

Л. А. Молотков

## ИССЛЕДОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОЕ БИО, ОКРУЖЕННОМ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

При изучении распространения волн между скважинами полезно рассматривать слои, расположенные между твердыми средами. Таким слоем в настоящей работе является пористый флюидонасыщенный слой Био [1, 2]. Общие исследования волн в средах Био содержатся в монографиях [3, 4]. Среди волн, образующихся в слое Био и окружающих упругих средах, наибольший интерес представляют нормальные волны, так как эти волны не испытывают экспоненциального затухания и могут распространяться на большие расстояния. Большой интерес представляет низкочастотная область нормальных волн. В этой области распространяется небольшое количество нормальных волн, и эти волны, как правило, несут большую энергию. Для выделения и исследования низкочастотных нормальных волн необходимо найти корни дисперсионных уравнений среды при малых волновых числах.

В предлагаемой работе выводятся два дисперсионных уравнения, относящихся к симметричной и антисимметричной частям рассматриваемой среды. С использованием специальных формул между параметрами среды Био [5] эти уравнения приводятся к довольно простым соотношениям в случае малых волновых чисел. Из этих соотношений следует, что в этой области симметричное дисперсионное уравнение имеет два корня  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$ , а антисимметричное уравнение — корень  $v_R$ . Эти три величины являются скоростями нормальных волн вдоль слоя. Кроме того, величины  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  являются скоростями волн в пластине Био с закрытыми порами на границах, а  $v_R$  — скорость волны Релея вдоль свободной границы упругого слоя.

---

*Ключевые слова* : низкочастотные нормальные волны, пористый слой Био, пластинчатые волны, окружающая упругая среда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), гранты 08-01-00511, 08-05-00285.

§1. СРЕДА

Пусть задана двумерная среда, состоящая из двух упругих полуплоскостей  $0 < z < h$  и пористого слоя Био  $1 -h \leq z \leq h$ . Обе полуплоскости характеризуются одинаковыми параметрами, плотностью  $\rho_0$  и коэффициентами Ламе  $\lambda_0, \mu_0$  (рис. 1). Смещения и напряжения в этих полуплоскостях выражаются равенствами

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial x \partial z}, & u_{zi} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial z^2}, \\ \tau_{xzi} &= 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial z^2} \right) + \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial t^2}, \\ \tau_{zzi} &= \frac{\rho_0 \lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^2} + 2\mu_0 \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial x \partial z} \right) \quad (i = 0, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

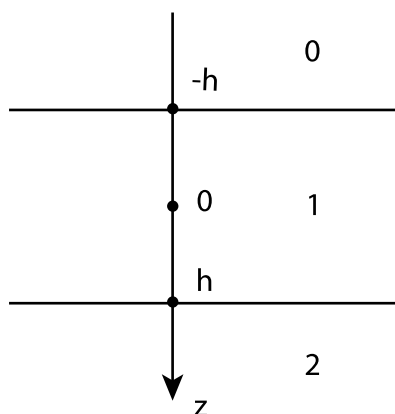


Рис. 1.

через потенциалы  $\bar{\varphi}_i$  и  $\bar{\psi}_i$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial t^2} \quad (i = 0, 2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которых  $v_p$  и  $v_s$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в упругих плоскостях 0 и 2.

Чтобы учесть волновое поле в пористом слое Био, полезно использовать потенциалы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\psi$ , удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (1.3)$$

в которых

$$\begin{aligned}v_{1,2}^2 &= \left[ \pm \sqrt{(mH + \rho M - 2\rho_f C)^2 - 4(HM - C^2)(m\rho - \rho_f^2)} \right. \\ &\quad \left. + mH + \rho M - 2\rho_f C \right] / [2(\rho m - \rho_f^2)], \\ v_3^2 &= \frac{mL}{\rho m - \rho_f^2},\end{aligned}\quad (1.4)$$

$\rho$  – средняя плотность пористой среды,  $\rho_f$  – плотность жидкой фазы,  $H$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $L$  – модули, входящие в закон Гука для пористой среды Био во втором представлении,  $m$  – параметр, определяющий изгиб пор.

Через эти потенциалы смещения и напряжения выражаются равенствами

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ w_z &= B_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\rho_f}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \tau_{xz} &= L \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{zz} &= (\rho + B_1 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (\rho + B_2 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ &\quad - 2L \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Смещение  $u_z$  и напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zz}$  относятся к упругой фазе, а  $w_z$  – составляющая относительного смещения в жидкой фазе. Безразмерные коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  разделяют поля потенциалов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и представляются равенствами

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2).\quad (1.6)$$

Условия на границах  $z = \pm h$  между упругой и пористой средами даются соотношениями

$$u_{zi} = u_z, \quad \tau_{zzi} = \tau_{zz}, \quad \tau_{xzi} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad w_z = 0. \quad (1.7)$$

Последнее условие (1.7) выражает равенство смещений в обеих фазах на границах оси  $z$ .

## §2. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемая среда возбуждается некоторым источником на полуплоскости 0. От этого источника на границу  $z = -h$  падает волна, заданная потенциалами  $\bar{\varphi}_0^0$  и  $\bar{\psi}_0^0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0^0 &= \int_0^\infty \frac{\cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_0^0(k, \eta) e^{k[t\eta - (z+h)\alpha_0]} d\eta, \\ \bar{\psi}_0^0 &= \int_0^\infty \frac{\sin kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_0^0(k, \eta) e^{k[t\eta - (z+h)\beta_0]} d\eta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\alpha_0 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_p^2}}, \quad \beta_0 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_s^2}}. \quad (2.2)$$

При построении волнового поля в рассматриваемой среде полезно использовать симметрию среды относительно прямой  $z = 0$ . Волновое поле представится в виде суммы симметричной и антисимметричной частей. Для нахождения волнового поля в каждой из этих частей достаточно рассмотреть область  $z < 0$ , а падающие волны в виде потенциалов  $\frac{1}{2}\varphi(z)$  и  $\frac{1}{2}\psi(z)$ . В область  $z > 0$  волновые поля могут быть продолжены при использовании симметрии или антисимметрии. Волны в полупространстве 0 в симметричном и антисимметричном случаях определяются потенциалами

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [X_0(k, \eta) e^{k(z+h)\alpha_0} + X_0^0 e^{-k(z+h)\alpha_0}] e^{kt\eta} d\eta, \quad (2.3)$$

$$\bar{\psi}_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [Z_0(k, \eta) e^{k(z+h)\beta_0} + Z_0^0 e^{-k(z+h)\beta_0}] e^{kt\eta} d\eta,$$

при этом первые слагаемые в подынтегральных выражениях описывают отраженные волны. После подстановки равенств (2.3) в формулы (1.1) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
 u_{z0} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_{z0} e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{xz0} &= -\frac{\mu_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{xz0} e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{zz0} &= -\frac{\mu_0}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{zz0} e^{kt\eta} d\eta,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

в которых

$$\begin{aligned}
 U_{z0} &= \alpha_0 X_0 e^{k(z+h)\alpha_0} - \alpha_0 X_0^0 e^{-k(z+h)\alpha_0} \\
 &\quad + Y_0 e^{k(z+h)\beta_0} + Y_0^0 e^{-k(z+h)\beta_0}, \\
 T_{xz0} &= 2\alpha_0 X_0 e^{k(z+h)\alpha_0} - 2\alpha_0 X_0^0 e^{-k(z+h)\alpha_0} \\
 &\quad + g_0 Y_0 e^{k(z+h)\beta_0} + g_0 Y_0^0 e^{-k(z+h)\beta_0}, \\
 T_{zz0} &= g_0 X_0 e^{k(z+h)\alpha_0} + g_0 X_0^0 e^{-k(z+h)\alpha_0} \\
 &\quad + 2\beta_0 Y_0 e^{k(z+h)\beta_0} - 2\beta_0 Y_0^0 e^{-k(z+h)\beta_0}, \\
 g_0 &= 2 + \frac{\eta^2}{v_s^2}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Потенциалы в слое Био в симметричном случае представляются равенствами

$$\begin{aligned}
 \varphi_i &= \int_0^{\infty} \frac{\cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k, \eta) chkz\alpha_i e^{kt\eta} d\eta \quad (i = 1, 2), \\
 \psi &= \int_0^{\infty} \frac{\sin kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k, \eta) shkz\beta e^{kt\eta} d\eta, \\
 \alpha_1 &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_1^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_2^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

После подстановки соотношений (2.6) в (1.5) приходим к формулам

$$\begin{aligned}
 u_z &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_z(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta, \\
 w_z &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W_z(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{xz} &= -\frac{L}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \sin kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{xz}(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta, \\
 \tau_{zz} &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 \cos kx dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{zz}(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 U_z &= \alpha_1 shkz\alpha_1 X_1 + \alpha_2 shkz\alpha_2 X_2 + shkz\beta Z, \\
 W_z &= B_1 shkz\alpha_1 X_1 + B_2 \alpha_2 shkz\alpha_2 X_2 - \frac{\rho f}{m} shkz\beta Z, \\
 T_{xz} &= 2\alpha_1 shkz\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 shkz\alpha_2 X_2 + gshkz\beta Z, \\
 T_{zz} &= [2L + (\rho + B_1 \rho_f) \eta^2] chkz\alpha_1 X_1 \\
 &\quad + [2L + (\rho + B_2 \rho_f) \eta^2] chkz\alpha_2 X_2 + 2L\beta chkz\beta Z, \\
 g &= 2 + \frac{\eta^2}{v_3^2}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Граничные условия (1.7) при  $z = -h$  совместно с соотношениями (2.4), (2.5), (2.7) и (2.8) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 X_0 + Y_0 + \alpha_1 shkh\alpha_1 X_1 + \alpha_2 shkh\alpha_2 X_2 + shkh\beta Z &= \alpha_0 X_0^0 - Y_0^0, \\
 \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0 - [2L + (\rho + B_1 \rho_f) \eta^2] chkh\alpha_1 X_1 & \tag{2.9} \\
 - [2L + (\rho + B_2 \rho_f) \eta^2] chkh\alpha_2 - 2L\beta chkh\beta Z &= -\mu_0 g_0 X_0^0 + 2\mu_0 Y_0^0, \\
 2\alpha_0 X_0 + g_0 Y_0 &= 2\alpha_0 X_0^0 - g_0 Y_0^0, \\
 B_1 \alpha_1 shkh\alpha_1 X_1 + B_2 \alpha_2 shkh\alpha_2 X_2 - \frac{\rho f}{m} shk\beta Z &= 0, \\
 2\alpha_1 shkh\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 shkh\alpha_2 X_2 + gshkh\beta Z &= 0,
 \end{aligned}$$

описывающих симметричную часть волнового поля.

В случае антисимметричного поля потенциалы в слое Био представляются равенствами

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \int_0^\infty \frac{\cos kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k, \eta) shkz\alpha_i e^{kt\eta} d\eta \quad (i = 1, 2), \\ \psi &= \int_0^\infty \frac{\sin kxdk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k, \eta) chkz\beta e^{kt\eta} d\eta.\end{aligned}\quad (2.10)$$

После подстановки соотношений (2.10) в (1.5) приходим также к формулам (2.7), где

$$\begin{aligned}U_z &= \alpha_1 chkz\alpha_1 X_1 + \alpha_2 chkz\alpha_2 X_2 + chkz\beta Z, \\ W_z &= B_1\alpha_1 chkz\alpha_1 X_1 + B_2\alpha_2 chkz\alpha_2 X_2 - \frac{\rho m}{m} chkz\beta Z, \\ T_{xz} &= 2\alpha_1 chkz\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 chkz\alpha_2 X_2 + gchkz\beta Z, \\ T_{zz} &= [2L + (\rho + B_1\rho_f)\eta^2] shkz\alpha_1 X_1 \\ &\quad + [2L + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2] shkz\alpha_2 X_2 + 2L\beta shkz\beta Z.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Граничные условия (1.7) при  $z = -h$  совместно с соотношениями (2.4), (2.5), (2.7) и (2.11) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_0 X_0 + Y_0 - \alpha_1 chkh\alpha_1 X_1 - \alpha_2 chkh\alpha_2 X_2 - chkh\beta Z &= \alpha_0 X_0^0 - Y_0^0, \\ \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 Y_0 + [2L + (\rho + B_1\rho_f)\eta^2] shkh\alpha_1 X_1 \\ &\quad + [2L + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2] shkh\alpha_2 X_2 \\ &\quad + 2L\beta shkh\beta Z = -\mu_0 g_0 X_0^0 + 2\mu_0 Y_0^0, \\ 2\alpha_0 X_0 + g_0 Y_0 &= 2\alpha_0 X_0^0 - g_0 Y_0^0, \\ B_1\alpha_1 chkh\alpha_1 X_1 + B_2\alpha_2 chkh\alpha_2 X_2 - \frac{\rho f}{m} chkh\beta Z &= 0, \\ 2\alpha_1 chkh\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 chkh\alpha_2 X_2 + gchkh\beta Z &= 0\end{aligned}\quad (2.12)$$

в антисимметричном случае.

Уравнения (2.9) и (2.12) определяют симметричную и антисимметричную части волнового поля. Поскольку в настоящей работе мы ограничимся исследованием соответствующих дисперсионных уравнений, то для вывода этих уравнений мы должны вычислить главные

определители уравнений (2.9) и (2.10). Симметричное дисперсионное уравнение представляется равенствами

$$\begin{aligned} & \frac{[2L + (\rho + B_1\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_2g\right)}{(B_1 - B_2)\alpha_1 thkh\alpha_1} \\ & - \frac{[2L + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_1g\right)}{(B_1 - B_2)\alpha_2 thkh\alpha_2} + \frac{4L\beta}{thkh\beta} + \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$R_0 = g_0^2 - 4\alpha_0\beta_0,$$

а антисимметричное дисперсионное уравнение – соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{[2L + (\rho + B_1\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_2g\right)}{(B_1 - B_2)\alpha_1 cthkh\alpha_1} \\ & - \frac{[2L + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_1g\right)}{(B_1 - B_2)\alpha_2 cthkh\alpha_2} + \frac{4L\beta}{cthkh\beta} + \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

### §3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Перед исследованием корней дисперсионных уравнений преобразуем эти уравнения. При этих преобразованиях исключим из уравнений коэффициенты  $B_1$ ,  $B_2$  и представим уравнения в более компактной форме. Эти преобразования сводятся к использованию равенств

$$\begin{aligned} 2L + (\rho + B_1\rho_f)\eta^2 &= 2L + \frac{H\rho_f - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C}\eta^2, \\ 2L + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2 &= 2L - \frac{H\rho_f - \rho C}{C - \rho_f v_1^2}\eta^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$B_1 - B_2 = \frac{(Cm - M\rho_f)(v_1^2 - v_2^2)}{(M - mv_2^2)(mv_1^2 - M)}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_f}{m} + B_1g &= \frac{mC - \rho_f M}{mL(mv_1^2 - M)} \left( 2L - \frac{H\rho_f - \rho C}{C - \rho_f v_2^2}\eta^2 \right), \\ \frac{2\rho_f}{m} + B_2g &= -\frac{mC - \rho_f M}{mL(M - mv_2^2)} \left( 2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_2^2 - C}\eta^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соотношения (3.1) и (3.2) доказываются в [5] при использовании формул

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{mv_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$



При доказательстве равенств (3.3) применяется теорема Виета

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{Hm + M\rho - 2C\rho_f}{\rho m - \rho_f^2}, \quad v_1^2 v_2^2 = \frac{HM - C^2}{\rho m - \rho_f^2} \quad (3.5)$$

для корней  $v_1$  и  $v_2$  уравнения

$$(\rho m - \rho_f^2)v^4 - (mH + \rho M - 2\rho_f C)v^2 + HM - C^2 = 0. \quad (3.6)$$

На основании равенств (3.5) доказывается важная формула

$$(\rho_f v_1^2 - C)(C - \rho_f v_2^2)(m\rho - \rho_f^2) = (\rho_f H - \rho C)(mC - \rho_f M), \quad (3.7)$$

используемая при доказательстве соотношения (3.3).

В результате уравнения (2.13) и (2.14) заменяются соответственно на

$$\begin{aligned} & \frac{\left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2\right)^2 (mv_1^2 - M)}{mL(v_1^2 - v_2^2)\alpha_1 thkh\alpha_1} + \frac{\left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2\right)^2 (M - mv_2^2)}{mL(v_1^2 - v_2^2)\alpha_2 thkh\alpha_2} \\ & - \frac{4L\beta}{thkh\beta} - \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2\right)^2 (mv_1^2 - M)}{mL(v_1^2 - v_2^2)\alpha_1 cthkh\alpha_1} + \frac{\left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2\right)^2 (M - mv_2^2)}{mL(v_1^2 - v_2^2)\alpha_2 cthkh\alpha_2} \\ & - \frac{4L\beta}{cthkh\beta} - \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8) и (3.9) равносильны уравнениям

$$\begin{aligned} & (M - mv_2^2) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2\right)^2 \alpha_1 thkh\alpha_1 \frac{thkh\beta}{\beta} \\ & + (mv_1^2 - M) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2\right)^2 \alpha_2 thkh\alpha_2 \frac{thkh\beta}{\beta} \\ & - 4mL^2 (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1 \alpha_2 thkh\alpha_1 thkh\alpha_2 \\ & - \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} mL(v_1^2 - v_2^2) \alpha_1 \alpha_2 thkh\alpha_1 thkh\alpha_2 \frac{thkh\beta}{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 & (M - mv_2^2) \left( 2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2 \right)^2 \frac{thkh\alpha_2}{\alpha_2} \\
 & + (mv_1^2 - M) \left( 2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2 \right)^2 \frac{thkh\alpha_1}{\alpha_1} \\
 & - 4mL^2(v_1^2 - v_2^2)\beta thkh\beta - \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_3^2} mL(v_1^2 - v_2^2) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

§4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИММЕТРИЧНОГО  
ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ  $kh \ll 1$

Остановимся на исследовании дисперсионных уравнений (3.10) и (3.11). Так как корни этих уравнений расположены симметрично относительно вещественной оси, то достаточно провести их исследование в верхней полуплоскости. Наибольший интерес представляют мнимые корни  $\eta = i\tau$ , описывающие нормальные волны, не испытывающие экспоненциального затухания и распространяющиеся на большие расстояния. Эти корни в верхней полуплоскости расположены в интервале

$$0 \leq \tau \leq v_s \tag{4.1}$$

мнимой оси, где левые части уравнений (3.10) и (3.11) являются или вещественными, или мнимыми. Вне интервала (4.1) корни, как правило, являются комплексными.

Исследование корней начнем со случая, когда  $kh \ll 1$  и исследуем сперва симметричное уравнение. В указанной области первые три члена в левой части уравнения (3.10) пропорциональны  $k^2 h^2$ , а четвертый член пропорционален  $k^3 h^3$ . Учитывая эти зависимости, представим уравнение (3.10) равенством

$$\Delta_1(\tau) + \Delta_2(\tau)kh = 0, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(\tau) &= (M - mv_2^2) \left( 2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2 \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_1^2} \right) \\
 &+ (mv_1^2 - M) \left( 2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right)^2 \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_2^2} \right) \\
 &- 4mL^2(v_1^2 - v_2^2) \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_1^2} \right) \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_2^2} \right), \\
 \Delta_2(\tau) &= -\frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0 v_s^2} mL(v_1^2 - v_2^2) \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_1^2} \right) \left( 1 - \frac{\tau^2}{v_2^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

После ряда преобразований функция (4.3) выразится соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta_1(\tau) = & -\frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)\tau^2}{HM - C^2} \{H(\rho m - \rho_f^2)\tau^4 - [(H^2 - B^2)m \\ & + (HM - C^2)\rho - 2C(H - B)\rho_f]\tau^2 + \tilde{\Delta}\}, \\ \tilde{\Delta} = & (H - B)(HM + VM - 2C^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

При выводе равенства (4.5) использовались формулы

$$\begin{aligned} \frac{M - mv_2^2}{C - \rho_f v_2^2} - \frac{mv_1^2 - M}{\rho_f v_1^2 - C} &= -\frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{H\rho_f - C\rho}, \\ \frac{M - mv_2^2}{(C - \rho_f^2 v_2^2)^2} + \frac{mv_1^2 - M}{(\rho_f v_1^2 - C)^2} &= \rho \frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{(H\rho_f - C\rho)^2}, \\ \frac{M - mv_2^2}{v_1^2(\rho_f v_2^2 - C)^2} + \frac{mv_1^2 - M}{v_2^2(\rho_f v_1^2 - C)^2} &= H \frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{(HM - C^2)(H\rho_f - C\rho)^2}, \\ \frac{M - mv_2^2}{v_1^2(C - \rho_f v_2^2)} - \frac{mv_1^2 - M}{v_2^2(\rho_f v_1^2 - C)} &= -\frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)(Hm - C\rho_f)}{(HM - C^2)(H\rho_f - C\rho)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Переход от выражения (4.3) к равенству (4.5) проводился также в работе [5]. Уравнение

$$H(\rho m - \rho_f)\tau^4 - [(H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho - 2C(H - B)\rho_f]\tau^2 + \tilde{\Delta} = 0 \quad (4.7)$$

имеет вещественные корни

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1,2}^2 = & \left[ \pm \sqrt{[m(H^2 - B^2) + \rho(HM - C^2) - 2\rho_f C(H - B)]^2 - 4H(\rho m - \rho_f^2)\tilde{\Delta}} \right. \\ & \left. + m(H^2 - B^2) + \rho(HM - C^2) - 2\rho_f C(H - B) \right] / [2H(\rho m - \rho_f^2)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Величины  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  являются скоростями пластинчатых волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами [5]. Нулевой корень  $\eta^2 = 0$  не представляет интереса, так как он не перемещается с ростом  $kh$ .

Как известно, в среде Био распространяются две продольных волны со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Эти скорости выражаются формулой

(1.4) и удовлетворяют уравнению (3.6). Докажем, что для скоростей  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  выполняются неравенства

$$v_1 > \bar{v}_1 > v_2 > \bar{v}_2. \tag{4.9}$$

С этой целью представим уравнения (3.6) и (4.7) в виде равенств

$$\begin{aligned} x^2 - a_1x + d_1 &= 0, \\ x^2 - a_2x + d_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned} x &= v^2, \quad x = \tau^2, \\ a_1 &= \frac{Hm - M\rho - 2C\rho_f}{\rho m - \rho_f^2}, \quad d_1 = \frac{HM - C^2}{\rho m - \rho_f^2}; \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho - 2C(H - B)\rho_f}{H(\rho m - \rho_f^2)}, \\ d_2 &= \frac{\tilde{\Delta}}{H(\rho m - \rho_f^2)}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

Графики левых частей уравнений (4.9) и (4.10) – конгруэнтные параболы с осями, параллельными оси ординат и направленными вверх, и с вершинами, расположенными ниже оси абсцисс. Эти параболы не пересекаются только в случае, когда абсциссы вершин парабол совпадают и имеет место вертикальный сдвиг между параболом. Во всех остальных случаях параболы пересекаются в одной точке, которая может быть расположена или в нижней (рис. 2), или в верхней полуплоскости (рис. 3).

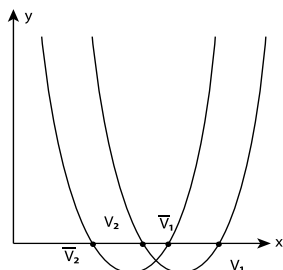


Рис. 2

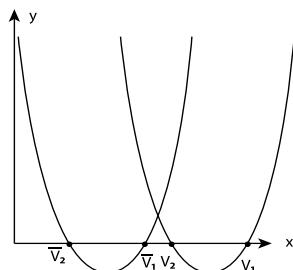


Рис. 3.

Чтобы найти условия выполнения неравенств (4.9) найдем абсциссу

$$x = \frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2} \quad (4.13)$$

и ординату

$$\left(\frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2}\right)^2 + \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2} \quad (4.14)$$

точки пересечения парабол. Неравенства (4.9) выполняются, так как

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d_1 - d_2}{a_1 - a_2}\right)^2 + \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2} \\ &= -\frac{[mBC(H - B) - \rho C(BM - C^2) - \rho_f(C^2 H - B^2 M)]^2}{(\rho m - \rho_f^2)(B^2 m + C^2 \rho - 2BC\rho_f)^2} < 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Разложим на множители биквадратный трехчлен, входящий в равенство (4.5), и представим уравнение (4.2) в виде соотношения

$$(\tau^2 - \bar{v}_1^2)(\tau^2 - \bar{v}_2^2) = -\frac{\mu_0 v_s^2 R_0(\tau)}{H \alpha_0 \tau^2} (\tau^2 - v_1^2)(\tau^2 - v_2^2) kh. \quad (4.16)$$

Из равенства (4.16) следует, что симметричное уравнение (4.2) при  $kh = 0$  имеет корни  $\tau = \bar{v}_1$  и  $\tau = \bar{v}_2$ . Чтобы определить направление перемещения этих корней с ростом  $kh$  исследуем окрестности этих корней. В окрестности точки  $\tau = \bar{v}_1$  дисперсионное уравнение (4.16) выразится равенством

$$\tau^2 = v_1^2 + \frac{\mu_0 v_s^2 R_0(\bar{v}_1)}{\alpha_0(\bar{v}_1) H \bar{v}_1^2} \frac{(v_1^2 - \bar{v}_1^2)(\bar{v}_1^2 - v_2^2)}{(\bar{v}_1^2 - v_2^2)} kh, \quad (4.17)$$

из которого следует, что с ростом  $kh$  корень из точки  $\tau = \bar{v}_1$  поднимается при  $R_0(\bar{v}_1) > 0$  и спускается при  $R_0(\bar{v}_1) < 0$ . В окрестности точки  $\tau = \bar{v}_2$  дисперсионное уравнение представится соотношением

$$\tau^2 = v_2^2 + \frac{\mu_0 v_s^2 R_0(\bar{v}_2)}{\alpha_0(\bar{v}_2) H \bar{v}_2^2} \frac{(v_1^2 - \bar{v}_2^2)(v_2 - \bar{v}_2^2)}{(\bar{v}_1^2 - v_2^2)} kh, \quad (4.18)$$

из которого следует, что с ростом  $kh$  корень  $v_2$  из точки поднимается при  $R_0(\bar{v}_2) > 0$  и спускается при  $R_0(\bar{v}_2) < 0$ .

§5. ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИСИММЕТРИЧНОГО  
ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ  $kh \ll 1$

Антисимметричное дисперсионное уравнение (3.11) в области  $kh \ll 1$  представится соотношением

$$\Delta_3(\tau)kh + \Delta_4(\tau) = 0, \quad (5.1)$$

в котором

$$\begin{aligned} \Delta_3(\tau) = & (M - mv_2^2) \left( 2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2 \\ & + (mv_1^2 - M) \left( 2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right)^2 - mL^2(v_1^2 - v_2^2)\beta^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\Delta_4(\tau) = -\frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0} (\rho m - \rho_f^2)(v_1^2 - v_2^2). \quad (5.3)$$

После ряда преобразований с использованием первой и второй формул (4.6) приходим к равенству

$$\Delta_3 = \rho(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)\eta^4. \quad (5.4)$$

С учетом соотношения (5.4) антисимметричное дисперсионное уравнение выразится равенством

$$\frac{\mu_0 v_s^2 R_0}{\alpha_0} = \rho \tau^4 kh. \quad (5.5)$$

Функция  $R_0(\tau)$ , выраженная формулой (2.13), представляется графиком в интервале  $0 \leq \tau \leq v_s$  и имеет корень  $\tau = v_R$  (рис. 4). В окрестности этого корня выполняется приближенное равенство

$$R_0(\tau) = R'_0(v_R)(\tau - v_R), \quad (5.6)$$

где  $R'_0(v_R) > 0$ . Из соотношений (5.5) и (5.6) следует, что антисимметричное дисперсионное уравнение имеет при  $kh = 0$  корень  $\tau = v_R$  и при  $kh \ll 1$  этот корень выражается приближенным равенством

$$\tau = v_R + \frac{\rho v_R^4 \alpha_0(v_R)}{\mu_0 R'_0(v_R)} kh. \quad (5.7)$$

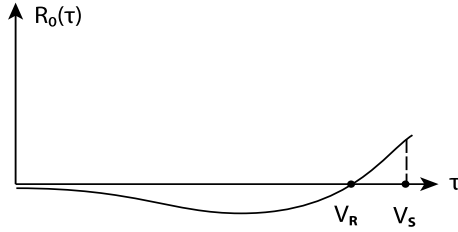


Рис. 4.

Согласно формуле (5.7), корень из точки  $\tau = v_R$  поднимается с ростом  $kh$ .

Таким образом, в рассматриваемой среде распространяются три низкоскоростные нормальные волны со скоростями  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$  и  $v_R$ . Между этими скоростями могут быть три возможных соотношения

$$1) \bar{v}_1 > \bar{v}_2 > v_R, \quad 2) \bar{v}_1 > v_R > \bar{v}_2, \quad 3) v_R > \bar{v}_1 > \bar{v}_2. \quad (5.8)$$

Указанные волны обладают дисперсией, и с небольшим увеличением  $kh$  скорости или возрастают, или убывают. Начальные участки дисперсионных кривых в трех возможных случаях показаны на рис. 5.

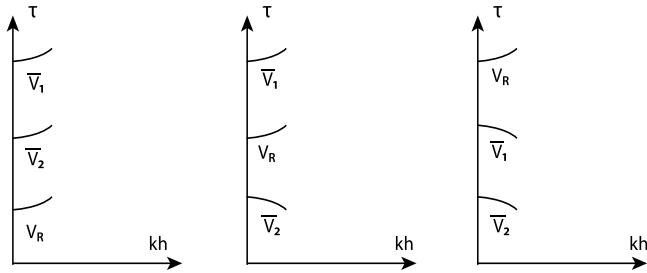


Рис. 5.

Исследование перемещения корней с дальнейшим ростом  $kh$  аналитическими методами представляет большие трудности вследствие большого числа параметров. Отметим только некоторые свойства корней дисперсионных уравнений вне области  $kh \ll 1$ . При условии  $\min(v_2, v_3) < v_s$  на мнимую ось основного листа выходит семейство корней обоих уравнений в точке ветвления  $\eta = iv_s$  при определенных параметрах  $kh > 0$ . Эти корни двигаются по мнимой

оси и при  $kh \rightarrow \infty$  подходят к точке  $\eta = i \min(v_2, v_3)$ . В интервале  $0 < \tau < \min(v_2, v_3, v_s)$  может находиться или отсутствовать корень уравнения

$$\begin{aligned} & (M - mv_2^2) \left( 2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2 \right)^2 \alpha_1 \\ & + (mv_1^2 - M) \left( 2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2 \right)^2 \alpha_2 \\ & - 4mL^2 (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1 \alpha_2 \beta - \frac{\mu_0 R_0 v_s^2}{\alpha_0} (\rho m - \rho_f^2) \alpha_1 \alpha_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

записанного на основании соотношений (3.10) и (3.11). Если такой корень существует, то к нему с двух сторон подходят при  $kh \rightarrow \infty$  корни симметричного и антисимметричного уравнений. Этот корень также является скоростью поверхностной волны, распространяющейся вдоль границы между упругой средой и средой Био.

Аналогичная среда рассматривалась в работе [6], где между упругими полуплоскостями расположен слой, который описывается эффективной моделью среды с чередующимися упругими и жидкими слоями. В обеих средах существуют дисперсионные кривые, которые начинаются с поперечной скоростью  $v_s$ . В среде, описанной в работе [6], существует низкоскоростная волна, а в рассмотренной среде такая волна не возникает. Отсутствие этой волны связано с отсутствием протяженного жидкого слоя в среде Био. После гидравлического разрыва в среде Био может возникнуть такой слой, и тогда может появиться низкоскоростная волна.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Бiot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range.* — J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 168–178.
2. М. А. Бiot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. High frequency range.* — J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 179–191.
3. Т. Bourbie, О. Coussy, В. Zinzner, *Acoustic of Porous Media.* Paris, 1987.
4. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб, 2001.
5. Л. А. Молотков, *Распространение волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **354** (2008), 173–189.



6. Л. А. Молотков, А. А. Мухин, *Исследование нормальных волн в пористом слое, окруженном упругой средой*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **369** (2009), 127–142.

Molotkov L. A. Investigation of low frequency normal waves in Biot layer surrounded by an elastic medium

The porous Biot layer surrounded by two elastic half-plates is considered. For this medium, two dispersion equations are established. These dispersion equations correspond to symmetric and antisymmetric parts of the medium. The investigation of these equations is fulfilled in region of low frequencies. The imaginary roots of these equations in this region determine the low frequency normal waves.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 22 июня 2009 г.