

Л. А. Молотков, А. А. Мухин

ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ СЛОЕ, ОКРУЖЕННОМ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Предлагаемая статья посвящена теоретическому исследованию распространения волн в пористом слое, окруженном упругими средами. Основное внимание сосредотачивается на распространение нормальных волн, которые не испытывают экспоненциального затухания и могут распространяться на большие расстояния. Пористый слой описывается уравнениями эффективной модели среды, в которой чередуются упругие и жидкие слои. Подобная эффективная модель была впервые получена в 1962 г. Г. Бейкусом [1], рассматривавшим два чередующихся упругих слоя с жестким контактом на границах.

Используемая в настоящей работе эффективная модель упруго-жидкой среды была предложена в 1979 г. [2] и получила экспериментальное подтверждение в работе [3]. Упруго-жидкая среда возникает после гидравлического разрыва, когда трещины в упругой среде заполняются жидкостью, которая закачивается через скважины под большим давлением. Подобные эффективные модели к настоящему времени построены и исследованы для многих периодических слоистых сред [4]. Применяемая при этом методика использует матричный метод [5].

В предлагаемой работе проводится исследование дисперсионных уравнений. Вещественные (или мнимые) корни этих уравнений описывают нормальные волны. Координаты этих корней являются функциями волновых чисел, и эти функции оказываются или монотонно возрастающими, или монотонно убывающими. Для всех полученных дисперсионных кривых устанавливаются начальные и конечные точки, при этом конечные точки являются корнями или полюсами дисперсионного уравнения границы упругой и пористой сред. Особенность

Ключевые слова : нормальные волны, дисперсные кривые, эффективная модель, чередующиеся упругие и жидкие слои.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) гранты 08-01-00285, 09-05-00439.

этой границы состоит в том, что вдоль нее могут распространяться две поверхностные волны Релея.

§1. СРЕДА

Пусть задана среда, состоящая из двух упругих полупространств $0 < z < h$ и пористого слоя Био $1 - h \leq z \leq h$. Оба полупространства характеризуются одинаковыми плотностью ρ_0 и коэффициентами Ламе λ_0, μ_0 (рис. 1). Осесимметрические смещения и напряжения в этих полупространствах выражаются равенствами

$$\begin{aligned} u_{ri} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, & u_{zi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \frac{\partial \psi_i}{\partial r} - \frac{\psi_i}{r}, \\ \tau_{rzi} &= 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}, \\ \tau_{zzi} &= \frac{\rho_0 \lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) \quad (i = 0, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

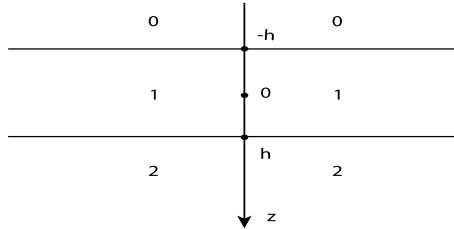


Рис. 1.

через потенциалы φ_i и ψ_i , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_{p0}^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} - \frac{\psi_i}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_{s0}^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} \quad (i = 0, 2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которых v_{p0} и v_{s0} – скорости распространения продольных и поперечных волн в полупространствах 0 и 2.

Пористый слой 1 описывается двухфазной эффективной моделью среды, в которой чередуются очень тонкие упругие и жидкие слои с

границами $z = \text{const}$. Эта модель была предложена в 1979 г. в работе [2], описана подробно в монографии [4] и является частным случаем трансверсально-изотропной среды Био [6]. Экспериментальное обоснование модель получила в статье [3].

Смещение u_z и напряжение τ_{zz} являются общими для обеих фаз. Упругая фаза 1 дополнительно описывается напряжением τ_{rr1} и смещением u_{r1} , а жидкая фаза 2 – напряжением τ_{rr2} и смещением u_{r2} . Так как в жидкой фазе выполняется закон Паскаля, то справедливо равенство

$$\tau_{rr2} = \tau_{zz}. \quad (1.3)$$

Во всей эффективной модели тангенциальные напряжения τ_{rz1} обращаются в нуль. Таким образом, эффективная модель описывается пятью величинами τ_{rr1} , $\tau_{rr2} = \tau_{zz}$, u_{r1} , u_{r2} , u_z . Согласно [4], эти величины удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tau_{rr1} &= [(1 - \varepsilon)b^2\tilde{\lambda} + a] \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) + b\varepsilon\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) + b\tilde{\lambda} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{rr2} &= (1 - \varepsilon)b\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) + \varepsilon\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{rr1}}{\partial r} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{rr2}}{\partial r} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{r2}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{rr2}}{\partial z} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad b = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \\ \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\varepsilon(\lambda_1 + 2\mu_1) + \lambda_2(1 - \varepsilon)}, \quad \bar{\rho} = \rho_1(1 - \varepsilon) + \rho_2\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.5)$$

λ_1, μ_1 – коэффициенты Ламе упругой фазы, λ_2 – модуль жидкой фазы, ρ_1 и ρ_2 – плотности упругой и жидкой фаз и ε – пористость.

На границах $z = \pm h$ выполняются граничные условия

$$\tau_{zzi} = \tau_{zz}, \quad u_{zi} = u_z, \quad \tau_{rzi} = 0, \quad (i = 0, 2). \quad (1.6)$$

Рассматриваемая среда возбуждается некоторым осесимметрическим источником в полупространстве 0. От этого источника на гра-

ницу $z = -h$ падает волна, заданная потенциалами φ_0^0 и ψ_0^0

$$\begin{aligned}\varphi_0^0 &= \int_0^\infty \frac{J_0(k, \eta) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_0^0(kr) e^{k[t\eta - (z+h)\alpha_0]} d\eta, \\ \psi_0^0 &= \int_0^\infty \frac{J_1(k, \eta) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_0^0(kr) e^{k[t\eta - (z+h)\beta_0]} d\eta,\end{aligned}\quad (1.7)$$

при этом

$$\alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{p0}^2}}, \quad \beta_0 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_{s0}^2}}. \quad (1.8)$$

§2. ПОСТРОЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ.

Вывод дисперсионных уравнений

При построении волнового поля в заданной среде полезно использовать симметрию среды относительно плоскости $z = 0$. Волновое поле представится в виде суммы симметричной и антисимметричной частей. Для нахождения волнового поля в каждой из этих частей достаточно рассмотреть область $z < 0$, а падающие волны в виде потенциалов $\frac{1}{2}\varphi(z)$ и $\frac{1}{2}\psi(z)$. В область $z > 0$ волновые поля могут быть продолжены при использовании симметрии или антисимметрии.

Волны в полупространстве 0 в симметричном и антисимметричном случаях определяются потенциалами

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [X_0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0} + X_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0}] e^{kt\eta} d\eta, \\ \psi_0 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [Y_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} + Y_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\beta_0}] e^{kt\eta} d\eta,\end{aligned}\quad (2.1)$$

при этом первые слагаемые в подынтегральных выражениях описывают отраженные волны. После подстановки равенств (2.1) в фор-

мулы (1.1) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
 u_{r0} &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[X_0(k, \eta) e^{k(z+h)\alpha_0} + X_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0} \right. \\
 &\quad \left. + \beta_0 Y_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} - \beta_0 Y_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\beta_0} \right] e^{kt\eta} d\eta, \\
 u_{z0} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\alpha_0 X_0(k, \eta) e^{k(z+h)\alpha_0} - \alpha_0 X_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0} \right. \\
 &\quad \left. + Y_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} + Y_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\beta_0} \right] e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{rz0} &= -\frac{\mu_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[2\alpha_0 X_0(k, \eta) e^{k(z+h)\alpha_0} - 2\alpha_0 X_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0} \right. \\
 &\quad \left. + g_0 Y_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} + g_0 Y_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\beta_0} \right] e^{kt\eta} d\eta, \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{zz0} &= \frac{\mu_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[g_0 X_0(k, \eta) e^{k(z+h)\alpha_0} + g_0 X_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\alpha_0} \right. \\
 &\quad \left. + 2\beta_0 Y_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} - 2\beta_0 Y_0^0(k, \eta) e^{-k(z+h)\beta_0} \right] e^{kt\eta} d\eta, \\
 g_0 &= 2 + \frac{\eta^2}{v_{s0}^2},
 \end{aligned}$$

описывающие смещения и напряжения в упругом полупространстве 0 в симметричном и антисимметричном случаях. Для получения полного волнового поля в этом полупространстве необходимо удвоить выражения (2.1) и (2.2).

Волновое поле в пористом слое 1 было исследовано в монографии [4]. На основании этих исследований смещение u_z и напряжение τ_{zz} могут быть представлены равенствами

$$\begin{aligned}
 u_z &= \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha X_1 s h k z \alpha e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{zz} &= \bar{p} \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 X_1 c h k z \alpha e^{kt\eta} d\eta \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

в симметричном случае и формулами

$$u_z = \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha X_1 ch kz \alpha e^{kt\eta} d\eta, \quad (2.4)$$

$$\tau_{zz} = \bar{\rho} \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \eta^2 X_1 sh kz \alpha e^{kt\eta} d\eta$$

в антисимметричном случае.

Входящая в соотношения (2.3) и (2.4) функция $\alpha(\eta)$ является характеристической функцией для эффективной модели, описывающей слой 1. Эта функция определяет объемные волны, их фронты и скорости. В [4] для этой функции были получены представления

$$\alpha = \eta \sqrt{\bar{\rho} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{(1-\varepsilon)b^2}{\rho_1 \eta^2 + a} + \frac{\varepsilon}{\rho_2 \eta^2} \right]}, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \frac{1}{v_4} \sqrt{\frac{(\eta^2 + v_1^2)(\eta^2 + v_3^2)}{\eta^2 + v_2^2}}, \quad (2.6)$$

где

$$v_{1,3}^2 = \left[\varepsilon \rho_1 \tilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b^2 \rho_2 \tilde{\lambda} + a \rho_2 \right. \\ \left. \pm \sqrt{[\varepsilon \rho_1 \tilde{\lambda} + (1-\varepsilon)b^2 \rho_2 \tilde{\lambda} + a \rho_2]^2 - 4 \rho_1 \rho_2 \varepsilon \tilde{\lambda} a} \right] / (2 \rho_1 \rho_2), \quad (2.7)$$

$$v_2^2 = a / \rho_1, \quad v_4^2 = \tilde{\lambda} / \bar{\rho}.$$

Величины v_1 , v_2 и v_3 являются скоростями распространения волн вдоль слоев в эффективной модели и удовлетворяют неравенствам

$$v_1 > v_2 \geq v_3. \quad (2.8)$$

Граничные условия (1.6) при $z = -h$ в случае симметричного поля приводят к уравнениям

$$\alpha_0 X_0 + Y_0 + \alpha sh kh \alpha X_1 = \alpha_0 X_0^0 - Y_0^0, \\ 2\alpha_0 X_0 + g_0 Y_0 = 2\alpha_0 X_0^0 - g_0 Y_0^0, \quad (2.9) \\ \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0 - \bar{\rho} \eta^2 ch kh \alpha X_1 = -\mu_0 g_0 X_0^0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0^0.$$

Главный определитель системы (2.9) выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \alpha_0 & 1 & \alpha shkh\alpha \\ 2\alpha_0 & g_0 & 0 \\ \mu_0 g_0 & 2\mu_0 \beta_0 & -\bar{\rho}\eta^2 chkh\alpha \end{vmatrix} \\ &= -\mu_0 R_0 \alpha shkh\alpha - \bar{\rho}\eta^4 \alpha_0 \frac{chkh\alpha}{v_{s0}^2}, \\ R_0 &= g_0^2 - 4\alpha_0 \beta_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решения системы уравнений (2.9) представляются равенствами

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\Delta_1} \left[\mu_0 \alpha shkh\alpha (T_0 X_0^0 - 4\beta_0 g_0 Y_0^0) - \frac{\bar{\rho}\eta^4 \alpha_0}{v_{s0}^2} chkh\alpha X_0^0 \right], \\ Y_0 &= \frac{1}{\Delta_1} \left[\mu_0 \alpha shkh\alpha (-4\alpha_0 g_0 X_0^0 + T_0 Y_0^0) + \frac{\bar{\rho}\eta^4 \alpha_0}{v_{s0}^2} chkh\alpha Y_0^0 \right], \\ X_1 &= -\frac{2\mu_0 \alpha_0 \eta^2}{v_{s0}^2 \Delta_1} (g_0 X_0^0 - 2\beta_0 Y_0^0), \quad T_0 = g_0^2 + 4\alpha_0 \beta_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Граничные условия (1.6) при $z = -h$ в случае антисимметричного поля приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \alpha_0 X_0 + Y_0 - \alpha chkh\alpha X_1 &= \alpha_0 X_0^0 - Y_0^0, \\ 2\alpha_0 X_0 + g_0 Y_0 &= 2\alpha_0 X_0^0 - g_0 Y_0^0, \\ \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0 + \bar{\rho}\eta^2 shkh\alpha X_1 &= -\mu_0 g_0 X_0^0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0^0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Главный определитель системы (2.12) выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_0 & 1 & -\alpha chkh\alpha \\ 2\alpha_0 & g_0 & 0 \\ \mu_0 g_0 & 2\mu_0 \beta_0 & \bar{\rho}\eta^2 shkh\alpha \end{vmatrix} \\ &= \mu_0 \alpha R_0 chkh\alpha + \alpha_0 \bar{\rho}\eta^4 \frac{shkh\alpha}{v_{s0}^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решения системы уравнений (2.12) представляются равенствами

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\Delta_2} \left[-\mu_0 \alpha chkh\alpha (T_0 X_0^0 - 4\beta_0 g_0 Y_0^0) + \frac{\bar{\rho}\eta^4 \alpha_0}{v_{s0}^2} shkh\alpha X_0^0 \right], \\ Y_0 &= \frac{1}{\Delta_2} \left[-\mu_0 \alpha chkh\alpha (T_0 Y_0^0 - 4\alpha_0 g_0 X_0^0) - \frac{\bar{\rho}\eta^4 \alpha_0}{v_{s0}^2} shkh\alpha Y_0^0 \right], \\ X_1 &= \frac{2\mu_0 \alpha_0 \eta^2}{v_{s0}^2 \Delta_2} (-g_0 X_0^0 + 2\beta_0 Y_0^0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ
ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ $kh \ll 1$

Для исследования полученных дисперсионных уравнений необходимо найти корни дисперсионных уравнений

$$\mu_0^2 R_0 \alpha t h k h \alpha + \rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \eta^4 = 0, \quad (3.1)$$

$$\mu_0^2 R_0 \alpha + \rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \eta^4 t h k h \alpha = 0, \quad (3.2)$$

записанных на основании равенств (2.10) и (2.13) и относящихся соответственно к симметричной и антисимметричной частям поля. Так как корни расположены симметрично относительно вещественной оси, то достаточно провести их исследование в верхней полуплоскости. Наибольший интерес представляют мнимые корни $\eta = i\tau$, описывающие нормальные волны, которые не испытывают экспоненциального затухания и распространяются на большие расстояния. Эти корни в верхней полуплоскости расположены в интервале

$$0 \leq \tau \leq v_{s0} \quad (3.3)$$

мнимой оси, где левые части уравнений (3.1) и (3.2) являются или вещественными, или мнимыми.

С ростом kh корни перемещаются по мнимой оси, при этом их движения являются монотонными и повороты корней исключаются. Чтобы доказать это утверждение, представим уравнения (3.1) и (3.2) в виде равенства

$$\Delta(kh, \tau) = 0. \quad (3.4)$$

Используя формулу для производной неявной функции, получим соотношение

$$\frac{d\tau}{dkh} = -\frac{\partial\Delta}{\partial kh} / \frac{\partial\Delta}{\partial\tau}, \quad (3.5)$$

в котором обе частные производные сохраняют знаки в корнях уравнений (3.1) и (3.2). В самом деле, неравенство $\frac{\partial\Delta}{\partial kh} > 0$ выполняется, так как функции thx и tgx являются возрастающими. Производная $\frac{\partial\Delta}{\partial\tau}$ сохраняет знак в корнях уравнения (3.4), поскольку в случае одновременного выполнения равенств

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\tau} = 0, \quad \Delta(kh, \tau) = 0 \quad (3.6)$$

имеет место самовозбуждение, которое в рассматриваемой среде невозможно. Таким образом, у каждого корня уравнений (3.1) и (3.2) производная $\frac{\partial \tau}{\partial kh}$ сохраняет знак и каждый корень может или только спускаться, или только подниматься по мнимой оси. Переход корня в правую или левую полуплоскость из интервала (3.3) также оказывается невозможным.

При $kh = 0$ симметричное уравнение (3.1) имеет двойной корень $\tau^2 = 0$ и корни в точке $\tau = v_2$. Существование первого корня связано с тем, что в окрестности начала координат выполняется приближенное равенство

$$R_0(\tau) \sim 2\tau^2 \left(\frac{1}{v_{s0}^2} - \frac{1}{v_{p0}^2} \right), \quad (3.7)$$

из которого следует приближенное соотношение

$$\tau = \frac{\mu_0 v_1 v_3}{v_{p0} v_{s0} v_2 v_4} \sqrt{\frac{2(v_{p0}^2 - v_{s0}^2)kh}{\rho_0 \bar{\rho}}}. \quad (3.8)$$

Формулы (3.8) показывают, что корень, выходящий из начала координат, с ростом kh поднимается по мнимой оси.

Точка $\tau = v_2$ является существенно особой точкой уравнения (3.1). В окрестности этой точки левая часть уравнения как функция от τ изменяется по-разному при $\tau > v_2$ и при $\tau < v_2$. В области $\tau > v_2$ и при условии $R_0(v_2) < 0$ уравнение (3.1) имеет корень, выражающийся приближенной формулой

$$\tau^2 = v_2^2 - \frac{\mu_0^2 (v_1^2 - v_2^2)(v_2^2 - v_3^2) R_0(v_2) kh}{\rho_0 \bar{\rho} v_2^2 v_4^2 \alpha_0}. \quad (3.9)$$

Этот корень с ростом kh поднимается по мнимой оси.

В области $v_3 < \tau < v_2$ радикал α – чисто мнимый,

$$\alpha = i\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{v_4} \sqrt{\frac{(v_1^2 - \tau^2)(\tau^2 - v_3^2)}{v_2^2 - \tau^2}}, \quad (3.10)$$

уравнение (3.1) представляется равенством

$$\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha} \operatorname{tg} kh \bar{\alpha} - \rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4 = 0. \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.11) относительно kh представляется формулой

$$kh = \frac{1}{\bar{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4}{\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha}} + \frac{n\pi}{\bar{\alpha}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Соотношения (3.12) определяют функции $kh(\tau)$, которые являются обратными по отношению к решению (3.1) $\tau_n(kh)$. При $\tau = v_2$, согласно равенству (3.10), $kh = 0$. При малом увеличении τ величина $(\bar{\alpha})^{-1}$ становится малой положительной величиной, а kh представляется приближенным соотношением

$$kh = \frac{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 v_2^4}{\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha}^2} + \frac{n\pi}{\bar{\alpha}}. \quad (3.13)$$

При $n > 0$ функция $kh(\tau)$ возрастает с увеличением $(\bar{\alpha})^{-1}$ и уменьшением τ . При $n = 0$ kh возрастает при уменьшении τ только в случае $R_0(v_2) > 0$. Если же $R_0(v_2) < 0$, то корень $\tau_0(kh)$ поднимается из точки $\tau = v_2$ и представляется формулой (3.9). Так как корни с ростом kh двигаются монотонно, то указанные направления перемещения корней сохраняются и вне малой окрестности точки $\tau = v_2$.

Выражения (3.12) справедливы в интервале $v_2 \geq \tau > v_3$. Особой точкой в этом интервале является корень $\tau = v_{R_0}$ функции $R_0(\tau)$, если этот корень попадает в указанный интервал. Функция $R_0(\tau)$ удовлетворяет неравенствам

$$R_0(\tau) > 0 \quad \text{при} \quad \tau > v_{R_0}, \quad R_0(\tau) < 0 \quad \text{при} \quad \tau < v_{R_0}. \quad (3.14)$$

В точке $\tau = v_{R_0}$ функция

$$\operatorname{arctg} \frac{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4}{\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha}} \quad (3.15)$$

испытывает скачок, хотя вся правая часть уравнения (3.12) остается непрерывной. Чтобы избавиться от этого скачка, полезно использовать формулу

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad x > 0 \quad (3.16)$$

и заменить равенства (3.12) на

$$\begin{aligned} kh &= -\frac{1}{\bar{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha}}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\bar{\alpha}} \\ &\quad (R_0(v_2) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots), \\ kh &= -\frac{1}{\bar{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 R_0 \bar{\alpha}}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\bar{\alpha}} \\ &\quad (R_0(v_2) < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.17)$$

С ростом kh и уменьшением τ функция $R_0(\tau)$ в первом равенстве (3.17) может сменить знак и стать отрицательной, однако вся правая часть останется непрерывной.

Точка $\eta = iv_{p_0}$, где $\alpha_0 = 0$, не представляет интереса, так как этот корень находится в комплексной области.

Антисимметричное дисперсионное уравнение (3.2) имеет корни при $kh = 0$ в точках, где $R_0(\tau) = 0$, и в существенно особой точке $\tau = v_2$. Функция $R_0(\tau)$ представляется в окрестности начала координат соотношением (3.7). Из этого соотношения следует, что корень $\tau = 0$ не перемещается с ростом kh . В интервале $0 < \tau < v_{s0}$ уравнение $R_0(\tau)$ имеет введенный неравенствами (3.14) корень $\tau = v_{R_0}$, так как $R_0(v_{s0}) > 0$, а при малых τ $R_0(\tau) < 0$. В окрестности точки $\tau = v_{R_0}$ уравнение (3.2) представляется равенством

$$\bar{\alpha}\mu_0^2 R_0'(v_{R_0})(\tau - v_{R_0}) + \rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 v_{R_0}^4 kh = 0, \quad (3.18)$$

из которого следует

$$\tau = v_{R_0} - \frac{\rho_0 \bar{\rho}_0 \alpha_0 v_{R_0}^4 kh}{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0'(v_{R_0})}. \quad (3.19)$$

Отметим, что корень v_{R_0} определяется параметрами упругих полупространств и может быть произвольно расположен по отношению к скоростям в слое. Так как выполняется неравенство $R_0'(v_{R_0}) > 0$, то из формулы (3.19) следует, что корень спускается с ростом kh .

Остановимся теперь на исследовании корней уравнения (3.2) в окрестности $\tau = v_2$. В области $\tau > v_2$ уравнение (3.2) не имеет корней. При $\tau < v_2$ уравнение (3.2) равносильно уравнениям

$$kh = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \frac{n\pi}{\bar{\alpha}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

Из равенств (3.20) следует исключить соотношение, при котором $n = 0$ и $R_0(v_2) > 0$, так как при этих условиях приходим к неравенству

$$kh = -\frac{1}{\bar{\alpha}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} \Big|_{\tau=v_2} < 0, \quad (3.21)$$

и оно не может быть выполнено.

Равенства (3.17) и (3.20) могут быть объединены соотношениями

$$kh = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \frac{m\pi}{2\alpha}, \quad (3.22)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ при $R_0(v_2) < 0$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ при $R_0(v_2) > 0$. Четные m относятся к антисимметричному уравнению (3.2), а нечетные m – к симметричному уравнению (3.1). Корни обоих уравнений полезно разделить на единичные корни и корни, образующие семейства корней. Единичные корни выходят при $kh = 0$ из точек $\tau = 0$, $\tau = v_{R_0}$ и $\tau = v_2$. Точка $\tau = v_2$ является “источником” двух единичных корней только при условии $R_0(v_2) < 0$, при этом корень симметричного уравнения (3.9) поднимается с ростом kh , а корень антисимметричного уравнения, выражающегося равенством (3.22) при $m = 0$, спускается. Остальные корни, выходящие из точки $\tau = v_2$, образуют семейство и спускаются с ростом kh .

§4. ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ

Корни уравнений (3.1) и (3.2) могут выходить на мнимую ось в интервале (3.3) не только при $kh = 0$. В точку ветвления $\tau = v_{s_0}$ приходят корни из соседнего листа при

$$kh = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha}}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \frac{m\pi}{2\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

и образуют семейство корней, выходящих из точки $\tau = v_{s_0}$. В формулах (4.1) объединены корни обоих дисперсионных уравнений, при этом в случае четного числа m корни относятся к антисимметричному уравнению (3.2), а в случае нечетного m – к симметричному уравнению (3.1). С ростом kh корни спускаются по мнимой оси и представляются соотношениями

$$kh = -\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4} + \frac{m\pi}{2\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

При $kh \rightarrow \infty$ корни (4.2) асимптотически приближаются или к точке $\tau = v_1$ при $v_1 < v_{s_0}$, или к точке $\tau = v_3$ при $v_3 < v_{s_0} < v_1$. При приближении корней к точке $\tau = v_1$ выполняются равенства

$$\tau^2 = v_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}(v_1^2 - v_2^2)}{\bar{\rho}(v_1^2 - v_3^2)k^2 h^2} \left(\frac{m\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 v_1^4} \right)^2, \quad (4.3)$$

а при приближении корней к точке $\tau = v_3$ справедливы соотношения

$$\tau^2 = v_3^2 + \frac{\tilde{\lambda}(v_2^2 - v_3^2)}{\bar{\rho}(v_1^2 - v_3^2)k^2h^2} \left(\frac{m\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mu_0^2 \bar{\alpha} R_0}{\rho \bar{\rho} \alpha_0 v_3^4} \right)^2, \quad (4.4)$$

Дисперсионные кривые, связанные с этими корнями, изображены на рис. 2 и 3, на которых показаны три первых кривых каждого семейства

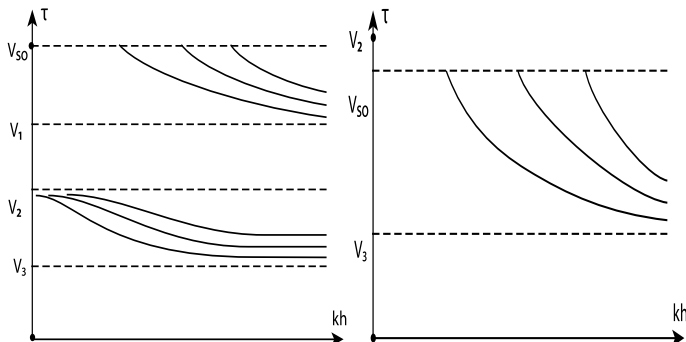


Рис. 2

Рис. 3.

Второе семейство корней содержит корни, выходящие из точки $\tau = v_2$ и асимптотически приближающиеся к точке $\tau = v_3$ (рис. 2). При этом приближении также выполняются соотношения (4.4). В эту группу не входят два корня, выходящих из точки $\tau = v_2$ и существующих при условии $v_2 < v_{R_0}$. Один из этих корней с ростом kh поднимается, согласно формуле (3.9). Другой корень, описываемый равенством (3.22) при $m = 0$, с ростом kh проходит через точку $\tau = v_3$ при

$$kh = - \frac{\mu_0^2 R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 v_3^4} \Big|_{\tau=v_3}, \quad R_0(v_3) < 0 \quad (4.5)$$

и спускается ниже этой точки. Первый из этих корней является корнем симметричного уравнения, другой – корнем антисимметричного уравнения. Эти два корня и корни, выходящие из точек $\tau = 0$ и $\tau = v_{R_0}$, образуют группу отдельных корней. С ростом kh корни этой группы двигаются попарно навстречу друг другу. Корень, выходящий из точки $\tau = v_{R_0}$, опускается и проходит в случае $v_{R_0} > v_1$

через точку $\tau = v_1$, и в случае $v_2 > v_{R_0} > v_3$ через точку $\tau = v_3$. При прохождении через точку $\tau = v_1$ выполняется соотношение

$$kh = -\frac{\mu_0^2 R_0}{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 v_1^4} \Big|_{\tau=v_1}, \quad R_0(v_1) < 0 \quad (4.6)$$

а при прохождении через точку $\tau = v_3$ справедливо равенство (4.5).

При $kh \rightarrow \infty$ корни этой группы асимптотически приближаются к точкам $\tau = v_{R_2}$ или $\tau = v_{R_1}$. При $kh = \infty$ оба дисперсионных уравнения (3.1) и (3.2) переходят в уравнение

$$\mu_0^2 R_0 \alpha + \rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4 = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) может иметь вещественные корни только в интервалах

$$0 < \tau < v_3, \quad v_2 < \tau < v_1, \quad (4.8)$$

где левая часть уравнения (4.7) является вещественной. В первом интервале (4.8) левая часть уравнения (4.7)

$$R_0 + \frac{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4}{\mu_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}(v_2^2 - \tau^2)}{\bar{\rho}(v_1^2 - \tau^2)(v_3^2 - \tau^2)}} \quad (4.9)$$

является отрицательной при малых τ и бесконечно большой положительной величиной при $\tau = v_3$. Отсюда следует, что уравнение (4.9) имеет корень $\tau = v_{R_2}$ и этот корень удовлетворяет условию $v_{R_2} < v_{R_0}$. Во втором промежутке уравнение (4.7) представляется равенством

$$R_0 + \frac{\rho_0 \bar{\rho} \alpha_0 \tau^4}{\mu_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}(\tau^2 - v_2^2)}{\bar{\rho}(v_1^2 - \tau^2)(\tau^2 - v_3^2)}} = 0 \quad (4.10)$$

и имеет корень $\tau = v_{R_1}$ при условии $R_0(v_2) < 0$. В самом деле, левая часть уравнения (4.10) является отрицательной при $\tau = v_2$, а при $\tau = v_1$ бесконечно большой положительной величиной. Корень $\tau = v_{R_2}$ уравнения (4.7) существует при всех параметрах, а корень $\tau = v_{R_1}$ уравнения (4.7) имеет место при условии $v_{R_0} > v_2$. Дисперсионные кривые, связанные с изолированными корнями, представлены на рис. 4 при $v_{R_0} > v_2$ и на рис. 5 при $v_2 > v_{R_0}$.

Уравнение (4.7) является дисперсионным уравнением границы упругой среды и пористой среды, описываемой уравнениями (1.4).

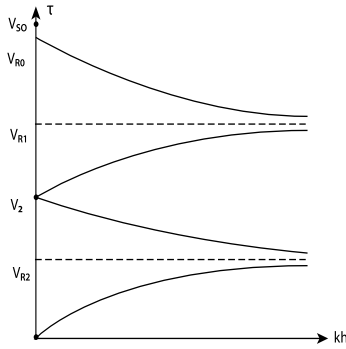


Рис. 4

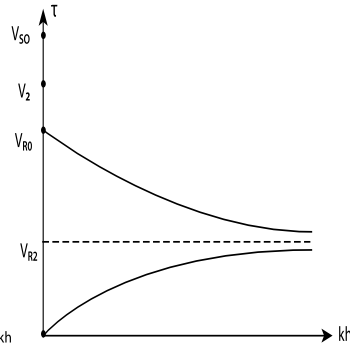


Рис. 5.

Корни уравнения (4.7) $\tau = v_{R_2}$ и $\tau = v_{R_1}$ являются скоростями поверхностных волн Релея, распространяющихся вдоль указанной границы. Особенность этой границы состоит в том, что вдоль нее могут распространяться две поверхностные волны Релея.

На основании проведенных исследований, устанавливающих начальное и конечное расположение всех мнимых корней, и, учитывая монотонный характер перемещения корней, могут быть построены все приближенные дисперсионные кривые, выражающие зависимости фазовых скоростей от волнового числа k . Расположение этих кривых существенно зависит от скоростей v_{s0} , v_{R_0} в упругих полупространствах и от скоростей в пористом слое v_1 , v_2 и v_3 . Эти скорости удовлетворяют условиям

$$v_{s0} > v_{R_0}, \quad v_1 > v_2 > v_3. \tag{4.11}$$

Между указанными пятью скоростями могут быть 10 различных теоретически возможных соотношений:

- 1) $v_{s0} > v_{R_0} > v_1 > v_2 > v_3$,
- 2) $v_{s0} > v_1 > v_{R_0} > v_2 > v_3$,
- 3) $v_{s0} > v_1 > v_2 > v_{R_0} > v_3$,
- 4) $v_{s0} > v_1 > v_2 > v_3 > v_{R_0}$,
- 5) $v_1 > v_{s0} > v_{R_0} > v_2 > v_3$,

$$\begin{aligned}
 5) \quad & v_1 > v_{s0} > v_{R_0} > v_2 > v_3, \\
 6) \quad & v_1 > v_{s0} > v_2 > v_{R_0} > v_3, \\
 7) \quad & v_1 > v_{s0} > v_2 > v_3 > v_{R_0}, \\
 8) \quad & v_1 > v_2 > v_{s0} > v_{R_0} > v_3, \\
 9) \quad & v_1 > v_2 > v_{s0} > v_3 > v_{R_0}, \\
 10) \quad & v_1 > v_2 > v_3 > v_{s0} > v_{R_0}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Каждому такому соотношению соответствует определенное расположение дисперсионных кривых. В соотношениях 1)–10) наблюдается постепенный переход от волновода к антиволноводу.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Backus, *Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering*. — J. Geoph. Res. **67** (1962), No. 11 4427–4440.
2. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред*, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
3. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers*. — J. Acoust. Soc. Amer **81**, No. 5 (1987), 1227–1234.
4. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. Наука, СПб, 2001.
5. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*. Л., 1984.
6. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.

Molotkov L. A., Mukhin A.A. Investigation of normal waves in a porous layer surrounded by elastic half-spaces.

The wave field and dispersion equations are established for the porous layer surrounded by two elastic half-spaces. The porous layer is described by the effective model of the medium in which elastic and fluid layers alternate. In order to investigate the normal waves, all real roots of dispersion equations are determined and their movements with increasing wave number are investigated. As a result, the dispersion curves of all normal waves are constructed and dependence of the normal waves on the parameters of the porous layer and the elastic half-spaces is analyzed.

С.-Петербургское отделение
 Математического института
 им. В. А. Стеклова РАН,
 Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
 E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru,
 muhin.alexander@gmail.com

Поступило 29 июня 2009 г.