i$. Последнее означает, что $\lambda_i$ – собственное значение $\mathfrak{T}'$ и $(I-T)\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}_i'$. По предположению $\nu \notin \Xi$, а значит, $\lambda_1 \neq 1$ и оператор $I-T$ осуществляет биекцию из $L_2(S)$ в $L_2(S)$. Тем самым, $N_i \le N_i'$.

Рассмотрим теперь собственное значение $\lambda_i'$ оператора $\mathfrak{T}'$. По определению имеем

$$(I-T)(I-T^*)u_i = (1-\lambda_i')u_i.$$

Применяя к последнему равенству $I-T^*$, приходим к заключению о том, что $\lambda_i'$ является собственным значением $\mathfrak{T}$, $(I-T^*)\mathcal{E}_i' \subset \mathcal{E}_i$ и $N_i' \le N_i$, откуда, с учетом полученного ранее неравенства следует, что $N_i = N_i'$. □

Используя лемму 2.1, можем доказать два следующих утверждения.

**Лемма 3.2.** *Пусть* $\lambda_1$ *– максимальное собственное значение операторов* $\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}'$ *и пусть* $\mu_1^{(i)}$ *и* $u_1^{(i)}$ $(i = 1,\dots,N_1)$ *– соответствующие собственные функции* $\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}'$*. Если* $\lambda_1 = 1$*, то*

$$(I-T)\mu_1^{(i)} = 0, \quad (I-T^*)u_1^{(i)} = 0, \quad i = 1,\dots,N_1. \tag{3.1}$$

**Доказательство.** Поскольку предполагается, что $\lambda_1 = 1$, имеем

$$(I-T^*)(I-T)\mu_1^{(i)} = 0.$$

Это означает, что или $(I-T)\mu_1^{(i)} = 0$, или

$$(I-T)\mu_1^{(i)} = v \neq 0 \quad \text{и} \quad (I-T^*)v = 0.$$

Согласно альтернативе Фредгольма ядро $I-T^*$ ортогонально образу $I-T$. Это означает, что $\langle v, v\rangle = 0$ поскольку $v$ принадлежит обоим подпространствам. Тем самым, мы приходим к первому равенству (3.1). Подобным образом, исходя из соотношения $(I-T)(I-T^*)u_1^{(i)} = 0$, нетрудно показать справедливость второго равенства (3.1). □

**Лемма 3.3.** *Пусть* $\lambda_1$ *– максимальное собственное значение операторов* $\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}'$ *и пусть* $\mu_1^{(i)}$ *и* $u_1^{(i)}$ $(i = 1,\dots,N_1)$ *– соответствующие собственные функции* $\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}'$*. Если*

$$\big\langle (I-T)\mu_1^{(i)}, u_1^{(j)} \big\rangle = 0 \text{ для некоторого } i \text{ и всех } j = 1,\dots,N_1, \tag{3.2}$$

*то* $\lambda_1 = 1$.

**Доказательство.** Итак, покажем, что из (3.2) следует, что $\lambda_1 = 1$. Предположим обратное – соотношения (3.2) выполняются и при этом $\lambda_1 \neq 1$. В этом случае из леммы 3.1 следует, что оператор $I-T$ осуществляет биекцию между span $\{\mu_1^{(1)}, \dots, \mu_1^{(N_1)}\}$ и span $\{u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(N_1)}\}$. Это означает, что можно записать

$$(I-T)\mu_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_1} c_k u_1^{(k)}.$$

Тогда из (3.2) получим систему линейных уравнений с матрицей Грама

$$\sum_{k=1}^{N_1} c_k \langle u_1^{(k)}, u_1^{(j)} \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, N_1,$$

Поскольку функции $u_1^{(i)}$ линейно независимы, однородная система линейных уравнений невырождена и, поэтому, $c_k = 0$, $k = 1, \dots, N_1$. Таким образом, приходим к равенству

$$(I-T)\mu_1^{(i)} = 0,$$

которое противоречит предположению о том, что $\lambda_1 \neq 1$. □

Совершенно аналогично можно доказать следующее утверждение.

**Лемма 3.4.** *Пусть $\lambda_1$ – максимальное собственное значение операторов $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$ и пусть $\mu_1^{(i)}$ и $u_1^{(i)}$ $(i = 1, \dots, N_1)$ – соответствующие собственные функции $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}'$. Если*

$$\langle (I-T^*)u_1^{(i)}, \mu_1^{(j)} \rangle = 0 \text{ для некоторого } i \text{ и всех } j = 1, \dots, N_1, \quad (3.3)$$

*то* $\lambda_1 = 1$.

С учетом утверждения теоремы 2.1, леммы 3.2–3.4 составляют следующие критерии единственности решения задачи (1.1)–(1.4).

**Теорема 3.3.** *Выполнение условий* (3.2) *или* (3.3) *необходимо и достаточно для существования нетривиальных решений однородной задачи* (1.1)–(1.4).

Воспользуемся доказанными выше утверждениями и выведем еще один признак существования локализованных мод. Предположим, что $\lambda_1 \neq 1$ – простое собственное значение и запишем

$$\mu_1 = b u_1 + \zeta, \quad (3.4)$$

где $b$ – некоторый коэффициент, $\zeta$ – функция, принадлежащая подпространству $L_2(S)$, состоящему из функций, ортогональных $u_1$. Обращаясь к доказательству леммы 3.1, имеем

$$(I-T)\mu_1 = cu_1,$$

где $c$ – некоторый коэффициент. Поэтому, очевидно,

$$\langle (I-T)\mu_1, \mu_1 \rangle = \langle (I-T)\mu_1, bu_1 + \zeta \rangle = b\langle (I-T)\mu_1, u_1 \rangle.$$

Из формулы (3.4) следует, что $\langle \mu_1, u_1 \rangle = b\langle u_1, u_1 \rangle$. Тем самым, приходим к соотношению

$$\langle u_1, u_1 \rangle \langle (I-T)\mu_1, \mu_1 \rangle = \langle \mu_1, u_1 \rangle \langle (I-T)\mu_1, u_1 \rangle,$$

которое ввиду теоремы 3.3 выполняется и для $\lambda_1 = 1$ (при этом левая и правая части равенства равны нулю). Аналогично можно показать, что

$$\langle \mu_1, \mu_1 \rangle \langle (I-T^*)u_1, u_1 \rangle = \langle u_1, \mu_1 \rangle \langle (I-T^*)u_1, \mu_1 \rangle.$$

Окончательно, приходим к следующему утверждению.

**Предложение 3.1.** *Пусть для некоторого значения $\nu$ собственное значение $\lambda_1(\nu)$ простое и выполняются условия*

$$\langle (I-T)\mu_1, \mu_1 \rangle = 0 \quad \big(\langle (I-T^*)u_1, u_1 \rangle = 0\big), \tag{3.5}$$

$$\big|\langle \mu_1, u_1 \rangle\big| > 0. \tag{3.6}$$

*Тогда $\lambda_1 = 1$ (т.е. $\nu \in \Xi$).*

Преимуществом функционалов $\langle (I-T)\mu_1, \mu_1 \rangle$ и $\langle (I-T^*)u_1, u_1 \rangle$ является то, что они определены однозначно при нормировке $\|\mu_1\| = 1$ и $\|u_1\| = 1$. При этом функционалы

$$\langle (I-T)\mu_1, u_1 \rangle \quad \text{и} \quad \langle (I-T^*)u_1, \mu_1 \rangle$$

определены только с точностью до множителя вида $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, где $\theta$ – произвольное значение.

## 4. Численные исследования

В настоящем разделе построим алгоритм для нахождения примеров неединственности, используя утверждения предыдущего раздела. Предположим, что $\lambda_1$ – простое собственное значение. Условие (3.5) приводит к двум уравнениям, а именно должны обращаться в нуль вещественная и мнимая части функционала $\Phi = \big\langle (I - T^*)u_1, u_1 \big\rangle$. Для того, чтобы убедительно продемонстрировать существование решения двух вещественных уравнений при помощи численных методов, можно применить известный прием (см., например, [12]). Выделим два параметра задачи (в данном случае это может быть $\nu$ и некоторый дополнительный параметр, связанный с геометрией препятствий) и рассмотрим две кривые $\gamma_R$ и $\gamma_I$, состоящие из точек плоскости, для которых $\mathrm{Re}\{A\Phi\} = 0$ и $\mathrm{Im}\{A\Phi\} = 0$, соответственно (здесь $A$ – некоторое комплексное значение). Если имеет место пересечение этих кривых, то эта ситуация устойчива по отношению к погрешностям численной реализации и вблизи точки пересечения имеется точное решение системы.

При выполнении расчетов для конфигурации, состоящей из двух эллипсов с полуосями $a$ и $b$, центрами на глубине $d$ и расстоянием между центрами $2l$, не удалось выбрать два параметра из набора $\nu a$, $b/a$, $d/a$, $l/a$ так, чтобы на плоскости этих параметров имело место пересечение $\gamma_R$ и $\gamma_I$. В численных экспериментах вблизи значений параметров, найденных в работе [12] (для которых в этой работе установлено выполнение некоторых необходимых условий существования локализованных мод), всегда имела место ситуация касания кривых. Поэтому далее нам придется воспользоваться дополнительными соображениями, включив в рассмотрение условия ортогональности (см. (1.11)). Также ограничимся рассмотрением плоской задачи.

Рассмотрим операторы $T_r$ и $T_r^*$, определенные (с учетом равенства $G(P,Q) = G(Q,P)$) следующим образом:

$$\big(T_r\mu\big)(P) = 2\int\limits_S \mu(Q)\partial_{\mathbf{n}(P)} \mathrm{Re}\{G(P,Q)\}\,\mathrm{d}\, s_Q,$$

$$\big(T_r^* u\big)(P) = 2\int\limits_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}(Q)} \mathrm{Re}\{G(P,Q)\}\,\mathrm{d}\, s_Q.$$

Введем операторы $\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{T}_r'$ согласно формулам (2.1), (2.3), где $T$ и $T^*$ следует заменить на $T_r$ и $T_r^*$ соответственно, а также обозначим $\lambda_{r,1}$

– максимальное собственное число и $u_{r,1}$, $\mu_{r,1}$ – соответствующие (вещественные) собственные функции $\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{T}'_r$. Нетрудно заметить, что для введенных таким образом величин справедливы рассуждения §§2, 3. В частности, равенство $\lambda_{r,1} = 1$ равносильно существованию нетривиальных решений однородного интегрального уравнения

$$u(P) - \bigl(T_r^* u\bigr)(P) = 0, \quad P \in S. \tag{4.1}$$

Кроме того, остаются в силе леммы 3.1–3.4. В частности, если $\lambda_{r,1}$ – простое, то из выполнения условия

$$\Psi_r = \bigl\langle (I - T_r^*) u_{r,1}, \mu_{r,1} \bigr\rangle = 0 \tag{4.2}$$

(отметим, что $\Psi_r$ – вещественная величина) вытекает существование нетривиального решения уравнения (4.1), а $u_{r,1}$ является решением этого уравнения.

Функция Грина (1.7) для двумерной постановки задачи может быть записана в виде

$$\begin{aligned} G(P,Q) &= \frac{1}{2\pi}\bigl[\log r_+ - \log r_-\bigr] \\ &+ \frac{1}{\pi}\, v.p. \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\,k(y+y_0)}}{k-\nu} \cos k(x-x_0)\,\mathrm{d}\,k + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,\nu(y+y_0)} \cos\nu(x-x_0). \end{aligned}$$

Тем самым, можем определить

$$\begin{aligned} \bigl(T_i^* u\bigr)(P) &= 2\int_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}(Q)} \operatorname{Im}\{G(P,Q)\}\,\mathrm{d}\,s_Q \\ &= 2\mathrm{e}^{\,\nu y}\Bigl\{\cos\nu x \int_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}}\bigl(\mathrm{e}^{\,\nu y_0}\cos\nu x_0\bigr)\,\mathrm{d}\,s_Q \\ &+ \sin\nu x \int_S u(Q)\partial_{\mathbf{n}}\bigl(\mathrm{e}^{\,\nu y_0}\sin\nu x_0\bigr)\,\mathrm{d}\,s_Q\Bigr\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

При этом для любой вещественной функции $v$ очевидно имеет место равенство $(T_r^* - \mathrm{i}\,T_i^*)v = T^* v$.

Таким образом, если при $\Psi_r = 0$ также выполняются условия ортогональности (см. (1.11))

$$\begin{aligned} &\int\limits_S u_{r,1}(Q)\partial_{\mathbf{n}}\left(\mathrm{e}^{\,\nu y_0}\cos\nu x_0\right)\mathrm{d}\,s_Q = 0,\\ &\int\limits_S u_{r,1}(Q)\partial_{\mathbf{n}}\left(\mathrm{e}^{\,\nu y_0}\sin\nu x_0\right)\mathrm{d}\,s_Q = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

то $T_i^* u_{r,1} = 0$ и функция $u_{r,1}$ является решением интегрального уравнения

$$(I - T^*)u_{r,1} = 0$$

а, тем самым, установлено существование решения однородной задачи (1.1)–(1.4). Справедливо и обратное – след на $S$ решения однородной задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет условиям (4.1), (4.4). Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть второе уравнение (1.8) и напомнить, что вещественная и мнимая части решения однородной задачи также являются решением этой задачи.

Если собственное число $\lambda_{r,1}$ – простое, а контур $S$ симметричен относительно оси $y$, то, очевидно, функция $u_{r,1}$ либо четна, либо нечетна по $x$ и одно из условий (4.4) выполняется автоматически. Второе из этих условий ($\Theta_r = 0$, где $\Theta_r$ – выражение в левой части соответствующего равенства) вместе с равенством $\Psi_r = 0$ составляет систему, наличие решения которой при численном исследовании может быть установлено упомянутым выше способом (рассмотрением кривых на плоскости двух параметров).

Отметим, что некоторую сложность при численной реализации представляет неоднозначность в определении $\Psi_r$ и $\Theta_r$. Покажем, что их можно определить как аналитические по $\nu$ функции на любом интервале, если он не содержит тех изолированных значений $\nu$, при которых происходит изменение кратности $\lambda_{r,1}$ (между этими точками $\lambda_{r,1}$ – аналитическая функция $\nu$; см. [16, гл. VII, §3]).

Рассмотрим для определенности $\Psi_r$. Пусть $\lambda_{r,1}$ – простое собственное значение при $\nu \in (\nu', \nu'')$. Тогда, функция

$$\Psi_r(\nu) = \left\langle (I - T_r^*)\frac{u_{r,1}}{\|u_{r,1}\|}, \frac{\mu_{r,1}}{\|\mu_{r,1}\|}\right\rangle \tag{4.5}$$

определена для каждого $\nu \in (\nu', \nu'')$ единственным образом с точностью до выбора знака. Рассмотрим проекторы $P(\nu)$ и $P'(\nu)$ на собственные пространства, соответствующие $\lambda_{r,1}(\nu)$ для $\mathfrak{T}_r$ и $\mathfrak{T}'_r$, соответственно. Согласно [16, гл. VII, §3] эти операторы $P(\nu)$ и $P'(\nu)$ зависят аналитически от $\nu \subset (\nu', \nu'')$.

Рассмотрим некоторый конечный интервал $\gamma = [\nu_0, \nu_1] \subset (\nu', \nu'')$, выберем значение $\nu_* \in \gamma$ и определим

$$\mu_1(\nu) = P(\nu)\mu_1(\nu_*), \quad u_1(\nu) = P'(\nu)u_1(\nu_*). \tag{4.6}$$

Поскольку $\mu_1(\nu_*)$, $u_1(\nu_*) \neq 0$, знаменатели выражений $\mu_1/\|\mu_1\|$, $u_1/\|u_1\|$ отличны от нуля в $V_{\varepsilon_*}(\nu_*)$ – некоторой открытой $\varepsilon_*$-окрестности $\nu_*$. Это означает, что функция $\Psi(\nu)$, которая определена с помощью (4.5) и (4.6), аналитична в $V_{\varepsilon_*}(\nu_*)$. Поскольку интервал $\gamma$ конечен, можно определить

$$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_*(\nu_*) : \nu_* \in \gamma\} > 0$$

и ввести конечную систему интервалов $V_{\varepsilon_0}(\nu_i)$, таких что

$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{\varepsilon_0}(\nu_i), \quad \text{где} \quad \nu_i < \nu_{i+1}, \quad |\nu_i - \nu_{i+1}| < 2\varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

В каждом из интервалов $V_{\varepsilon_0}(\nu_i)$ функция $\Psi(\nu)$ имеет аналитическое представление, полученное при помощи (4.5) и (4.6) и определенное с точностью до знака. Последовательно согласовывая знаки в $V_{\varepsilon_0}(\nu_i) \cap V_{\varepsilon_0}(\nu_{i+1})$ при $i = 1, 2, \ldots, m-1$, получим аналитическую функцию на открытом интервале, содержащем $\gamma$.

Указанное свойство аналитичности позволяет надежно находить нули функционалов $\Psi_r$ и $\Theta_r$ численно, когда значения функционалов вычисляются для некоторого конечного набора значений $\nu$. При этом выбор знака для найденного набора значений функционала осуществляется на основе минимизации изменения функционала и его численных производных при изменении $\nu$.

Для численных исследований воспользуемся аппроксимацией, основанной на замене ядра интегрального оператора $T$ кусочно-постоянной функцией. Разобьем смоченную поверхность препятствий $S$ на $N$ частей, таким образом, что $S = \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i$, и введем $\chi_i$ – характеристические функции множеств $\gamma_i$. Тогда кусочно-постоянное ядро интегрального оператора, аппроксимирующего $T$, можно задать в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \chi_i(P)\chi_j(Q)K_{ij}.$$

Здесь

$$K_{ij} = |\gamma_i|^{-1} \int\limits_{\gamma_i} K(P, Q_j)\,\mathrm{d}\,s_P = 2|\gamma_i|^{-1}[H(P_i', Q_j) - H(P_i'', Q_j)],$$

где $|\gamma_j| = \int\limits_{\gamma_j} \mathrm{d}\,s$, $\{Q_j\}_1^N$ – набор точек $Q_j \in \gamma_j$, $H$ – функция, гармонически сопряженная к $G$ по первому аргументу, и $P_i'$, $P_i''$ – конечные точки $\gamma_i$.

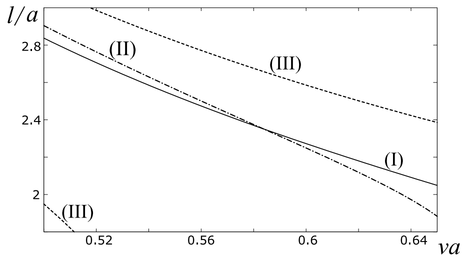


Рис. 2. Кривые $\Psi_r = 0$ (I — сплошная линия), $\Theta_r = 0$ (II — штрих-пунктир) и точки смены кратности $\lambda_1$ (III — пунктир) для двух погруженных эллипсов.

Приведем результаты вычислений для двух эллипсов при $b/a = 0.08$, $d/a = 0.25$, где каждый эллипс разбит на $N/2$ частей, равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$ в представлениях $x(\theta) = \pm l + a\cos\theta$, $y(\theta) = -d + b\sin\theta$. На рис. 2 показано поведение кривых $\Psi_r = 0$ (I) и $\Theta_r = 0$ (II) на плоскости параметров $l/a$, $\nu a$ (данные кривые найдены при $N = 240$). Отметим, что имеет место пересечение кривых, т.е. ситуация численно устойчива. Для нахождения точки пересечения использовались вычисления с $N = 400$, которые приводят к значениям $l/a = 2.34\ldots$, $\nu a = 0.584\ldots$ (приведенные три значащих цифры не изменяются при увеличении $N$).

Вычисление $\lambda_1 - \lambda_2$ в точке пересечения кривых (I) и (II) приводит к значению $0.0017\ldots$, причем указанные две значащих цифры не изменяются при увеличении числа разбиений $N \geq 400$. Таким образом, с учетом точности вычислений можно утверждать, что в достаточно большой окрестности точки пересечения кривых (I) и (II) $\lambda_1$ – простое. По всей видимости, простота $\lambda_1$ имеет место для всех значений параметров $(l/a, \nu a)$, приведенных на рис. 2, кроме значений, принадлежащих кривым (III), на которых кратность $\lambda_1$ равна двум. (Численно эти точки эффективно находятся как точки изменения четности функции $u_{r,1}$.) Проведенные расчеты убедительно подтверждают наличие локализованной моды для двух эллипсов при $b/a = 0.08$, $d/a = 0.25$, $l/a = 2.34\ldots$, $\nu a = 0.584\ldots$.

Напомним, что для плоской задачи оператор $T_i^*$ отображает пространство $L_2(S)$ на $\operatorname{span}\{\mathrm{e}^{\nu y}\cos\nu x, \mathrm{e}^{\nu y}\sin\nu x\}$ (см. (4.3)) – именно это позволяет свести уравнение $T_i^* u_{r,1} = 0$ к двум вещественным уравнениям (4.4). Выполнение условий (4.2) и (4.4) гарантирует существование нетривиального решения однородной плоской задачи (1.1)–(1.4) и в случае, когда система тел не является симметричной относительно вертикальной оси. При этом система состоит из трех уравнений и поиск численного решения такой системы приводит к рассмотрению множеств, выделяемых уравнениями в пространстве трех параметров.

Для пространственной задачи оператор $T_i^*$ отображает $L_2(S)$ в подпространство, которое в общем случае не является конечномерным. Поэтому выбор условий аналогичных (4.4) для $n = 3$ не является очевидным, кроме ситуации, когда тело имеет радиальную симметрию. Анализ этого случая выходит за пределы данного изложения, отметим только, что при этом возможно сопоставление с численными результатами [13] (полученными на основе метода [12]).

Автор благодарит проф. Ф.Мак-Айвера за обсуждение результатов работы.

## Литература

1. N. G. Kuznetsov, V. G. Maz'ya, B. R. Vainberg, *Linear Water Waves: A Mathematical Approach.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
2. В. Г. Мазья, *Граничные интегральные уравнения.* — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **27**. М.: ВИНИТИ (1988), 132–228.
3. F. Ursell, *Trapping modes in the theory of surface waves.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **47**, No. 2 (1951), 347–358.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Наука, М., 1971.
5. В. П. Трофимов, *О корневых подпространствах операторов, аналитически зависящих от параметра.* — Матем. исслед. **3** (9) (1968), 117–125.
6. M. McIver, *Trapped modes supported by submerged obstacles.* — Proc. Roy. Soc. London A **456** (2000), 1851–1860.

7. F. John, *On the motion of floating bodies. I.* — Comm. Pure Appl. Math. **2**(1) (1949), (1950), 13–57.
8. M. J. Simon, F. Ursell, *Uniqueness in linearized two-dimensional water-wave problems.* — J. Fluid Mech. **148** (1984), 137–154.
9. В. Г. Мазья, *К стационарной задаче о малых колебаниях жидкости в присутствии погруженного тела.* — Тр. семинара С. Л. Соболева No. 2 (1977), 57–79.
10. O. V. Motygin, P. McIver, *A uniqueness criterion for linear problems of wave-body interaction.* — IMA J. Appl. Math. **68**(3) (2003), 229–250.
11. M. McIver, *An example of nonuniqueness in the two-dimensional linear water wave problem.* — J. Fluid Mech. **315** (1996), 257–266.
12. R. Porter, *Trapping of water waves by pairs of submerged cylinders.* — Proc. Roy. Soc. London A **458** (2002), 607–624.
13. M. McIver, R. Porter, *Trapping of waves by a submerged elliptical torus.* — J. Fluid Mech. **456** (2002), 277–293.
14. O. V. Motygin, *A new approach to uniqueness for linear problems of wave-body interaction.* — Proc. 21st Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Loughborough, UK (2006), pp. 129–132.
15. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 1, 2, 3, 4 Мир, М., 1977, 1978, 1982.
16. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
17. G. Vainikko, *Multidimensional Weakly Singular Integral Equations.* Springer–Verlag, Berlin, 1993.
18. C. Brezinski, M. Redivo Zaglia, *Extrapolation Methods. Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

Motygin O. V. On unique solvability in the problem of water waves above submerged bodies.

Time-harmonic motion of an ideal unbounded fluid in the presence of rigid bodies located under fluid's free surface is considered. New criteria for unique solvability of the corresponding linear boundary-value problem are suggested. These criteria are based on introduction of two compact self-adjoint integral operators and investigation of their eigenvalues and eigenfunctions. For the two-dimensional problem an algorithm is developed for finding solutions to the homogeneous problem (so-called trapped modes). Examples of numerical computations illustrating the theoretical results are given.

Институт проблем
машиноведения РАН
В.О., Большой пр. 61,
199178 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: o.v.motygin@gmail.com

Поступило 27 февраля 2009 г.